Nullstellensatz ralo, resultantes ralas y determinantes de complejos

Gabriela Jeronimo
Universidad de Buenos Aires & CONICET, Argentina
jeronimo@dm.uba.ar

El Nullstellensatz de Hilbert establece que dados polinomios $f_1, \ldots, f_k \in K[t_1, \ldots, t_n]$ con coeficientes en un cuerpo K, el conjunto de sus ceros comunes en $\overline{K}^n$ (donde $\overline{K}$ es una clausura algebraica de K) es vacío si y solo si el ideal que generan $f_1, \ldots, f_k$ en $K[t_1, \ldots, t_n]$ es todo el anillo. Desde el punto de vista efectivo, el problema consiste en dar un procedimiento algorítmico para decidir si esto ocurre y encontrar, a partir de $f_1, \ldots, f_k$, una identidad de Bézout,

$$\sum_{i=1}^{k} g_i f_i = 1,$$

que lo certifique. Un enfoque ampliamente estudiado, que se remonta a [4], consiste en dar cotas superiores para los grados de polinomios $g_1, \ldots, g_k$ en una identidad de Bézout, lo que reduce el problema a una cuestión de Álgebra Lineal. Si $k = n + 1$, una herramienta clásica relacionada es la resultante que, dados grados $d_1, \ldots, d_{n+1} \in \mathbb{N}$, es un polinomio en los coeficientes de polinomios homogéneos genéricos en $n + 1$ variables de dichos grados que se anula para una especialización de coeficientes en K si y solo si los polinomios con dichos coeficientes no tienen ceros comunes en el espacio proyectivo sobre $\overline{K}$.

En esta comunicación nos concentraremos en el caso ralo: dados conjuntos finitos $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_k \subset \mathbb{Z}^n$, consideramos polinomios (de Laurent) con soportes en $\mathcal{A}_i$, es decir, de la forma $f_i = \sum_{a \in \mathcal{A}_i} c_{i,a} t^a \in K[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_n^{\pm 1}]$, $i = 1, \ldots, k$. El problema del Nullstellensatz efectivo en este contexto es caracterizar los soportes de polinomios $g_1, \ldots, g_k$ en una identidad de Bézout si $f_1, \ldots, f_k$ no tienen ceros comunes en $(\overline{K} \setminus \{0\})^n$ (ver [5] para resultados generales sobre este problema).

Presentaremos un refinamiento de un resultado de [6] sobre los soportes de polinomios en una identidad de Bézout para polinomios de Laurent ralos sin ceros comunes en la variedad tórica asociada a sus soportes. Esta hipótesis adicional, que puede verse como una generalización de que los polinomios no tengan ceros comunes en el espacio proyectivo en el caso clásico, permite obtener conjuntos de soportes considerablemente más chicos que en el caso general.

Para $k = n+1$, daremos también nuevas fórmulas para calcular la resultante rala (polinomio que generaliza la noción clásica de resultante a este contexto; ver por ejemplo [3]) como el determinante de un complejo de tipo Koszul. Este resultado provee una simplificación de la construcción dada en [2] para el cálculo de la resultante rala con el enfoque de Canny-Emiris (ver [1]).

Trabajo en conjunto con Carlos D'Andrea (Universitat de Barcelona & Centre de Recerca Matemàtica, España).

Referencias

[1] Canny, John; Emiris, Ioannis. An efficient algorithm for the sparse mixed resultant. Applied algebra, algebraic algorithms and error-correcting codes (San Juan, PR, 1993), 89– 104, Lecture Notes in Comput. Sci., 673, Springer, Berlin, 1993.

[2] D'Andrea, Carlos; Jeronimo, Gabriela; Sombra, Martín. The Canny-Emiris Conjecture for the Sparse Resultant. Found. Comput. Math. 23 (2023), no. 3, 741–801.

[3] D'Andrea, Carlos; Sombra, Martín. A Poisson formula for the sparse resultant. Proc. Lond. Math. Soc. (3) 110 (2015), no. 4, 932–964.

[4] Hermann, Grete. Die Frage der endlich vielen Schritte in der Theorie der Polynomideale. Math. Ann. 95 (1926), no. 1, 736–788.

[5] Sombra, Martín. A sparse effective Nullstellensatz. Adv. in Appl. Math. 22 (1999), no. 2, 271–295.

[6] Tuitman, Jan. A refinement of a mixed sparse effective Nullstellensatz. Int. Math. Res. Not. (2011), no. 7, 1560–1572.