Dominios principales no euclídeos

Nicolás Allo Gómez
Universidad de Buenos Aires, Argentina
nicolas.allo.93@gmail.com

En cualquier curso de Teoría de Números se enseña la importancia que tienen los dominios de factorización única (DFU) a la hora de resolver ecuaciones. Una de las implicaciones básicas al respecto es que todo dominio principal es un DFU. Otro hecho conocido es que todo dominio euclídeo (es decir, un dominio con algoritmo de división) es un dominio principal. Sin embargo, ninguna de estas implicaciones es una equivalencia. Existen infinitos contraejemplos conocidos de DFU que no son principales (por ejemplo, para cualquier A DFU que no sea un cuerpo se tiene que el anillo de polinomios $A[X]$ es un DFU que no es un dominio principal). En cuanto a dominios principales que no son euclídeos, existe un contraejemplo clásico: el anillo de enteros del cuerpo cuadrático $\mathbb{Q}[\sqrt{-19}]$ (ver, por ejemplo, [1]). Otro contraejemplo menos conocido es el anillo $\mathbb{R}[X,Y]/\langle X^2+Y^2+1\rangle$ que encontramos mencionado en [2], con un esbozo de demostración no del todo clara. Recientemente di una demostración más constructiva del resultado esencial que permite probar que el ejemplo anterior es efectivamente un dominio principal, y que usa fuertemente el hecho de que la clausura algebraica de $\mathbb{R}$ es $\mathbb{C}$. En esta comunicación hablaremos sobre una familia más general de contraejemplos que encontramos. Más precisamente, hemos demostrado el siguiente Teorema:

Si K es un cuerpo real, entonces el anillo $K[X,Y]/\langle X^2+Y^2+1\rangle$ es un dominio principal que no es euclídeo.

Trabajo en conjunto con Juan Sabia (Ciclo Básico Común, Universidad de Buenos Aires e IMAS, CONICET-UBA)..

Referencias

[1] Oscar A. Campoli. A Principal Ideal Domain That Is Not a Euclidean Domain. The American Mathematical Monthly, 1988.

[2] Quotient of polynomials, pid but not euclidean domain? https://math.stackexchange.com/questions/864212/quotient-of-polynomials-pid-but-not-euclidean-domain, 2014.