Expansión de Taylor en espacios de Lebesgue con exponente variable

Fabián Eduardo Levis
Universidad Nacional de Río Cuarto, CONICET, FCEFQYN, Argentina
flevis@exa.unrc.edu.ar

Las desigualdades de Taylor son reconocidas desde hace tiempo como herramientas indispensables en el campo del análisis matemático, ofreciendo valiosas perspectivas sobre el comportamiento y la precisión de las aproximaciones polinómicas de Taylor. Estas desigualdades establecen cotas superiores para la discrepancia entre una función y su expansión de Taylor, proporcionando una medida cuantificable del error de aproximación.

Denotamos por $B(x_0, \epsilon)$ el intervalo abierto centrado en $x_0 \in \mathbb{R}$ con radio $\epsilon > 0$. Siguiendo la notación de [1], consideramos el espacio local de Lebesgue con exponente variable $L^{p(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, la clase de exponente variable $P^{\log}_0(\mathbb{R})$ localmente log-Hölder continuo y la norma de Luxemburg promediada en $L^{p(\cdot)}(B(x_0, \epsilon))$

$$\|f\|^{\oslash}_{L^{p(\cdot)}(B(x_0,\epsilon))} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{1}{|B(x_0, \epsilon)|} \int_{B(x_0,\epsilon)} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right)^{p(x)} dx \leq 1 \right\}.$$

En este trabajo, mostramos desigualdades de Taylor en $L^{p(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Más precisamente, damos desigualdades que evalúan el error en la expansión de Taylor de orden ℓ alrededor de x_0, $F_{x_0,\ell}(f)(x) = \sum_{i=0}^{\ell} \frac{1}{i!} D^i f(x_0)(x - x_0)^i$, para funciones en el espacio tipo Sobolev de exponente variable $W^{\ell,p(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, es decir, con derivadas débiles en $L^{p(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, utilizando la norma de Luxemburg promediada sobre $B(x_0, \epsilon)$. Concretamente, demostramos el siguiente:

Teorema (Desigualdad de Taylor): Para $\ell \in \mathbb{N}$ y $p \in P^{\log}_0(\mathbb{R})$ con $\|p\|_\infty < \infty$, existe una constante $\omega_p > 0$ tal que

$$\|\epsilon^{-\ell}(f - F_{x_0,\ell}(f))\|^{\oslash}_{L^{p(\cdot)}(B(x_0,\epsilon))} \leq \omega_p \|D^\ell f - D^\ell f(x_0)\|^{\oslash}_{L^{p(\cdot)}(B(x_0,\epsilon))},$$

para todo $0 < \epsilon < \frac{1}{4}$, $f \in W^{\ell,p(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, y casi todo $x_0 \in \mathbb{R}$.

Como consecuencia, demostramos que una función de tipo Sobolev de exponente variable $W^{\ell,p(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ admite una expansión finita en serie de Taylor en casi todos los puntos de $\mathbb{R}$. Además, damos una aplicación de nuestros resultados en la mejor aproximación en $L^{p(\cdot)}$. Específicamente, probamos que los coeficientes de los polinomios de mejor aproximación en $L^{p(\cdot)}$ a una función de tipo Sobolev variable en $B(x_0, \epsilon)$ convergen a las derivadas débiles de dicha función en x_0 cuando ϵ tiende a cero, para casi todos los puntos $x_0 \in \mathbb{R}$.

Cabe destacar que estos resultados amplían aquellos publicados recientemente en [2] en espacios de tipo Orlicz-Sobolev.

Este trabajo está parcialmente subvencionado por la Universidad Nacional de Río Cuarto (PPI 18/C614-2), Universidad Nacional de La Pampa, Facultad de Ingeniería (Resol. Nro. 203/23) y CONICET (PIP 112-202001-00694CO).

Trabajo en conjunto con Hilde L. Bianchi (Universidad de Buenos Aires), Federico D. Kovac (Universidad Nacional de la Pampa, Facultad de Ingeniería) y Claudia N. Rodríguez (Universidad Nacional de Río Cuarto).

Referencias

[1] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, M. Ruzicka, Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents, Springer, Heidelberg, 2011.

[2] F.D. Kovac, F.E. Levis, Taylor's inequalities in Orlicz-Sobolev type spaces, Math. Nachr. 296 (2023), 1190-1203.