Mejor aproximación y extensión en espacios de Lorentz Gamma

Ludmila Zabala
Universidad Nacional de Río Cuarto, CONICET, FCEFQyN, Argentina
lzabala@exa.unrc.edu.ar

Los espacios de Lorentz, junto con sus numerosas modificaciones y extensiones como los espacios de Lorentz Gamma y los espacios de Orlicz-Lorentz, ocupan una posición central en la teoría de espacios de Banach. Estos espacios son cruciales para la interpolación de operadores lineales y están íntimamente relacionados con las desigualdades ponderadas.

Sean $a \in \mathbb{R}^+$ y L_0 la clase de todas las funciones medibles de Lebesgue que son finitas en casi todo punto sobre $(0, a)$ y que toman valores en la recta extendida $\mathbb{R}^*$. Para $f \in L_0$, denotamos su reordenamiento decreciente por f^* y consideramos el operador de Hardy definido por

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*, \quad t > 0.$$

Sean $p \in \mathbb{R}^+$ y $w : (0, a) \to (0, \infty)$ una función peso integrable según Lebesgue. Para $f \in L_0$, definimos $F_{w,p}(f) = \displaystyle\int_0^a (f^{**})^p w$ y denotamos por $\Gamma_{w,p}$ al espacio de Lorentz Gamma, dado por

$$\Gamma_{w,p} = \{f \in L_0 : F_{w,p}(f) < \infty\}.$$

En estas condiciones se verifica que $\Gamma_{w,p} \subseteq \Gamma_{w,p-1}$ si $1 \leq p < \infty$.

En este contexto, introducimos el operador (multivaluado) de mejor $F_{w,p}$-aproximación $\mathcal{P}^S_{w,p} : \Gamma_{w,p} \to 2^S$ desde subespacios de Haar $S \subset L^\infty$ de dimensión finita para funciones en $\Gamma_{w,p}$, $1 \leq p < \infty$, mediante la condición

$$g \in \mathcal{P}^S_{w,p}(f) \quad \text{si} \quad F_{w,p}(f - g) = \inf_{h \in S} F_{w,p}(f - h).$$

Mostramos que $\mathcal{P}^S_{w,p}(f)$ es no vacío para $1 \leq p < \infty$, y unitario cuando $p > 1$. Utilizando transformaciones que preservan medidas, obtenemos una caracterización de $g \in \mathcal{P}^S_{w,p}(f)$, que permite la extensión de $\mathcal{P}^S_{w,p}$ para funciones en $\Gamma_{w,p-1}$. Además, presentamos propiedades del operador extendido.

Cabe destacar que estos resultados amplían aquellos publicados recientemente en [1,2] en espacios de Orlicz-Lorentz.

Este trabajo está parcialmente subvencionado por la Universidad Nacional de Río Cuarto (PPI 18/C614-2), Universidad Nacional de La Pampa, Facultad de Ingeniería (Resol. Nro. 203/23) y CONICET (PIP 112-202001-00694CO).

Trabajo en conjunto con Federico D. Kovac (Universidad Nacional de la Pampa, Facultad de Ingeniería) y Fabián E. Levis (Universidad Nacional de Río Cuarto, CONICET, FCEFQyN).

Referencias

[1] D.E. Ferreyra, M.I. Gareis, F.E. Levis, Extended Best Polynomial Approximation Operator in Orlicz-Lorentz Spaces, Math. Nachr., 295 (7) (2022) 1292-1311.

[2] M.I. Gareis, F.D. Kovac, F.E. Levis, On a Generalization of the Extended Best Polynomial Approximation Operator in Orlicz-Lorentz Spaces, Math. Nachr., 296 (8) (2023) 3328-3343.