Un teorema ergódico para la media de Karcher en dimensión infinita

Eduardo Ghiglioni
IAM - CMaLP, Argentina
eghiglioni@gmail.com

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert infinito dimensional. En este contexto la métrica natural en $\mathbb{P}$ (operadores positivos), es una métrica de Finsler donde la longitud de una curva suave a trozos $\alpha : [a,b] \to \mathbb{P}$, y $A, B \in \mathbb{P}$, está definida como

$$\mathrm{L}(\alpha) := \int_a^b \|\alpha^{-1/2}(t)\alpha'(t)\alpha^{-1/2}(t)\| \; dt.$$

Usando esta definición de longitud, se puede definir la siguiente distancia

$$d_\infty(A,B) = \text{ínf}\{\mathrm{L}(\alpha) : \ \alpha \text{ es una curva suave a trozos que une } A \text{ con } B\}.$$

Recientemente se extendió la media de Karcher al caso de medidas de probabilidad de operadores positivos en un espacio de Hilbert infinito dimensional. Más presisamente, dada $\mu \in \mathcal{P}^1(\mathbb{P})$, la ecuación de Karcher

$$\int_{\mathbb{P}} X^{1/2} \log(X^{-1/2} A X^{-1/2}) X^{1/2} d\mu(A) = 0,$$

tiene una única solución definida positiva $\Lambda(\mu)$. Llamaremos a dicho solución como la media de Karcher. En esta charla consideraremos un espacio de probabilidad (Ω, μ) y una función totalmente ergódica $\tau : \Omega \to \Omega$. Nuestro objetivo es estudiar un nuevo teorema ergodico para funciones $F \in L^1(\Omega, \mathbb{P})$, donde $\mathbb{P}$ es el cono abierto de operadores estrictamente positivos actuando en un espacio de Hilbert (separable). En este resultado, usaremos las medias inductivas para promediar los elementos de la órbita. A partir de estas medias probaremos que casi seguro estos promedios convergen a la media de Karcher de la medida $F_*(\mu)$.

Trabajo en conjunto con Jorge Antezana (Departamento de Matemática de la Universidad Autónoma de Madrid, España - UNLP, Argentina - IAM, Argentina), Yongdo Lim (Department of Mathematics, Sungkyunkwan University, Suwon, Korea), Miklós Pálfia (Department of Mathematics, Corvinus University of Budapest, Hungary - Bolyai Institute, Interdisciplinary Excellence Centre, University of y Szeged, Hungary).