Wavelets de Haar generalizadas y regularidad Lipschitz de funciones

Juliana Boasso
IMAL-CONICET, Argentina
jboasso@santafe-conicet.gov.ar

Motivados por su aplicación en la construcción y uso de exponentes de tipo Hurst ([6]) para el análisis de dinámicas asociadas al comportamiento del Río Paraná, demostramos en este trabajo algunas desigualdades básicas que completan y extienden los resultados en ([1], [2], [3]). En ([2]) y ([3]) se extienden los resultados en ([5], (ver también [4])). En ([1]), en cambio, se introduce la métrica (ultramétrica) diádica δ adecuada en $\mathbb{R}_+$ para que las wavelets de Haar unidimensionales usuales permitan caracterizar completamente las clases de Lipschitz determinadas por δ en $\mathbb{R}_+$. Esta métrica es la que definimos a continuación en n dimensiones. Ciertas anisotropías en los datos empíricos que nos interesan cuantificar, sugieren que las wavelets definidas por métricas no isótropas como las parabólicas, y algunas de sus variantes, pueden producir mejores indicadores. Enunciamos, sin embargo, el resultado en su versión sencilla asociada al sistema diádico clásico en $\mathbb{R}^n$. Denotemos con $\mathbb{R}^n_+$ al conjunto $\{\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = 1, \cdots, n\}$. Sea $\mathcal{D} = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_j$ siendo $\mathcal{D}_j = \left\{Q_{j,\mathbf{k}} : j \in \mathbb{Z}, \mathbf{k} \in \mathbb{N}^n_0\right\}$ la familia de los cubos diádicos en $\mathbb{R}^n_+$ dados por $Q_{j,\mathbf{k}} = \prod_{i=1}^n [k_i 2^{-j}, (k_i + 1)2^{-j})$. Sean $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ dos puntos en $\mathbb{R}^n_+$, definimos en $\mathbb{R}^n_+$ la ultramétrica $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \inf\{|Q| : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q; Q \in \mathcal{D}\}$. Esto nos permite considerar en el espacio métrico $(\mathbb{R}^n_+, \delta)$ las funciones de clase Lipschitz con exponente $\alpha > 0$. Una función $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ está en $Lip_\delta(\alpha)$ si y sólo si para alguna constante C se tiene la desigualdad $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq C\delta^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_+$.

Teorema. *Sea $\mathcal{H} = \left\{H^\lambda_{j,\mathbf{k}} : j \in \mathbb{Z}; \mathbf{k} \in \mathbb{N}^n_0; \lambda = 1, \cdots, 2^n - 1\right\}$ una base de Haar de $L_2(\mathbb{R}^n_+)$* ([7]). *Entonces una función f, integrable sobre cada $Q \in \mathcal{D}$, pertenece a $Lip_\delta(\alpha), \alpha > 0$ si y sólo si existe una constante $A > 0$ tal que*

$$\left|\left\langle f, H^\lambda_{j,\mathbf{k}}\right\rangle\right| \leq A\left|Q_{j,\mathbf{k}}\right|^{\alpha+\frac{1}{2}} = A2^{-jn(\alpha+\frac{1}{2})},$$

para todo $j \in \mathbb{Z}$, todo $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^n_0$ y todo $\lambda = 1, \cdots, 2^n - 1$.

Trabajo en conjunto con Hugo Aimar (IMAL-CONICET) y Luis Espínola (INALI-CONICET).

Referencias

[1] Aimar H., Arias E. y Gómez I. Haar wavelet characterization of dyadic Lipschitz regularity. Revista de la UMA. 2024. https://doi.org/10.48550/arXiv.2403.00677.

[2] Aimar H. y Bernardis A. Fourier versus wavelets: a simple approach to Lipschitz regularity. Rev. UMA, vol. 40, no. 1-2, pp. 219-224, 1996.

[3] Aimar H, Bernardis A, Nowak L. Haarlet analysis of Lipschitz regularity in metric measure spaces. Sci China Math, 2012, 55(5): 967–975. https://doi.org/10.1007/s11425-012-4367-1.

[4] Daubechies, I. Ten Lectures on Wavelets. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992.

[5] Holschneider M. y Tchamitchian P. Regularite locale de la fonction 'non-differentiable' de Riemann. Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen. Springer Verlag. pp. 102-124, 1990.

[6] Hurst H. Long-term storage capacity of reservoirs. Transactions of the American Society of Civil Engineers, 116:770–808, 1951.

[7] Wojtaszczyk P. A Mathematical introduction Of Wavelets. London Mathematical Society Students Texts, 1997. https://doi.org/10.1017/CBO9780511623790.