Interacciones de Orden Superior

Joaquín Toledo
IMAL-CONICET, Argentina
joaquintoledo@santafe-conicet.gov.ar

La teoría clásica de campos parte del potencial de Newton como recíproco de la métrica de Euclides. Este núcleo $\frac{1}{d(x,y)}$ induce por integración, en la variable y, el potencial generado por una densidad $f(y)$, produciendo así un operador lineal. Cuando esta idea se extiende a interacciones de orden superior a dos, una forma análoga de potencial produciría un operador multilineal, o un tensor de orden mayor que dos. Esta mirada induce la consideración de "atracciones" o "afinidades" de orden superior y nociones de "métricas" en grupos de elementos de cardinal mayor que dos. Nos limitaremos aquí al caso de grupos de tres elementos.

Precisemos: Si X es un conjunto y $\mathbf{d} : X^3 = X \times X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ es una función que vale cero en la diagonal Δ_3 de X^3 y solo sobre ella, que es invariante por permutaciones σ de $\{1, 2, 3\}$, es decir $\mathbf{d}(\sigma(x_1, x_2, x_3)) = \mathbf{d}(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}) = \mathbf{d}(x_1, x_2, x_3)$ y satisface una desigualdad del tipo

$$\mathbf{d}(x_1, x_2, x_3) \leq K \operatorname{máx}\{\mathbf{d}(x_1, x_2, u), \mathbf{d}(x_1, x_3, u), \mathbf{d}(x_2, x_3, u)\}$$

para todos $u, x_1, x_2, x_3 \in X$, entonces decimos que $\mathbf{d}$ es una cuasi-métrica de orden tres. En [1] se prueba que una noción de atracción o afinidad transitiva a entre pares de elementos de X siempre tiene una estructura Newtoniana $a = \varphi(d)$ con φ convexa y d cuasi-métrica en X.

En este trabajo estudiamos el problema de casi-metrización de afinidades de tercer orden. Ilustramos la técnica en conjuntos de series temporales de EEG (Electroencefalografía) en neurociencias. El resultado principal se resume en el siguiente enunciado:

Teorema: Sea X un conjunto. Sea $\mathbf{a} : X^3 \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, una afinidad de tercer orden, es decir:

(a.1) $\mathbf{a} \circ \sigma = \mathbf{a}$ si $\sigma(x_1, x_2, x_3) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)})$ y σ es permutación de $\{1, 2, 3\}$;

(a.2) $\mathbf{a}(\overline{x}) = +\infty$ si y solo si $\overline{x} \in \Delta_3 \quad (x_1 = x_2 = x_3)$;

(a.3) Si $\mathbf{a}(x_1, x_2, u) > \lambda$, $\mathbf{a}(x_1, u, x_3) > \lambda$ y $\mathbf{a}(u, x_2, x_3) > \lambda$ entonces $\mathbf{a}(x_1, x_2, x_3) > \frac{\lambda}{C}$ para alguna constante $C > 1$ y todo $\lambda > 0$.

Entonces, si $\mathcal{V}(r) = \{\overline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in X^3 : \mathbf{a}(\overline{x}) > \frac{1}{r}\}$, y $\mathcal{V}^{(3)} = \{(x_1, x_2, x_3) : \exists v \in X/(x_1, x_2, v) \in \mathcal{V}, (x_1, x_3, v) \in \mathcal{V}, (x_2, x_3, v) \in \mathcal{V}\}$ se tiene que

($\mathcal{V}_1$) $\mathcal{V}(r_1) \subseteq \mathcal{V}(r_2)$, $\infty > r_2 > r_1 > 0$;

($\mathcal{V}_2$) $\sigma(\mathcal{V}(r)) = \mathcal{V}(r)$, para toda σ y para todo $r > 0$;

($\mathcal{V}_3$) $\bigcup_{r>0} \mathcal{V}(r) = X^3$;

($\mathcal{V}_4$) $\bigcap_{r>0} \mathcal{V}(r) = \Delta_3$;

($\mathcal{V}_5$) existe $K \geq 1 : (\mathcal{V}(r))^{(3)} \subseteq \mathcal{V}(Kr)$, para todo $r > 0$;

y la función $\mathbf{d}(x_1, x_2, x_3) = \operatorname{ínf}\{r > 0 : \overline{x} \in \mathcal{V}(r)\}$ es una casi-métrica de orden tres con la que $\mathbf{a}$ tiene estructura Newtoniana, es decir $\mathbf{a} \simeq \frac{1}{\mathbf{d}^\alpha}$ para algún $\alpha > 0$.

La idea subyacente proviene de la aplicación que hacen Macías y C. Segovia en [4] del Lema de metrización de Huke Frink [2] , [3] de uniformidades con bases numerables.

Trabajo en conjunto con Hugo Aimar (IMAL-CONICET) y Ivana Gómez (IMAL-CONICET).

Referencias

[1] H. Aimar and I. Gómez. Affinity and distance. On the Newtonian structure of some data kernels. Analysis and Geometry in Metric Spaces, 6(1):89–95, 2018

[2] A. Huke Frink. Distance functions and the metrization problem. Bull. Amer. Math. Soc., 43(2):133–142, 1937.

[3] J. L. Kelley. General topology. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1975. Reprint of the 1955 edition [Van Nostrand, Toronto, Ont.], Graduate Texts in Mathematics, No. 27

[4] R. A. Macías and C. Segovia. Lipschitz functions on spaces of homogeneous type. Adv. in Math., 33(3):257–270, 1979.