Conjuntos débilmente porosos y pesos de la clase A_1 de Muckenhoupt en espacios de tipo homogéneo

Ignacio Javier Gómez Vargas
Instituto de Matemática Aplicada del Litoral (CONICET - UNL). Santa Fe, Argentina
ignaciogomez@santafe-conicet.gov.ar

En este trabajo, extendemos los conceptos de porosidad débil y de duplicación de la función de poro maximal, introducidos por Mudarra ([1]) en espacios métricos, y probamos su equivalencia con la pertenencia de $d(\cdot, E)^{-\alpha}$ a la clase A_1 para algún $\alpha > 0$. Nuestra demostración extiende los resultados de [1, 2] y también provee un nuevo enfoque basado en una construcción de R. Macías y C. Segovia en "*A Well Behaved Quasi-distance for Spaces of Homogeneous Type*" ([3]).

Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo (ETH) tal que las d-bolas son conjuntos abiertos. Denotamos con K a la constante triangular óptima para d en X, es decir, $d(x, z) \leq K(d(x, y) + d(y, z))$ para todo $x, y, z \in X$ y K es el mínimo número real positivo con esta propiedad. Dado E, un subconjunto no vacío de X, consideramos la colección $\Lambda(x, r; d, E) = \{s \in (0, 2Kr) : \exists y \in X \text{ tal que } B(y, s) \subset B(x, r) \setminus E\}$. El supremo de $\Lambda(x, r; d, E)$ mide el radio del poro maximal en $B(x, r)$ con respecto a E. La función que a cada bola $B(x, r)$ le asigna ese supremo, $\rho_E(B(x, r)) = \sup \Lambda(x, r; d, E)$, se denomina "función de poro maximal". Un conjunto $E \subset X$ distinto de vacío es débilmente poroso si existen $\sigma, \gamma \in (0, 1)$ tales que para toda d-bola B en X se tiene que existe un número finito $N = N(B)$ de bolas $\{B(x_i, r_i)\}_{i=1}^N$ tales que: (i) $B(x_i, r_i) \cap B(x_j, r_j) = \emptyset$ para $i \neq j$ y $B(x_i, r_i) \subset B \setminus E$ para todo $1 \leq i \leq N$; (ii) $r_i \geq \gamma \rho_E(B)$ para todo $i = 1, ..., N$ y (iii) $\sum_{i=1}^N \mu(B(x_i, r_i)) \geq \sigma \mu(B)$.

En lo que respecta a las clases de pesos de Muckenhoupt, éstas se encuentran bien definidas en ETH ([4, 5]). En particular, una función real no negativa localmente integrable w definida en X es un peso de $A_1(X, d, \mu)$ si existe una constante $C > 0$ tal que la desigualdad $\frac{1}{\mu(B)} \int_B w d\mu \leq C \operatorname{ess\,inf}_B w$ vale para toda bola B en (X, d). Con esto, el resultado principal puede enunciarse de la siguiente manera.

Teorema. *Sea (X, d, μ) un ETH tal que toda bola es un conjunto abierto y sea $E \subset X$ no vacío. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(I) *E es débilmente poroso y ρ_E es duplicante;*

(II) *existe $\alpha > 0$ tal que $d(\cdot, E)^{-\alpha} \in A_1(X, d, \mu)$, donde $d(x, E) := \inf\{d(x, e) : e \in E\}$ para todo $x \in X$.*

La propiedad de duplicación de ρ_E significa que existe una constante $C(E)$ tal que $\rho_E(B(x, 2r)) \leq C(E)\rho_E(B(x, r))$ para todo $x \in X$ y todo $r > 0$. Los resultados de esta comunicación están contenidos en [6].

Trabajo en conjunto con Hugo Aimar (IMAL) y Ivana Gómez (IMAL).

Referencias

[1] Carlos Mudarra. Weak porosity on metric measure spaces, 2024. arXiv 2306.11419.

[2] Theresa C. Anderson, Juha Lehrbäck, Carlos Mudarra, and Antti V. Vähäkangas. Weakly porous sets and Muckenhoupt A_p distance functions, 2022. arXiv 2209.06284.

[3] Roberto Macías and Carlos Segovia. A well behaved quasi-distance for spaces of homogeneous type. Trabajos de Matemática IAM, 32:1–18, 1981.

[4] Hugo Aimar and Roberto A. Macías. Weighted norm inequalities for the Hardy-Littlewood maximal operator on spaces of homogeneous type. Proceedings of the American Mathematical Society, 91(2):213–213, February 1984.

[5] A. Calderón. Inequalities for the maximal function relative to a metric. Studia Mathematica, 57(3):297–306, 1976.

[6] Hugo Aimar, Ivana Gómez, and Ignacio Gómez Vargas. Weakly porous sets and A_1 Muckenhoupt weights in spaces of homogeneous type, 2024. arXiv 2406.14369, IMAL Preprints.