Multiplicadores de Haar, distancias diádicas y operadores de Calderón-Zygmund en el contexto bilineal en espacios de tipo homogéneo.

Luis Nowak
Departamento de Matemática(FaEA,Universidad Nacional del Comahue) y Instituto de Investigaciones en Tecnología y Ciencias de la Ingeniería (IITCI) CONICET, Argentina
luisenlitoral@yahoo.com.ar

En este trabajo abordamos el estudio de operadores de tipo multiplicadores de Haar bilineal en el contexto de espacios de tipo homogéneo. Si (X, d, μ) es un espacio de tipo homogéneo, D es una familia diádica y H es un sistema de Haar asociado, entonces estudiamos operadores de la forma

$$T_\eta^0(f,g)(x) = \sum_{Q\in D} \sum_{\substack{h_i\in H\\ h_i\in H(Q)\\ i=1,2,3}} \eta(x,Q)\langle f, h_1\rangle\langle g, h_2\rangle h_3(x),$$

$$T_\eta^1(f,g)(x) = \sum_{Q\in D} \sum_{\substack{h\in H\\ h\in H(Q)}} \eta(x,Q)\langle f, h\rangle\langle g, h\rangle \frac{\chi_Q(x)}{\mu(Q)},$$

$$T_\eta^2(f,g)(x) = \sum_{Q\in D} \sum_{\substack{h\in H\\ h\in H(Q)}} \eta(x,Q)\left\langle f, \frac{\chi_Q}{\mu(Q)}\right\rangle\langle g, h\rangle h(x),$$

$$T_\eta^3(f,g)(x) = \sum_{Q\in D} \sum_{\substack{h\in H\\ h\in H(Q)}} \eta(x,Q)\langle f, h\rangle\left\langle g, \frac{\chi_Q}{\mu(Q)}\right\rangle h(x),$$

donde $H(Q)$ es el conjunto de todas las funciones de Haar con soporte Q.

Más precisamente, estudiamos condiciones sobre la función η que impliquen que los operadores anteriores resulten estar asociados a núcleos de Calderón-Zygmund en el sentido de tener una representación integral con un núcleo con buenas propiedades de acotación y regularidad.

Dada la naturaleza diádica de las funciones de Haar, consideramos métricas asociadas a familias diádicas como sustituto natural de la métrica euclídea. Así, las funciones de Haar resultan ser de tipo Lipschitz en este contexto con métrica diádica. Esta condición de regularidad de las funciones de Haar, sumada a una hipótesis similar sobre la función η permite probar que los operadores T_η^i con $i = 0, 1, 2, 3$ son operadores bilineales de Calderón-Zygmund en el espacio métrico (X, δ, μ) donde δ es la métrica diádica asociada a la familia diádica D. Tales resultados se resumen en el siguiente enunciado.

Teorema: Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo, D una familia diádica y H un sistema de Haar asociado. Sea δ la métrica diádica inducida por la familia diádica D. Sea $\eta : X \times D \to \mathbb{R}$ una función que es medible en $x \in X$ para cada $Q \in D$. Entonces

1) si existe una constante positiva B tal que $|\eta(x,Q)| \leq \frac{B}{\mu(Q)^{1/2}}$ for $x \in X$, $Q \in D$ y $|\eta(x,Q) - \eta(x',Q)| \leq B\dfrac{\delta(x,x')}{\mu(Q)^{3/2}}$ for $Q \in D$ and $x, x' \in X$ entonces la función

$$K(x,y,z) = \sum_{Q\in D} \sum_{\substack{h_i\in H(Q)\\ i=1,2,3}} \eta(x,Q) h_1(y) h_2(z) h_3(x)$$

es un núcleo δ-bilineal de Calderón-Zygmund sobre (X, δ, μ).

2) si existe una constante positiva B tal que $|\eta(x,Q)| \leq B$ for $x \in X$, $Q \in D$ y $|\eta(x,Q) - \eta(x',Q)| \leq B\dfrac{\delta(x,x')}{\mu(Q(h))^{1/2}}$ for $Q \in D$ and $x, x' \in X$ entonces las funciones

$$K_1(x,y,z) = \sum_{Q\in D} \sum_{\substack{h_i \in H(Q)\\ i=2,3}} \eta(x,Q)\chi_Q(y)h_2(z)h_3(x),$$

$$K_2(x,y,z) = \sum_{Q\in D} \sum_{\substack{h_i \in H(Q)\\ i=1,3}} \eta(x,Q)h_1(y)\chi_Q(z)h_3(x),$$

$$K_3(x,y,z) = \sum_{Q\in D} \sum_{\substack{h_i \in H(Q)\\ i=1,2}} \eta(x,Q)h_1(y)h_2(z)\chi_Q(x),$$

son núcleos δ-bilineal de Calderón-Zygmund sobre (X, δ, μ).

3) si existe una constante positiva B tal que $|\eta(x,Q)| \leq B$ for $x \in X$, $Q \in D$ y $|\eta(x,Q) - \eta(x',Q)| \leq B\dfrac{\delta(x,x')}{\mu(Q(h))^{1/2}}$ for $Q \in D$ and $x, x' \in X$ entonces los operadores T^2_η y T^3_η son acotados de $L^4(X) \times L^4(X)$ en $L^2(X)$. Así, T^2_η y T^3_η son operadores bilineales de Calderón-Zygmund.

Como aplicación, consideramos los operadores

$$S^{i,j,k}(f,g) = \sum_{L\in D^+} A^{i,j,k}_L(f,g),$$

con

$$A^{i,j,k}_L(f,g) = \sum_{\substack{I\in D_i(L)\\ J\in D_j(L)\\ K\in D_k(L)}} \alpha_{I,J,K,L}\langle f, \tilde{h}_I\rangle\langle g, \tilde{h}_J\rangle h_K,$$

donde $D_m(L)$ es el conjunto de todos los subintervalos diádicos del intervalo diádico L tal que $|Q| = 2^{-m}|L|$ para $m \in \mathbb{N}$, $|\alpha_{I,J,K,L}| \leq \frac{(|I||J||K|)^{1/2}}{|L|^2}$ y el par $(\tilde{h}_I, \tilde{h}_J) \in \left\{(h_I, h_J), (\frac{\chi_I}{|I|}, h_j), (h_I, \frac{\chi_J}{|J|})\right\}$. Estos operadores juegan un rol central en la teoría de representación de operadores de Calderón-Zygmund bilineales como se muestra en el trabajo BILINEAR REPRESENTATION THEOREM de Kangwei Li, Henri Martikainen, Yumeng Ou, Emil Vuorinen. Las técnicas utilizadas y los resultados obtenidos en nuestro trabajo permiten probar que tales operadores $S^{i,j,k}$ resultan ser operadores bilineales de Calderón-Zygmund cuando consideramos la métrica diádica asociada a la familia diádica usual en el contexto euclídeo.

Trabajo en conjunto con Raquel Crescimbeni (IITCI, Dpto Matemática-FaEA-UNComa) y Claire Huang (Saint Louis University, EEUU).

Referencias

[1] H. Aimar, A. Bernardis and B. Iaffei. Multiresolution approximation and unconditional bases on weighted Lebesgue spaces on spaces of homogeneous type, J. Approx. Theory, 148 (2007) 12–34.

[2] H. Aimar and I. Gómez. On the Calderón-Zygmund structure of Petermichl's kernel, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser.I 356 (2018) 509–516.

[3] H. Aimar, R. Crescimbeni y L. Nowak. Singular Integrals with Variable Kernels in Dyadic Settings. Acta Mathematica Sinica, English Series. Volume 39, pages 1565–1579, (2023)