Espacios de tipo John-Nirenberg gaussianos

Estefanía Dafne Dalmasso
IMAL (CONICET-UNL) - FIQ (UNL), Argentina
dafnedalm@gmail.com

En [3], John y Nirenberg introdujeron el bien conocido espacio $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)$ de funciones de oscilación media acotada, pero también consideraron una variante de la condición BMO. Esta otra condición es la conduce a la definición de los llamados espacios de John-Nirenberg, JN_p para $p \in (1, \infty)$.

Dado un cubo Q_0 en $\mathbb{R}^d$ y $p \in (1, \infty)$, una función $f \in L^1(Q_0)$ se dice que pertenece a $\mathrm{JN}_p(Q_0)$ cuando la cantidad

$$\|f\|_{\mathrm{JN}_p(Q_0)} = \sup \left(\sum_i |Q_i| \left(\frac{1}{|Q_i|} \int_{Q_i} |f - f_{Q_i}| dx \right)^p \right)^{1/p}$$

es finita, donde el supremo se toma sobre todas las familias numerables de cubos $\{Q_i\}_{i=1}^{\infty}$ que son disjuntos dos a dos y están contenidos en Q_0. Aquí, $f_{Q_i} = \frac{1}{|Q_i|} \int_{Q_i} f dx$.

Similarmente, una función $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ pertenece a $\mathrm{JN}_p(\mathbb{R}^d)$ cuando $\|f\|_{\mathrm{JN}_p(\mathbb{R}^d)}$ es finita, siendo $\|\cdot\|_{\mathrm{JN}_p(\mathbb{R}^d)}$ definida análogamente, sobre $\mathbb{R}^d$ en lugar de Q_0.

Los espacios JN_p fueron considerados en la teoría de interpolación por Stampacchia [5] y Campanato [1]. En la última década, se han publicado diversos trabajos sobre los espacios de John-Nirenberg, como por ejemplo los de tipo diádicos en [4], los de John-Nirenberg-Campanato en [7], versiones localizadas de JN_p en [6], y de tipo sparse en [2], entre otros. También surgen nuevas definiciones de espacios JN_p cuando los cubos se reemplazan por otros conjuntos en espacios métricos con medida más generales, los cuales dependen de las propiedades de solapamiento que poseen estos conjuntos.

Además, se sabe que $L^p \subset \mathrm{JN}_p \subset L^{p,\infty}$, y que ambas contenciones son estrictas, por lo que los espacios JN_p son espacios intermedios entre los clásicos espacios de Lebesgue y su versión débil.

En esta charla introduciremos los espacios de John-Nirenberg $\mathrm{JN}_p(\mathbb{R}^d, \gamma)$, siendo $d\gamma(x) = \pi^{-d/2} e^{-|x|^2} dx$ la medida gaussiana en $\mathbb{R}^d$ y $p \in (1, \infty)$. Las familias de cubos admisibles, esto es, aquellas donde la medida gaussiana resulta doblante, serán claves en la definición de estos espacios. Veremos algunas propiedades de los mismos, y comentaremos sobre un resultado de dualidad para $\mathrm{JN}_p(\mathbb{R}^d, \gamma)$.

Trabajo en conjunto con Jorge J. Betancor (Universidad de La Laguna, España) y Pablo Quijano (IMAL (CONICET-UNL) - FIQ (UNL), Argentina).

Referencias

[1] Campanato, S. Su un teorema di interpolazione di G. Stampacchia. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (3) 20 (1966), 649–652.

[2] Domínguez, O., and Milman, M. Sparse Brudnyi and John-Nirenberg spaces. C. R. Math. Acad. Sci. Paris 359 (2021), 1059–1069.

[3] John, F., and Nirenberg, L. On functions of bounded mean oscillation. Comm. Pure Appl. Math. 14 (1961), 415–426.

[4] Kinnunen, J., and Myyryläinen, K. Dyadic John-Nirenberg space. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 153, 1 (2023), 1–18.

[5] Stampacchia, G. The spaces $\mathcal{L}^{(p,\lambda)}$, $N^{(p,\lambda)}$ and interpolation. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (3) 19 (1965), 443–462.

[6] Sun, J., Xie, G., and Yang, D. Localized John-Nirenberg-Campanato spaces. Anal. Math. Phys. 11, 1 (2021), Paper No. 29, 47.

[7] Tao, J., Yang, D., and Yuan, W. John-Nirenberg-Campanato spaces. Nonlinear Anal. 189 (2019), 111584, 36.