Desigualdades de tipo Hermite-Hadamard utilizando diferentes nociones de convexidad

Paulo Matias Guzmán
Universidad Nacional del Nordeste - Facultad de Ciencias Agrarias , Argentina
paulo.guzman@comunidad.unne.edu.ar

En este trabajo, estudiamos y exploramos una clase de desigualdades integrales de Hermite-Hadamard utilizando diferentes nociones de convexidad a través de integrales ponderadas. La desigualdad de Holder será importante ya que se utiliza para crear esta clase, que tiene diversas aplicaciones en la teoría de optimización. También estudiamos ciertas desigualdades de tipo trapezoidal y estimaciones de error de punto medio.

Debido a sus múltiples aplicaciones dentro y fuera de la matemática, las funciones convexas tienen un rol destacado en Matemática.

Se dice que una función $f : I \to \mathbb{R}$, $I := [a, b]$ es convexa si

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leq \lambda\psi(x) + (1-\lambda)\psi(y), \tag{1}$$

para todo $x, y \in I$ y $\lambda \in [0, 1]$. Si se invierte la desigualdad última, entonces la función f es cóncava en dicho intervalo.

En el marco de las funciones convexas, una de las desigualdades más conocidas es la de Hermite-Hadamard. Para cierta función convexa f, en el intervalo $[a, b]$, se cumple que,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int {}_{a}^{b} f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{2}$$

Algunas de las nociones de convexidad que utilizaremos en este trabajo, para una función convexa f, son:

Sea $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función no negativa, $h \neq 0$ y $f : I = [0, +\infty) \to [0, +\infty)$. Si la desigualdad

$$f\left(t\xi + m(1-t)\varsigma\right) \leq h^s(t)f(\xi) + m(1-h^s(t))f\left(\frac{\varsigma}{m}\right) \tag{3}$$

se cumple para todo $\xi, \varsigma \in I$ y $t \in [0, 1]$, donde $m \in [0, 1]$, $s \in [-1, 1]$, entonces la función f se llama (h, m)-convexa modificada del primer tipo en I.

Análogamente, tenemos:

Sea $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función no negativa, $h \neq 0$ y $f : I = [0, +\infty) \to [0, +\infty)$. Si se cumple la desigualdad

$$f\left(t\xi + m(1-t)\varsigma\right) \leq h^s(t)f(\xi) + m(1-h(t))^s f\left(\frac{\varsigma}{m}\right) \tag{4}$$

para todo $\xi, \varsigma \in I$ y $t \in [0, 1]$, donde $m \in [0, 1]$, $s \in [-1, 1]$, entonces la función f se llama (h, m)-convexa modificada del segundo tipo en I.

A partir de las nociones de convexidad previas, se deducen resultados que involucran otras nociones, por ejemplo, funciones m-convexas, s-convexas.

En los resultados, también será importante el uso de la función Beta. Ésta es una función especial relacionada fuertemente con la función gamma y los coeficientes binomiales. Se la define de la siguiente manera,

$B(x, y) = \int_0^1 s^{x-1}(1-s)^{y-1}ds$, donde $R(x) > 0$ y $R(y) > 0$.

Los operadores generalizados que utilizamos en nuestro trabajo son del tipo:

Sean $\alpha > 0$, y $\alpha \neq 1, 2, 3, \ldots$, $n = [\alpha] + 1$, $f \in AC^n[a, b]$, el espacio de funciones que tienen las n-ésimas derivadas absolutamente continuas. Las derivadas fraccionarias de Caputo del lado derecho y del lado izquierdo de orden α se definen de la siguiente manera:

$\left({}^C D_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, x > a$

$\left({}^C D_{b-}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{f^{(n)}(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}, b > x.$

Sean $\alpha > 0$, y $\alpha \neq 1, 2, 3, \ldots$, $n = [\alpha] + 1$, $f \in AC^n[a, b]$, el espacio de funciones que tienen las n-ésimas derivadas absolutamente continuas. Las k-derivadas fraccionarias de Caputo del lado derecho y del lado izquierdo de orden α se definen de la siguiente manera:

$\left({}^C D_{a+}^{\alpha,k} f\right)(x) = \frac{1}{k\Gamma_k(n-\frac{\alpha}{k})} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)dt}{(x-t)^{\frac{\alpha}{k}-n+1}}, x > a$

$\left({}^C D_{b-}^{\alpha,k} f\right)(x) = \frac{(-1)^n}{k\Gamma_k(n-\frac{\alpha}{k})} \int_x^b \frac{f^{(n)}(t)dt}{(t-x)^{\frac{\alpha}{k}-n+1}}, b > x.$

En este trabajo obtenemos nuevas desigualdades integrales, en el marco de funciones con diferentes nociones de convexidad, utilizando integrales ponderadas.

Referencias

[1] G. Farid, A. Javed, A. U. Rehman, M. I. Qureshi, On Hadamard-type inequalities for differentiable functions via Caputo k-fractional derivatives, Cogent Mathematics (2017), 4: 1355429 https://doi.org/10.1080/23311835.2

[2] F. Jarad, T. Abdeljawad, T. Shah, ON THE WEIGHTED FRACTIONAL OPERATORS OF A FUNCTION WITH RESPECT TO ANOTHER FUNCTION, Fractals, Vol. 28, No. 8 (2020) 2040011 (12 pages) DOI: 10.1142/S0218348X20400113

[3] T. U. Khan, M. A. Khan, Generalized conformable fractional integral operators, J. Comput. Appl. Math. 2019, 346, 378-389.

[4] J. E. Nápoles Valdes, A Review of Hermite-Hadamard Inequality, Partners Universal International Research Journal (PUIRJ), Volume: 01 Issue: 04 October-December 2022, 98-101 DOI:10.5281/zenodo.7492608

[5] J. E. Nápoles Valdés, F. Rabossi, A. D. Samaniego, Convex functions: Ariadne's thread or Charlotte's spiderweb?, Advanced Mathematical Models & Applications Vol.5, No.2, 2020, pp.176-191