Concentración de grafos con métricas y atributos aleatorios alrededor del grafo medio

Exequiel Arias
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Catamarca, UNCa, Argentina
exearias01@gmail.com

Un grafo no dirigido, ponderado en las aristas y con atributos en los vértices es una 4-upla $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \bar{a}, W)$ donde $\mathcal{V} = \{1, ..., n\}$ son los vértices, $\mathcal{E} = \{\{i, j\} : i \neq j \in \mathcal{V}\}$ son las aristas, $\bar{a} = (a_1, ..., a_n)$ son los pesos en los vértices con $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ y $a_i > 0$ para todo $i \in \mathcal{V}$ y $W = (w_{ij})_{i,j=1,...,n}$, $w_{ij} = w_{ji}$, $w_{ii} = 0$ y $w_{ij} \geq 0$ son ponderaciones de las aristas que pueden representar una métrica entre los vértices i y j. Esta métrica depende de la elección inicial de atributos $\bar{a}$ de los vértices y ponderaciones W de las aristas. Por otra parte la elección inicial suele ser intrínsecamente aleatoria. Por consiguiente, en vez de un grafo $\mathcal{G}$ tenemos variables aleatorias valuadas en grafos, $\mathcal{G}_\omega$. En este trabajo, usando la teoría de Cramér-Chernoff [1] y el Lema de Hoeffding [2], estudiamos la convergencia a cero cuando t tiende a infinito de las probabilidades de "lejanía" entre $\mathcal{G}_\omega$ y $\mathbb{E}(\mathcal{G})$ definido por las medias de $\bar{a}(\omega)$ y $W(\omega)$, precisamente

$$\mathcal{P}(\{\omega \in \Omega : \mathbf{d}(\mathcal{G}_\omega, \mathbb{E}(\mathcal{G})) > t\}).$$

Resulta claro que una buena definición de distancia entre grafos ponderados con atributos se hace necesaria. Para esta definición, que va a resultar ser una casi-métrica, primero consideramos la distancia entre espacios métricos desde el enfoque de Gromov-Lipschitz [3] y las distancias entre medidas probabilísticas de Kantorovich-Rubinstein [4].

Sean (X, d, μ) e (Y, δ, ν) dos espacios métricos con μ y ν probabilidades borelianas. Sea $\Lambda = \{f : (X, d) \to (Y, \delta)\ bi-Lipschitz\}$ y, si $\Lambda \neq \emptyset$, para cada $f \in \Lambda$ definimos las medidas probabilísticas $\tilde{\mu}_f = \nu \circ f$ y $\tilde{\nu}_f = \mu \circ f^{-1}$. Sea ρ_X una distancia entre medidas probabilísticas en X y ρ_Y una distancia entre medidas probabilísticas en Y. Definimos la distancia de **Gromov-Lipschitz** con ρ_X y ρ_Y entre (X, d, μ) e (Y, δ, ν) como

$$d_{GL}^{\rho_X \rho_Y}((X, d, \mu), (Y, \delta, \nu)) = \inf_{f \in \Lambda} \{|\log dil(f)| + |\log dil(f^{-1})| + \rho_X(\mu, \tilde{\mu}_f) + \rho_Y(\nu, \tilde{\nu}_f)\}$$

donde $dil(f) = \sup_{x_1 \neq x_2} \frac{\delta(f(x_1), f(x_2))}{d(x_1, x_2)}$ es el coeficiente de dilatación de f.

Para esta cantidad $d_{GL}^{\rho_X \rho_Y}$, probamos propiedades métricas básicas. Luego restringimos la familia de espacios y consideramos que ρ_X y ρ_Y son métricas de Kantorovich-Rubinstein en cada espacio, obtenemos una definición de casi-métrica $d_{GL}^{KR}((X, d, \mu), (Y, \delta, \nu))$.

Trabajo en conjunto con Hugo Aimar (IMAL, CONICET, UNL, CCT CONICET Santa Fe, Argentina) e Ivana Gómez (IMAL, CONICET, UNL, CCT CONICET Santa Fe, Argentina)..

Referencias

[1] Stéphane Boucheron, Gábor Lugosi, and Pascal Massart, "Concentration inequalities", Oxford University Press, Oxford, 2013, A nonasymptotic theory of independence, With a foreword by Michel Ledoux.

[2] Wassily Hoeffding. "Probability inequalities for sums of bounded random variables."J. Amer. Statist. Assoc., 58:13–30, 1963.

[3] Misha Gromov, "Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces", Progress in Mathematics, vol. 152, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1999, Based on the 1981 French original.

[4] Cédric Villani. "Optimal transport. Old and new." Grundlehren Math. Wiss., 338[Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer-Verlag, Berlin, 2009.