Aproximación por elementos finitos del problema de Navier-Stokes estacionario con dato de borde no suave

Mauricio Mendiluce
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UBA - IMAS, CONICET, Argentina
mauricio.mendiluce@gmail.com

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio acotado con borde Lipschitz, consideramos las ecuaciones estacionarias de Navier-Stokes dadas por:

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \Omega \\ \nabla\cdot\mathbf{u} &= 0 \quad \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{g} \quad \partial\Omega \end{aligned} \tag{1}$$

donde $\nu > 0$ es la viscosidad del fluido y $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ son funciones dadas. Es sabido que si consideramos $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ y $\mathbf{g} \in \mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)$, con $\int_{\partial\Omega} \mathbf{g}\cdot\mathbf{n} = 0$, la teoría clásica [5] nos asegura existencia de solución $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times L^2_0(\Omega)$. En este trabajo analizaremos la aproximación por elementos finitos de las ecuaciones estacionarias de Navier-Stokes con condición de Dirichlet no suave, i.e., $\mathbf{g} \in L^2(\partial\Omega)$, extendiendo así los resultados obtenidos en [1] para el problema de Stokes. La no linealidad de las ecuaciones de Navier-Stokes introduce una dificultad adicional, la cual impide generalizar directamente esos resultados.

En [4] se demuestra la existencia de solución para el problema de Navier-Stokes con dato de borde $\mathbf{g} \in L^2(\partial\Omega)$ bajo el concepto de *"very weak solution"*. Por otra parte, consideramos el problema (1) pero con un dato $\mathbf{g}_\varepsilon \in \mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ que aproxime a $\mathbf{g}$ en norma $\mathbf{L}^2(\partial\Omega)$. Para obtener nuestras estimaciones, descomponemos la solución de (1) como suma de dos funciones, una no regular (que resuelve un problema de Navier-Stokes con dato de frontera igual a la diferencia entre $\mathbf{g}$ y su aproximante $\mathbf{g}_\varepsilon$) y otra regular que resuelve un problema similar al de Navier-Stokes (con términos adicionales consecuencia de la no linealidad del problema). Esta descomposición nos permite medir el error de aproximación, en alguna norma apropiada, entre la solución del problema (1) y la solución del mismo problema pero con dato de Dirichlet $\mathbf{g}_\varepsilon$.

Resolvemos el problema discreto asociado al problema (1) con dato regular utilizando distintos métodos de elementos finitos estables [2,3] y probamos estimaciones a priori del error de aproximación. Estos resultados permiten concluir la convergencia del método propuesto con un orden que depende de la aproximación de los datos de frontera. Finalmente, presentamos algunas pruebas numéricas de la resolución del denominado *"cavity flow problem"*, el cual es considerado un clásico *benchmark* para este tipo de problemas.

Trabajo en conjunto con María Gabriela Armentano (Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UBA - IMAS, CONICET, Argentina).

Referencias

[1] R. Durán, L. Gastaldi, and A. Lombardi. Analysis of finite element approximations of stokes equations with nonsmooth data. SIAM J. Numer. Anal., 58(6):3309–3331, 2020.

[2] M. D. Gunzburger and J. S. Peterson. On conforming finite element methods for the inhomogeneous stationary navier-stokes equations. Numerische Mathematik,.(42):173–194, 1983.

[3] K. Wang. Iterative schemes for the non-homogeneous navier-stokes equations based on the finite element approximation. Computers and Mathematics with Applications, 71(1):120–132, 2016.

[4] E. Marusic Paloka. Solvability of the navier–stokes system with L2 boundary data. Appl Math Optim,.(41):365–375, 2000.

[5] R. Temam. Navier-Stokes equations theory and numerical analysis. North-Holland Publishing Company, 1977.