Estimaciones de error a posteriori para la aproximación hp de elementos finitos de un problema de vibraciones fluido-estructura en dominios curvos

María Gabriela Armentano
Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, IMAS - CONICET, Buenos Aires, Argentina
garmenta@dm.uba.ar

En este trabajo introducimos y analizamos la aproximación por el método hp de elementos finitos de los modos de vibración de un sistema compuesto por un conjunto de tubos inmersos en un fluido contenido en una cavidad rígida, representando fehacientemente el dominio curvo utilizando triángulos curvos [4]. Este problema se presenta en el marco de la ingeniería nuclear ya que algunos diseños de las barras combustibles de los reactores nucleares de potencia, consisten en un arreglo de barras cilíndricas, los elementos combustibles, dispuestos en forma de coronas concéntricas, y que van alojados dentro de un tubo cilíndrico [3].

El problema puede plantearse en términos de la presión del fluido y en un marco bidimensional (específicamente una sección transversal plana curvada de la cavidad cilíndrica) [2]. Concretamente, sea $\Omega \subset R^2$ el dominio ocupado por el fluido, con borde exterior suave a trozos Γ_0 y sean Γ_j, $j = 1, \ldots, K$, las interfaces entre cada uno de los K tubos y el fluido. Notamos con n la normal unitaria exterior al borde de Ω. El problema consiste en hallar ω y p tal que:

$$
\begin{aligned}
-\Delta \mathrm{p} &= \frac{\omega^2}{c^2}\mathrm{p} \qquad \text{en } \Omega,\\
\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial n} &= 0 \qquad \text{en } \Gamma_0,\\
\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial n} &= \frac{\rho_0 \omega^2}{k_j - m_j\omega^2}\left(\int_{\Gamma_j} \mathrm{p} n\right)\cdot n \qquad \text{en } \Gamma_j \quad j = 1, \ldots, K.
\end{aligned}
$$

donde ρ_0 representa la densidad del fluido, c la velocidad del sonido en el fluido, mientras que k_j y m_j representan respectivamente la rigidez y la masa del $j-$ésimo tubo.

Si bien el problema de autovalores resultante no es estándar, puede reformularse de forma tal que, bajo apropiadas condiciones sobre el dominio curvo, podamos garantizar la convergencia del método y obtener estimaciones a priori del error tanto para las autofunciones como para los autovalores. Definimos un estimador a posteriori del error de tipo residual y estudiamos su eficiencia y confiabilidad. Analizamos en detalle el caso simétrico y proponemos una forma de resolverlo que nos permite simplificar el problema de autovalores y resolver de forma más eficiente el caso de autovalores múltiples. A su vez presentamos un algoritmo hp adaptativo (ver, por ejemplo, [1]) que permite, basándose en el estimador a posteriori del error y en un predictor del error, decidir en forma automática si en cada elemento de la triangulación hacer refinamiento h (i.e, refinar la malla) o refinamiento p (i.e., aumentar el orden del polinomio aproximante). Finalmente mostramos algunos ejemplos numéricos que nos permiten visualizar la buena performance del método propuesto.

Trabajo en conjunto con Claudio Padra (Departamento de Mecánica Computacional, Centro Atómico Bariloche - CONICET, 4800, Bariloche, Argentina) y Mario Scheble (Departamento de Mecánica Computacional, Centro Atómico Bariloche, 4800, Bariloche, Argentina).

Referencias

[1] M. G. Armentano, C. Padra, R. Rodriguez and M. Scheble, *An hp finite element adaptive scheme to solve the Laplace model for fluid-solid vibrations*,Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 200 (1-4), pp. 178-188 (2011).

[2] C. Conca, J. Planchard and M. Vanninathan, *Fluids and periodic structures*, Research in Applied Mathematics, vol. 38 (1995).

[3] J. M. Piracés, *Modelado de las vibraciones de un arreglo de tubos elásticamente montados inmersos en un fluido compresible utilizando adaptividad hp*, tesis de maestría, Instituto Balseiro, Universidad Nacional de Cuyo, Comisión Nacional de Energía Atómica, (2011).

[4] M. Zlamal, *Curved elements in the finite element method I*, SIAM J. Numer. Anal. vol. 10(1), pp. 229-240 (1973).