

ANÁLISIS DE UN PROBLEMA FRACCIONARIO PARA LA DINÁMICA DE LA POBLACIÓN DE UNA COLONIA DE ABEJAS MELÍFERAS

Fernando Ghioldi Gahona

Universidad Nacional de Rosario, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Escuela de Ciencias Exactas y Naturales, Depto.de Matemática. , Argentina
ferg@fceia.unr.edu.ar

La disminución de las poblaciones de colonias de abejas melíferas, fenómeno conocido como trastorno de colapso de colonias, es una preocupación a nivel mundial debido al decrecimiento que se viene evidenciando en la cantidad de abejas durante los últimos años. Estos insectos son los principales contribuyentes de la polinización y la interrupción de la misma podría causar serios problemas en la economía, la agricultura y la ecología. Existen diferentes modelos que describen la dinámica de la población de una colonia de abejas en los cuales se considera al polen y al néctar como las fuentes del alimento necesario para la misma. Entre ellos cabe destacar los modelos de [1], [2] y [3].

Por otro lado, motivado por aplicaciones en diversas áreas científicas (electricidad, magnetismo, mecánica, dinámica de fluidos, medicina, etc.), el cálculo fraccionario se encuentra en rápido desarrollo, lo que ha llevado a un gran crecimiento de su estudio en las últimas décadas. La derivada fraccionaria es un operador no local, esto convierte a las ecuaciones diferenciales fraccionarias en buenas candidatas para la modelización de situaciones en las que es importante considerar la historia del fenómeno estudiado ([4], [5], [6] y [7]), a diferencia de los modelos con derivada clásica donde esto no se tiene en cuenta.

En este trabajo, a partir de [8], se tratará un problema fraccionario multi-orden que describirá la dinámica de la población de una colonia de abejas utilizando el operador diferencial fraccionario de Caputo. Nuestro modelo dependerá del número C de abejas crías (huevos, larvas y pupas), del número O de abejas colmeneras (obreras jóvenes), el número R de abejas recolectoras (obreras adultas mayores) y de la cantidad f de alimento (polen y néctar) como ya se había mencionado antes.

Proponemos el siguiente modelo fraccionario no lineal, para $t \in [t_0, T]$, considerando $p, q, r, s \in (0, 1]$, respectivamente, como los órdenes de derivación de cada una de las 4 variables (C, O, R, f) , con ciertos datos iniciales (no negativos):

$$D^p C(t) = L \frac{f^2}{f^2 + b^2} \frac{O}{O + v} - (\phi_0 + m_C)C$$

$$D^q O(t) = \phi_0 C - \left(\alpha_{min} + \alpha_{max} \frac{b^2}{f^2 + b^2} - \sigma \frac{R}{R + O} \right) O - m_O O$$

$$D^r R(t) = \left(\alpha_{min} + \alpha_{max} \frac{b^2}{f^2 + b^2} - \sigma \frac{R}{R + O} \right) O - m_R R$$

$$D^s f(t) = -\gamma_C C - \gamma_A O + (c - \gamma_A)R$$

$$C(t_0) = C_0, \quad O(t_0) = O_0, \quad R(t_0) = R_0, \quad f(t_0) = f_0.$$

Principalmente, se realizará un análisis sobre la existencia y unicidad de soluciones en general y un estudio de estabilidad para casos especiales de particular interés. Se harán comparaciones con el problema clásico, donde solo interviene la derivada de primer orden.

Trabajo en conjunto con Melani Barrios (Universidad Nacional de Rosario - Conicet) y Gabriela Reyero (Universidad Nacional de Rosario).

Referencias

- [1] S. Bagheri, M. Mirzale, A mathematical model of honey bee colony dynamics to predict the effect of pollen on colony failure, PLoSOne, 14(11): e0225632, (2019).
- [2] D. Khoury, M. Myerscough, A. Barron, A quantitative model of honey bee colony population dynamics, PLoSOne, 6(4) e18491, (2011).
- [3] D. Khoury, A. Barron, M. Myerscough, Modelling food and population dynamics in honey bee colonies, PLoSOne, Vol. 8, Issue 5, e59084, (2013).

- [4] M. Barrios, G. Reyeró, M. Tidball, Harvest management problem with a fractional logistic equation, *Mathematica Pannonica New Series* 27 /NS 1/(2021) 2, pp 152-163, Akadémiai Kiadó, DOI 10.1556 / 314.2021.00014, ISSN 0865-2090 (print) ISSN 2786-0752 (online), (2021).
- [5] D. Bravo, M. Barrios, G. Reyeró, Analysis of a fractional-order predator-prey model with harvest incorporating an Allee effect, *Journal of Fractional Calculus and Applications*, Vol.14(2),Nro. 8, ISSN: 2090-5858(online), ISSN:2090-584X(print), 2023.
- [6] K. Diethelm, The analysis of fractional differential equations, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer, (2010).
- [7] A. Ferrari, E. Santillan Marcus, Study of a fractional-order model for HIV infection of CD4+ T-cells with treatment, *Journal of Fractional Calculus and Applications*, Vol. 11(2), (2020), pp. 12-22.
- [8] Tugba Akman Yıldız, A fractional dynamical model for honeybee colony population, *International Journal of Biomathematics* Vol. 11, No. 4 (2018) 1850063 (23 pages) World Scientific Publishing Company DOI: 10.1142/S1793524518500638.