Análisis de interacciones de alto orden en señales de iEEG y MEG a través de cuantificadores y distancias entre Hipergrafos en distintos estados cerebrales

Dalma Bilbao
Instituto de Matemática Aplicada del Litoral - IMAL, CONICET, UNL, CCT CONICET Santa Fe, Argentina
bilbaodalmaanahi@gmail.com

En 1960, Claude Berge propuso la teoría de hipergrafos como una extensión natural de la teoría de grafos, permitiendo representar interacciones de orden superior. Formalmente, un hipergrafo no dirigido es un par $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, donde $\mathcal{V}$ es el conjunto de vértices y $\mathcal{E}$ es un subconjunto de partes no vacías de $\mathcal{V}$ que cubren $\mathcal{V}$. Los elementos de $\mathcal{E}$ se llaman hiperaristas, es decir, $e \neq \emptyset$ para todo $e \in \mathcal{E}$ y $\bigcup_{e\in\mathcal{E}} e = \mathcal{V}$.
En neurociencia, la caracterización y diferenciación de estados cerebrales son fundamentales para comprender los mecanismos subyacentes en diversas funciones cognitivas y patologías neurológicas. La capacidad inherente de los hipergrafos para establecer relaciones de alto orden permite modelar las múltiples conexiones existentes entre diferentes regiones cerebrales a partir de datos de Electroencefalograma (EEG) y Magnetoencefalograma (MEG), capturando así la complejidad de las conexiones neuronales. Existe una amplia literatura sobre medidas de disimilitud de grafos. Algunos de estos conceptos permiten inducir distancias naturales entre hipergrafos, al considerar el hipergrafo como un grafo ponderado no dirigido inducido por su matriz de adyacencia $\mathcal{A}(\mathcal{H})$.

En este trabajo, proponemos un enfoque innovador que utiliza tres cuantificadores asociados a un hipergrafo:

Entropía, $S(H) = -\sum\_i = 1^{n-1}\lambda\_i \log\_2\lambda\_i$, siendo λ_i los autovalores asociados a la matriz laplaciana del hipergrafo $L(H)$.

Centralidad de vértices, $C\_1(v) = d(v) = \sum\_e \in Eh(v,e)$.

Centralidad de hiperaristas, $C\_2(e) = \delta(e) = \sum\_v \in Vh(v,e)$, donde $h(v,e)$ representa un elemento de la matriz de incidencia H de H.

A partir de estos cuantificadores, definimos tres nociones de distancias entre hipergrafos con el mismo número de vértices y el mismo número de hiperaristas.

Distancia Espectral: Dados los hipergrafos $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ y $\tilde{\mathcal{H}} = (\mathcal{V}, \tilde{\mathcal{E}})$, sean H y $\tilde{H}$ sus respectivas matrices de incidencia, $\mathcal{L}$ y $\tilde{\mathcal{L}}$ los laplacianos normalizados asociados. Las matrices Laplacianas $\mathcal{L}$ y $\tilde{\mathcal{L}}$ proporcionan los autovalores correspondientes $0 = \lambda\_0 \leq \lambda\_1 \leq \ldots \leq \lambda\_n - 1$ y $0 = \tilde{\lambda}\_0 \leq \tilde{\lambda}\_1 \leq \ldots \leq \tilde{\lambda}\_n - 1$. Estas dos secuencias, consideradas como vectores en $\mathbb{R}^{n-1}$, tienen definidas las p-distancias, $1 \leq p < \infty$

$$D_s^p(\mathcal{H}, \tilde{\mathcal{H}}) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} |\lambda_i - \tilde{\lambda}_i|^p\right)^{1/n}.$$

El caso más importante es $p = 2$, que define la estructura del espacio de Hilbert en $\mathbb{R}^{n-1}$.

Distancia de Centralidad de Vértices: Dados $\mathcal{H}$ y $\tilde{\mathcal{H}}$. Denotemos C y $\tilde{C}$ a las respectivas funciones de centralidad de vértices

$$C(v) = \sum_{e\in\mathcal{E}} h(v,e) \ \text{ y } \ \tilde{C}(v) = \sum_{\tilde{e}\in\tilde{\mathcal{E}}} h(v,\tilde{e})$$

Una disimilitud entre $\mathcal{H}$ y $\tilde{\mathcal{H}}$ que toma en cuenta la centralidad de los vértices está dada por

$$D_{vc}(\mathcal{H}, \tilde{\mathcal{H}}) = \max_{v\in\mathcal{V}} |C(v) - \tilde{C}(v)|.$$

Distancia de Centralidad de Hiperaristas: Sean $\mathcal{H}$ y $\tilde{\mathcal{H}}$ dos hipergrafos con el mismo número de hiperaristas $m = |\mathcal{E}| = |\tilde{\mathcal{E}}|$. Los datos empíricos y la construcción del modelo que usaremos generan un orden natural, dado por las bandas de frecuencias, para los dos conjuntos de hiperaristas $\mathcal{E} = \{e\_1, \ldots, e\_m\}$ y $\tilde{\mathcal{E}} = \{\tilde{e}\_1, \ldots, \tilde{e}\_m\}$. En esta situación, una distancia basada en la centralidad de hiperaristas entre $\mathcal{H}$ y $\tilde{\mathcal{H}}$ puede definirse por

$$D_{hc}(\mathcal{H}, \tilde{\mathcal{H}}) = \max_{i=1,\ldots,m} |C(e_i) - \tilde{C}(\tilde{e}_i)| = \max_{i=1,\ldots,m} \left| \sum_{v \in \mathcal{V}} h(v, e_i) - \sum_{\tilde{v} \in \tilde{V}} h(v, \tilde{e}_i) \right|.$$

Con estas distancias definidas, nuestro estudio se centra en su aplicación sobre hipergrafos que modelan distintos estados de sueño en ratas y distintos estados de epilepsia en humanos, siendo nuestro objetivo poder diferenciar entre estos distintos estados cerebrales en cada uno de los casos bajo estudio. Para ello trabajamos sobre hipergrafos construidos a partir de tres conjuntos de datos reales de señales neurofisiológicas. El primer conjunto consiste en registros de iEEG intracraneal de nueve ratas, cada una en cuatro estados de sueño distintos: vigilia activa (AW), movimiento ocular rápido (REM), vigilia tranquila (QW) y sueño no REM (NREM). El segundo conjunto incluye EEG de cuero cabelludo con 19 electrodos, obtenidos de seis pacientes epilépticos en diferentes estados cerebrales. Por último, el tercer conjunto de datos contiene señales de magnetoencefalografía (MEG) de dos pacientes con epilepsia generalizada, el primero con epilepsia generalizada primaria y el segundo con epilepsia generalizada secundaria. Los resultados muestran que estas nociones de distancias entre hipergrafos, obtenidos a partir de las seis bandas de frecuencias usuales en cada estado, permiten, razonablemente, distinguir diferentes estados cerebrales.

Trabajo en conjunto con Dr. Diego Mateos (Instituto de Matemática Aplicada del Litoral - IMAL, CONICET, UNL, Santa Fe), y Dr Hugo Aimar del Instituto de Matemática Aplicada del Litoral (IMAL-CONICET-UNL,Santa Fe).