Funciones simétricas y t-diseños esféricos en $\mathbb{R}^2$

Federico Nicolás Martínez
Universidad Nacional de San Luis, Argentina
fnmartinez@email.unsl.edu.ar

Un subconjunto finito X de S^{n-1} in $\mathbb{R}^n$ es un $t-$diseño esférico si para cualquier polinomio $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$ de grado a lo sumo t, el valor de la integral de $f(x)$ sobre S^{n-1} dividido por el volumen de S^{n-1} es igual al promedio de $f(x)$ en X. Intuitivamente, podemos decir que los puntos de X están distribuidos de manera "óptima" en la esfera. Los t-diseños esféricos fueron introducidos en [**DGS**] y son objeto de interés en diversas áreas de la matemática (ver también [**BB**]).

En el caso $n = 2$ los elementos del diseño pueden verse como números complejos de módulo 1 y podemos dar la siguiente definición equivalente: para $n, t \in \mathbb{N}$, $n \geq t + 1$, el conjunto $X = \{z_1, \ldots, z_n\} \subset S^1$ es un t-diseño esférico si y sólo si $\sigma_i(z_1, \ldots, z_n) = 0$ para $i = 1, \ldots, t$, donde σ_i es la $i-$ésima función simétrica de los elementos de X. De esta forma podemos estudiar los t-diseños por medio de los coeficientes de los polinomios que tienen por raíces a sus elementos.

Así, las raíces enésimas de un número complejo de módulo 1 son un t-diseño esférico si $n > t$ al igual que uniones de conjuntos de este tipo (eg. la unión de raíces cúbicas y cuartas de respectivos números complejos de módulo 1 forman un 2-diseño esférico de 7 elementos, al igual que raíces séptimas de un tal número). Diseños obtenidos de esta forma se dicen de "tipo grupo" y son todos los t-diseños para $t + 1 \leq n \leq 2t + 2$ mientras que, para $n \geq 2t + 3$ existen, además, no numerables t-diseños de "tipo no grupo" (ver [**H**]).

En [**M**], dados k puntos en S^1 satisfaciendo ciertas condiciones determinadas por medio de sus funciones simétricas, se introduce un método para construir t-diseños esféricos en $\mathbb{R}^2$ con $2t + k$ elementos. Dichas condiciones también clarifican la naturaleza de los diseños de tipo grupo y dan una descripción geométrica del conjunto de los t-diseños esféricos en términos del σ-espacio.

Referencias

[**BB**]E. Bannai; E. Bannai. A survey on spherical designs and algebraic combinatorics on spheres. *European Journal of Combinatorics*, 30:1392–1425, 2009.

[**DGS**] P. Delsarte; J. M. Goethals; J. J. Seidel. Spherical codes and designs. *Geometriae Dedicata*, 6:363–388, 1977.

[**H**] Y. Hong. On spherical t-designs in $\mathbb{R}^2$. *European Jounal of Combinatorics*, 3(3):255–258, 1982.

[**M**] F. Martínez. Simmetric functions and spherical t-designs in $\mathbb{R}^2$. *Codes, Designs and Criptography*, 90:2563-2581, 2022.