Matrices de suma por fila en grupos diedrales generalizados

María Valentina Soldera Ruiz
Universidad Nacional de San Luis, Argentina
mvsrpame@gmail.com

Dados Γ, un grupo, y $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_{|\Gamma|}\}$, un multiconjunto de elementos de Γ de cardinalidad $|\Gamma|$, una matriz de suma por fila de orden g y suma Σ, $\mathrm{RSM}_\Gamma(g, \Sigma)$, es una matriz de g columnas y $|\Gamma|$ filas, cuyas columnas son permutaciones de los elementos de Γ, y cuya i-ésima fila suma σ_i (utilizando notación aditiva para el producto del grupo). Este tipo de matrices son de interés por sus aplicaciones a la descomposición de grafos, y han sido utilizadas sobre grupos abelianos implicitamente por mucho tiempo. Sin embargo, las RSM fueron introducidas formalmente recien en [1], donde, por las limitaciones de los grupos abelianos, matrices sobre grupos diedrales generalizados fueron utilizadas para descomponer grafos completos en ciertas estructuras. Más precisamente, estudiaron el grupo diedral generalizado

$$\Gamma = \left\langle \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_{2^{k+1}n} \times \tau \;\middle|\; \tau^2 = e,\, h\tau = \tau h,\, \forall h \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_{2^{k+1}n} \right\rangle$$

o, en notación aditiva,

$$\Gamma = \langle \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_{2^{k+1}n} \oplus \tau \mid 2\tau = e,\, h + \tau = \tau - h,\, \forall h \in \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_{2^{k+1}n} \rangle$$

donde e es la identidad. Los autores de [1] demostraron que dado $g \geq 3$ existe un Σ con α elementos de orden m y $|\Gamma| - \alpha$ elementos de orden $2^k n$, tal que existe una $\mathrm{RSM}_\Gamma(g, \Sigma)$ (salvo en ciertos casos). Como [1] es el único trabajo que estudia estas matrices sobre grupos no abelianos, queda mucho trabajo por hacer y cualquier resultado resultaría en nuevas descomposiciones de grafos.

En este trabajo nos concentramos en las condiciones necesarias y suficientes sobre Σ y g para que exista $\mathrm{RSM}_\Gamma(g, \Sigma)$ cuando Γ es un grupo diedral generalizado.

Referencias

[1] Burgess, A. C., Danziger, P., Pastine, A., Traetta, T. (2024). Constructing uniform 2-factorizations via row-sum matrices: Solutions to the Hamilton-Waterloo problem. Journal of Combinatorial Theory, Series A, 201, 105803.