Caracterización Axiomática de reglas de asignación en el problema de la mochila

Dalma Yamila Veron
Instituto de Matemática Aplicada San Luis (UNSL-CONICET), Argentina
verondalma@gmail.com

Resumen

En el problema de la mochila, un grupo de agentes busca llenar una mochila con varios bienes. Se debe considerar dos cuestiones. La primera, ampliamente estudiada en la literatura, es decidir que artículos seleccionar para introducir en la mochila. La segunda cuestión, no tan estudiada, es dividir los ingresos totales entre los agentes que participan.

Existen distintos tipos de algoritmos que resuelven el primero de estos problemas. En este caso estudiaremos dos algoritmos, que si bien no son eficiente, son muy sencillo y ampliamente conocidos en la literatura. Luego, proponemos una regla de reparto asociada a cada algoritmo.

Primero, consideremos un problema $P = (N, M, W, w, p)$, donde N es el conjunto de agentes, M el conjunto de bienes, W el tamaño de la mochila, w_j es el tamaño del objeto j y p_j^i es la ganancia que obtiene el agente i cuando el bien j es introducido en la mochila.

Además para cualquier problema P, el conjunto de asignaciones factibles es definido como

$$\mathcal{F}(P) = \{(x_j)_{j\in M} \in \mathbb{R}_+^M : \sum_{j\in M} x_j \leq W\}$$

La idea del primer algoritmo, denominado algoritmo voraz dividido (Greedy-Split Algorithm), es comenzar con una mochila vacía y simplemente revisar los elementos que están en orden decreciente de eficiencia , agregando cada elemento en consideración a la mochila sin exceder su capacidad.

Se define la regla asociada a dicho algoritmo como $f^* = (\varphi^*, r^*)$, donde φ^* ordena los elementos de manera decreciente de eficiencia, es decir

$$\frac{p_1}{w_1} \geq ... \geq \frac{p_{s-1}}{w_{s-1}} \geq \frac{p_s}{w_s} \geq ... (0)$$

en el cual s se determina por

$$\sum_{k=1}^{s-1} w_k \leq W < \sum_{k=1}^{s} w_k$$

y $(\varphi_j^*(P))_{j\in M} \in \mathcal{F}$, donde

$$\varphi_j^*(P) = \begin{cases} 1 & si \quad j \leq s-1 \\ 0 & si \quad j > s-1 \end{cases}$$

Para un agente i en el problema P, la regla de reparto se define como:

$$r_i^*(P) = \sum_{j\in M} p_j^i \varphi_j^*(P)$$

La idea del segundo algoritmo , denominado algoritmo voraz (Greedy Algorithm), se define como $f^G = (\varphi^G, r^G)$. Es muy similar a la del algoritmo anterior, pero si el elemento j no entra, se verifica si los siguientes objetos, por ejemplo, $j+1$ o $j+2$ pueden entran en la mochila.

Además del orden nombrado, se debe tener en cuenta otro orden, que es el orden de ingreso a la mochila, es decir

$$j_1, j_2, ..., j_r$$

donde j_1 indica el primer objeto que es colocado en la mochila que no necesariamente es el primer objeto del orden por eficiencia por que este podria no entrar.
Por otro lado, para un agente i en el problema P, la regla de reparto se define como:

$$r_i^G(P) = \sum_{j \in M} p_j^i \varphi_j^G(P)$$

Desde un enfoque axiomático de la teoría de juego y la elección social, se introduce algunas propiedades que caracterizan estos algoritmos y se realiza una comparación de los mismos.
En este trabajo se demuestra que f^* es la única regla que satisface Maximum aspirations ,Weak independence of irrelevant goods, Minimal efficient, Conditional null solution y Composition up.
De manera conjetural, se considera que f^G es la única regla que satisface Máximum aspirations,Independence of relevant goods, Minimal efficient y No advantage splitting .
Y por último, a modo de comparación, se muestra la siguiente tabla

Axiomas	f^*	f^G
Maximum aspirations	✓	✓
Weak independence of irrelevant goods	✓	✓
Minimal efficient	✓	✓
Conditional null solution	✓	×
Composition up	✓	×
Independence of relevant goods	✓	✓
No advantage splitting	✓	✓
Independence of irrelevant goods	×	✓
Outcast condition	✓	✓
Arrow's Choice Axiom	✓	×
Quality over Quantity	✓	✓