La inversa de grupo m-débil relativa a un peso Hermitiano

Valentina Orquera
Universidad Nacional de Río Cuarto, CONICET, FCEFQyN, Universidad Siglo 21, Argentina
vorquera@exa.unrc.edu.ar

La inversa m-WG para elementos en un anillo con involución arbitrario fue introducida recientemente en [6]. Para el caso de una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ de índice k se define como la única matriz $X = A^{\textcircled{w}_m}$ que satisface las ecuaciones

$$XA^{k+1} = A^k, \quad AX^2 = X, \quad (A^*)^k A^{m+1} X = (A^*)^k A^m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Cuando $m = 1$, $A^{\textcircled{w}_m}$ coincide con la inversa de grupo débil $A^{\textcircled{w}}$ de A estudiada en [4], mientras que si $m \geq k$, $A^{\textcircled{w}_m}$ coincide con la clásica inversa de Drazin y por lo tanto resulta también una extensión de la inversa de grupo cuando $k = 1$.

Prasad y Bapat [2] definieron la inversa de Moore-Penrose ponderada de una matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ respecto a dos matrices hermitianas definidas positivas $E \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $F \in \mathbb{C}^{n\times n}$ como la única matriz $X = A^{\dagger}_{E,F}$ que satisface las ecuaciones

$$(1)\ AXA = A, \quad (2)\ XAX = X, \quad (3^E)\ (EAX)^* = EAX, \quad (4^F)\ (FXA)^* = FXA.$$

Si $E = I_m$ y $F = I_n$, $A^{\dagger}_{E,F}$ representa la clásica inversa de Moore-Penrose $A^{\dagger}$ de A. Dicha inversa tiene interesantes aplicaciones en redes neuronales [5]. Combinando algunas de las ecuaciones que definen a la inversa de Moore-Penrose ponderada, en [1] introdujeron la inversa core-EP de una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ respecto a un peso Hermitiano invertible $E \in \mathbb{C}^{n\times n}$, denotada por $A^{\textcircled{\dagger},\mathrm{E}}$, la cual coincide con la inversa core-EP [3] cuando $E = I_n$.

Motivados por los trabajos previos, en esta charla se presenta la inversa m-WG de una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ respecto a un peso Hermitiano invertible $E \in \mathbb{C}^{n\times n}$ como la única matriz $X = A^{\textcircled{w}^E_m}$ que satisface

$$AX^2 = X, \quad AX = \left(A^{\textcircled{\dagger},\mathrm{E}}\right)^m A^m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Si $E = I_n$, $A^{\textcircled{w}^E_m}$ se reduce a la inversa m-WG de A. Se estudian resultados de existencia y unicidad de esta nueva inversa como así también diferentes representaciones y caracterizaciones.

Este trabajo está parcialmente subvencionado por la Universidad Nacional de Río Cuarto (PPI 18/C634), Universidad Nacional de La Pampa, Facultad de Ingeniería (Resol. Nro. 135/19) y CONICET (PIBAA 28720210100658CO).

Trabajo en conjunto con David E. Ferreyra (Universidad Nacional de Río Cuarto, CONICET, FCEFQyN), Fabián E. Levis (Universidad Nacional de Río Cuarto, CONICET, FCEFQyN) y Paola Moas (Universidad Nacional de Río Cuarto, CONICET, FCEFQyN, Universidad Siglo 21).

Referencias

[1] Behera, R., Maharana, G., Sahoo, J.K.: Further results on weighted core-EP inverse of matrices. Results Math. 75, 174 (2020).

[2] Manjunatha Prasad, K., Bapat, R.B.: The generalized Moore-Penrose inverse. Linear Algebra Appl. 165 (1992), 59–69.

[3] Manjunatha Prasad, K., Mohana, K.S.: Core-EP inverse. Linear Multilinear Algebra 62 (6)(2014), 792–802.

[4] Wang, H., Chen,J.: Weak group inverse. Open Math. 16 (1) (2018), 1218-1232.

[5] Wei, Y.: Recurrent neural networks for computing weighted Moore-Penrose inverse. Appl. Math. Comput. 116 (2000), 279-287.

[6] Zhou, Y., Chen, J., Zhou, M.: m-weak group inverses in a ring with involution. Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. 115, 2 (2021).