# Matrices EP relativas a una isometría parcial

**David Eduardo Ferreyra**
Universidad Nacional de Río Cuarto, CONICET, Argentina
deferreyra@exa.unrc.edu.ar

Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es EP (o rango-Hermitiana) si su espacio columna coincide con el espacio columna de su traspuesta conjugada $A^*$. Este tipo de matrices es muy importante en la teoría matricial e incluye matriciales especiales como los proyectores ortogonales, las matrices Hermitianas, anti-Hermitianas, unitarias, normales y por supuesto las no singulares. Las matrices EP tienen índice a lo sumo uno, esto es, $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A^2)$, donde $\mathcal{R}(\cdot)$ indica el espacio columna de la matriz. Dicha limitación condujo a diferentes extensiones para el caso de matrices cuadradas de índice arbitrario [4,8] como así también a la teoría de operadores y/o anillos abstractos [3,9]. Sin embargo, para el caso rectangular se han obtenido muy pocos resultados [10].

En esta charla, se presentará la idea de $T$-EP matriz que involucra una matriz rectangular $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ relativa a una isometría parcial $T \in \mathbb{C}^{m\times n}$, es decir, $T = TT^*T$. A partir de ciertas descomposiciones simultáneas de $A$ y $T$, basadas en las descomposición SVD y la descomposición de Hartwig-Spindelböck, se presentan diferentes propiedades y caracterizaciones de las $T$-EP matrices, muchas de las cuales involucran la clásica inversa de Moore-Penrose. Entre las caracterizaciones más destacadas se puede mencionar la siguiente:$A$ es $T$-EP si y sólo si $TA^\dagger A = AA^\dagger T$ y $\mathcal{R}(A^*) \subseteq \mathcal{R}(T^*)$, donde $A^\dagger$ simboliza la inversa de Moore-Penrose de $A$.

Este enfoque está inspirado en [7] , donde se desarrolla una teoría espectral para matrices rectangulares y se introduce el concepto de $*$-ortogonalidad entre dos matrices $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$, a saber, $A^*B = 0$ y $BA^* = 0$. De esta manera se extienden muchos resultados conocidos en el caso cuadrado como los obtenidos en [1,2]. Si hay tiempo, se hará un ligero interludio al problema de la suma de dos matrices de la misma clase. Más precisamente, ¿cuándo la suma de dos matrices $T$-EP resulta nuevamente $T$-EP? Su conexión con ciertos resultados de $*$-ortogonalidad, sumas paralelas y matrices rango disjuntas serán mencionados [5,6].

Este trabajo está parcialmente subvencionado por la Universidad Nacional de Río Cuarto (PPI 18/C634) y CONICET (PIBAA 28720210100658CO).

*Trabajo en conjunto con Saroj Malik (School of Liberal Studies, Ambedkar University, India).*

## Referencias

[1] Baksalary, O.M., Trenkler, G.: Characterizations of EP, normal and Hermitian matrices. Linear Multilinear Algebra 56, 299–304 (2008).

[2] Cheng, S., Tian, Y.: Two sets of new characterizations for normal and EP matrices. Linear Algebra Appl. 375, 181–195 (2003).

[3] Djordjevic, D.S.: Characterizations of normal, hyponormal and EP operators. J. Math. Anal. Appl. 329, 1181–1190 (2007).

[4] Ferreyra, D.E., Levis, F.E., Priori, A.N., Thome, N.: Extending EP matrices by means of recent generalized inverses. Aequat. Math. 98, 921–939 (2024).

[5] Ferreyra D.E., Malik S.B.: Relative EP matrices, Rev. Real Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A-Mat. 116, 69 (2022).

[6] Ferreyra D.E, Malik, S.B.: Core and strongly core orthogonal matrices. Linear Multilinear Algebra 70 (20), 5052-5067 (2022).

[7] Hestenes, M.R.: Relative Hermitian matrices. Pacific J. Math. 11, 224–245 (1961).

[8] Malik, S.B., Rueda, L., Thome, N.: The class of m-EP and m-normal matrices. Linear Multilinear Algebra 64(11), 2119–2132 (2016).

[9] Mosic, D., Djordjevic, D.S., Koliha, J.J.: EP elements in rings. Linear Algebra Appl. 431, 527–535 (2009).

[10] Tian, Y., Wang, H.: Characterizations of EP matrices and weighted-EP matrices. Linear Algebra Appl. 434(5), 1295–1318 (2011).