ISSN 1514-9560

# Noticiero de la Unión Matemática Argentina

## Reunión Anual de la UMA

Córdoba, 6-8 agosto 2012

Actividades

Conferencias, cursos, asambleas

Comunicaciones REM

Monografía de Estudiantes

## Calixto Calderón

ife in Mathematics began when I transferred from The University of Cuyo, San Juan, to the University of Buenos A
l. My brother Alberto helped me economically and morally for the jump. Upon my arrival to Buenos Aires, Dr Alb
zález Domínguez (1904-1982) helped and oriented me with the change. The first subject I took in the Math Depa
ool of Exact Sciences, was Funciones Reales I, first course on Lebesgue Integration. Prof Evelio Oklander was the in

Diciembre 2012 Volumen 52

IMAL . Santa Fe

# NOTICIERO
**de la**
# UNIÓN MATEMÁTICA ARGENTINA

Editora

**Ivana Gómez**

Colaboradora

**Silvia Hartzstein**

IMAL
CONICET Santa Fe
Güemes 3450, S3000GLN

URL: **http://www.notiuma.santafe-conicet.gov.ar**

[1]

[1] ISSN 1514-9560

# Contenidos

# A los lectores

*El Noticiero de la UMA publica en este volumen los resúmenes de las comunicaciones en educación matemática aceptadas para la Reunión Anual de la UMA realizada en la ciudad de Córdoba en agosto. Además, iniciamos la publicación de la monografía ganadora del Concurso de Monografías para estudiantes, con la del 2012 " El Lema de Cotlar y sus aplicaciones" de Federico Morana.*

*Por otro lado, este volumen contiene el escrito de las palabras del Profesor Calixto Calderón que pronunciara recientemente en un congreso en Chicago en su homenaje.*

*Invitamos a nuestros lectores a seguir enviando información de las actividades matemáticas e inquietudes a este Noticiero.*

*Ivana Gómez*
*IMAL*
*Editora, Noticiero UMA*

Colaboraron en este número: Felipe Zó (San Luis), Hugo Aimar (Santa Fe), Federico Morana (Santa Fe).

# Calixto P. Calderón

*Calixto P. Calderón se doctoró en la UBA bajo la dirección de Alberto González Domínguez. Fue profesor en distintas universidades argentinas y en la University of Illinois at Chicago (1974-2003) y profesor emérito en esa universidad desde 2003. Ha realizado importantes aportes en Análisis Armónico, Ecuaciones en Derivadas Parciales, Polinomios Ortogonales, Modelos Matemáticos para Crecimiento de Tumores así también como en Historia de la Matemática.*

Entre el 16 y 18 de noviembre de 2012, en Roosevelt University en Chicago, se realizó un congreso en su honor: "Special Functions, Partial Differential Equations and Harmonic Analysis, a conference in honor of Calixto P. Calderón". http://www.roosevelt.edu/calderon

A continuación compartimos las palabras que pronunció Calixto Calderón en la ceremonia inaugural de dicho congreso. Agradecemos especialmente al Dr. Felipe Zó por facilitarnos una copia de las palabras de Calixto en Chicago "Remembrances and Silhouettes", y publicamos aquí en original.

# Remembrances and Silhouettes

**Calixto P. Calderon**

My life in Mathematics began when I transferred from The University of Cuyo, San Juan, to the University of Buenos Aires in 1961. My brother Alberto helped me economically and morally for the jump. Upon my arrival to Buenos Aires, Dr Alberto González Domínguez (1904-1982) helped and oriented me with the change. The first subject I took in the Math Department, School of Exact Sciences, was Funciones Reales I, first course on Lebesgue Integration. Prof Evelio Oklander was the instructor.

With the years, I would take, Complex Analysis, Ordinary Differential Equations, Funciones Reales II, Partial Differential Equations, Topology, Functional Analysis, Projective Geometry, Differential Geometry and other important subjects. We had a first rate faculty teaching these fundamental courses. Among them I remember: Alberto González Domínguez, Mischa Cotlar, Luis Santaló, Mario Gutiérrez Burzaco, Rafael Panzone, Agnes Benedek, Miguel Herrera and Prof Roque Carranza (statistician). This period was replete of personal experiences. I met mathematicians like Dr. Julio Rey Pastor and Beppo Levi during the mathematical teas that were held in the OEA building of Avenida de Mayo. A full floor had been loaned to the School of Exact Sciences of the University of Buenos Aires. I forged new friendships with fellow students, among them: Domingo Herrero, Marta Herrero, Julio Bouillet, Guillermo Hansen, Alberto Torchinsky, Alvaro González Villalobos, Susana Trione, Constantino Unguriano, Lilian Rudin, Julio Villalba, Mrs. Horacio Porta (Piqui), and Tomás Schonbek. I met also a number of brilliant new graduates: Néstor Riviére, Horacio Porta, Carlos Segovia, Cora Sadosky, Héctor Fattorini, Ricardo Nirenberg, Fausto Toranzos, Lidia Luquet and Beatriz Margolis. I also remember faculty that had graduated before 1961, and met personally, namely: Emilio Roxin, Juan Carlos Merlo, Vera Winitzky de Spinadel and Alberto Galmarino.

My interest in sciences began in my childhood, perhaps inspired by my father, who always challenged my sister Matilde and me with puzzles, mental calculations and medical diagnosis thought experiments. My father, Dr. Pedro J. Calderón, had been an accomplished physician trained in Buenos Aires and later in Paris under the celebrated French urologist and surgeon Georges Marion. My father came from an old colonial family in Argentina. Among his ancestors there were "conquistadores," administrators, landowners and soldiers. My mother, Matilde Garcia Gallo, the daughter of a Frenchman[1] with roots in the "hidalgo" nobility of Burgos, Spain, instilled in me the love for foreign languages. My father was fluent in French and Italian and my mother in French with a basic knowledge of German (instilled on her by her step-father Diplom. Ing. Franz Robert Winter).

Shortly before my graduation as "Licenciado en Ciencias Matemáticas," I took a course on" Boundary Values of Analytic Functions" that was taught by Dr. González Domínguez. That course was an introduction to "*mes premières armes*" in mathematics. Dr González Domínguez would become my thesis adviser later. I learned from him topics such as the Central Limit Theorem in Probability Theory, Introduction to Functions of Hille (Hermite Expansions), Laguerre Expansions, Theory of Approximation and Theory of Distributions. He was a personality larger than life, a prodigy child that spoke fourteen languages and was well versed in Philosophy, Literature and History. He would frequently cite portions of French and Spanish classic literature. One of his favorites was Baudelaire. However, the most important part of his personality was his generosity and selflessness. He had been a student of Dr. Julio Rey Pastor, and after his graduation he went on a Guggenheim fellowship to Brown University, USA, to study under David Tamarkin. Nevertheless, the most discernible influence on him was Einer Hille's work "A Class of Reciprocal Functions." That influence was passed on to me and from me on to some of my own students. During my formative years, Dr. Rafael Panzone and his wife Dr. Agnes Benedek had a tremendous influence in developing my mathematical taste and knowledge.

I started writing my dissertation in 1967 while my adviser had a visiting appointment in Hawaii. At that time I was teaching at the University of Cuyo, San Luis. There I met three remarkable mathematicians: Wilhelm Damköhler, Ezio Marchi and Felipe Zo. The topic of my dissertation was "Summability of Multiple Hermite and Laguerre Series and Multiple Weierstrass Transform." Parts of the thesis would appear later in Studia Mathematica (see 2 and 3 in the Publication List). One of the highlights of my appointment in San Luis was teaching a modern course on Distributions Theory and Linear Partial Differential Equations. I was honored with the attendance to the course by Wilhelm Damköhler, Felipe Zo, Pedro Egarter, Giorgio Zgrablich and other distinguished guests.

In August 1969, I went to the University of Minnesota on a visiting appointment. At that time I met Eugene Fabes, who would have a great influence on my career. I expanded my professional interests as to include Singular Integrals, Differentiation

[1] *Edilbert Garcia Gallo, born in Hendaye, French Basque Country, in 1881.*

Theory and, much later in time, Differential Equations. This was the time when I became acquainted with the Navier Stokes Equations. The work of Fabes, Rivière and Jones played a decisive role on my research. More than fifteen years later I published a sequence of three papers on Navier Stokes Equations (see 29, 30 and 35). During this period, I established a personal connection with B. Frank Jones, Walter Littman, Jesús Gil de Lamadrid, Robert Cameron and Siegfried K. Grosser, who later invited me to Vienna. Each one was a highly accomplished mathematician. At this time Julio Bouillet and Norberto Fava were graduate students working on their Ph. D. dissertation in Minnesota. They were the first two Argentine students that would join the Fabes-Rivière research group.

In 1970, I returned to Buenos Aires and joined the math faculty of Ciencias Exactas at the University of Buenos Aires. I met there a number of extraordinarily talented young graduate students. Among them I remember Jorge Fernández, Néstor Aguilera, Leonor Harboure, Lolina Alvarez Alonso and Pedro Asdeu. This was the time when I met Luis A. Caffarelli, a young man of immense talent. He became my first doctoral student. I began work with him on the study of multiple Jacobi Series. This association resulted in two important publications (6 and 7). At the time I was directing an undergraduate analysis seminar attended by highly qualified students. I remember distinctively two of them; namely: Eduardo Gatto and Cristián Gutiérrez. These two students would later become accomplished mathematicians in the USA. Throughout the years, I kept a lasting friendship with Gatto. During this period the Math Dept. had two important visitors on temporary appointments, namely: Yoram Sagher and Richard Wheeden. These two researchers would have a measurable impact on the formation of young Argentine mathematicians.

In 1971, I returned to the University of Minnesota on a regular faculty appointment. This was a very fruitful period because of my collaboration with Néstor Rivière and Eugene Fabes (see 8). An idea that originally Fabes and Rivière had to create a research group in Harmonic Analysis in Minnesota began to give fruits. In fact, L. Caffarelli, N. Aguilera, L. Harboure, C. Unguriano and F. Zo would join the people working with or under Fabes and Rivière. This exceptional group consisted at the time of almost exclusively Argentine mathematicians. Later on, a number of very gifted mathematicians would join the group, among them: Max Jodeit and Carlos Kenig. May I add that at a personal level, this was a time full of accomplishments, as I completed a substantial amount of mathematical work (see 4, 5, and 9). This also was the time when L. Caffarelli began his outstanding career, becoming a leader in his field.

In September of 1974, I moved to Chicago on a tenured faculty position at the University of Illinois Chicago Circle. There I began a long professorial career that would end with my retirement in 2003. At UIC I would find new friends, namely: Jeff Lewis, James Moller, Melvin Heard, Charles Lin, Herbert Alexander, S.Friedland and David Tartakoff[2]. This period was very important because of the diversification of my research interests. I included a number of new areas in my research, namely: Non Linear Partial Differential Equations, Ordinary Differential Equations, Probability Theory, Mathematical Biology, History of Mathematics, and Commutator Singular Integrals. During this period I collaborated with a number of mathematicians, namely: Alberto Calderón (my brother), Jeff Lewis, Yoram Sagher, E. Fabes, N. Rivière, Max Jodeit and Mario Milman. Later, in the mid-nineteen-nineties, I held a temporary appointment in Mendoza, Argentina, my birthplace. There, I had the chance to collaborate with Virginia Vera de Serio, jointly writing three papers (42, 44 and 45).

This time was also very rich in collaborative work at the University of Illinois. I started there my joint work with Thor Kwembe and Evans Afenya on mathematical models applied to Biology and Medicine. Part of my work with both is included in a Review publication (see 50). I received a great stimulation also from my other doctoral students: Marwan Abu El Rub, S. Krejca, S. Robbert, A. Gorgius and Myrna La Rosa. During this period, I started a series of historical papers on Mathematics and allied sciences (33, 36 and 52). After my retirement, I remained in Chicago. I contacted the analysts at De Paul University: Marshall Ash, Jonathan Cohen, Eduardo Gatto, Constantine Georgakis and Wilfredo Urbina Romero. I had the chance to participate actively in their Analysis Seminar.

I cannot close these lines without mentioning the impact that Antoni Zygmund and Robert Fefferman had on my work. Both encouraged me. Part of my research stems from their work. My most recent work was completed at De Paul University and stems from collaboration with Wilfredo Urbina (see 54). Finally, I would like to recognize Alberto Torchinsky, N. Etemadi and Miguel de Guzmán for their work had an important impact in my research. During my short period at Rice University I came in contact with Salomon Bochner, an extraordinary scholar and a great mathematician. He illuminated me on many subjects, in particular on "Singularities of Solutions of Linear Partial Differential Equations." Here, John Polking, a professor at Rice University, was the person that led me to learn the subject and to S. Bochner in particular.

---

[2] *Aside from the analysts, I forged friendships with Viktor Guggenheim, Pete Bousfield, N. Etemadi, Emad El Newihi and Sam Hedayat.*

## Publications

1. *"Some remarks on the pointwise convergence of sequences of multiplier operators, "Revista de la Union Matematica Argentina y de la Asociacion Fisica Argentina, XXIII (1968), 153-171.*

2. *"Some remarks on the multiple Weierstrass transform and Abel Summability of Multiple Fourier- Hermite series," Studia Math. XXXII (1969), 119-148.*

3. *"On Abel Summability of multiple Laguerre series," Studia Math. XXXIII (1969), 273-294.*

4. *"Conjugate kernels and convergence of harmonic singular integrals," Studia Math. XXXIX (1971),39-58.*

5. *"Di erentiation through starlike sets in* $R^m$*" Studia Math .XLVIII (1973), 1-13.*

6. *"Weak type estimates for the Hardy-Littlewood maximal functions" (with L.A. Caffarelli), Studia Math. XLIX (1974), 213-219.*

7. *"On Abel summabilityof multiple Jacobi series" (with L.A. Ca arelli), Colloq. Math. 30 (1974), 277-288.*

8. *"Maximal Smoothing operators" (with E. Fabes and N.M. Riviere), Indiana Univ. Math. J. 23 (1974), 889-898.*

9. *"On commutators of singular integrals," Studia Math. LIII (1975), 139-174.*

10. *"Maximal smoothing operators and some Orlicz classes" (with J.E. Lewis), Studia Math. LVII (1976), 285-296.*

11. *"On parabolic Marcinkiewicz Integrals," Studia Math. LIX (1976), 93-105.*

12. *"On the di erentiability of functions of several real variables" (with J.E. Lewis), Illinois J. Math. 20(1976), 535-542.*

13. *"On a lemma of Marcinkiewicz," Illinois J. Math. 22 (1978), 36-40.*

14. *"Applications of the Cauchy Integral on Lipschitz Curves" (with A.P. Calderon, E. Fabes, M. Jodeit and N.M. Riviere), Bull. Amer. Math. Soc. 84 (1978), 287-290.*

15. *"On the fractional di erentiation of the commutator of the Hilbert Transform," Trabajos de Matemáticas 19, Consejo Nacional de Investigaciones Cientificasy Technicas, Instituto Argentino de Matemática, Buenos Aires, 1978.*

16. *"Lacunary Spherical Means," Illinois J. Math. 23(1979), 476-484.*

17. *"On a singular integral," Studia Math. LXV (1979), 313-335.*

18. *"Smooth functions and convergence of singular integrals," Illinois J. Math. 23 (1979), 497-509.*

19. *"Smooth functions and convergence of singular integrals II," Illinois J. Math. 24 (1980), 426-436.*

20. *"On the Fourier Series of certain smooth functions" (with Y. Sagher), Illinois J.Math. 24 (1980), 437-439.*

21. *"On a condition of Marcinkiewicz and the convergence of singular integrals," Actas de la Reunion de El Escorial, Spanish Math. Assoc. (1980), 65-85.*

22. *"On the fractional di erentiation of the commutator of the Hilbert transform II," Rev. Union Mat. Arg. 29 (1980), 131-138.*

23. *"On the Dini test and the divergence of the Fourier Series," Proc. Amer.Math. Soc. 83 (1981), 382-384*

24. *"Existence of Singular Integrals in* $L^1$*," Indiana Univ. Math. J. 32 (1983), 615-633.*

25. *"Interpolation of Sobolev spaces: the real method" (with M. Milman), Indiana Univ. Math. J. 32 (1983), 794-801.*

26. *"On Etemadi's proof of the strong law of the large numbers" Math. Notae XXX (1983), 31-36.*

27. *"Lacunary di erentiation in* $R^n$*," J. Approx.Theory 40 (1984), 148-154.*

28. *"Approximation units and sum of independent random variables,"J. Approx.Theory 45 (1985), 133-139.*

29. *"Existence of weak solutions for the Navier-Stokes equations with initial data in* $L^p$*" Trans. Amer. Math. Soc. 318 (1990), 179-200.*

30. *"Global solutions of the Navier-Stokes equations" Trans. Amer. Math. Soc. 318 (1990), 201-207.*

31. *"Di usion and nonlinear population theory" Rev. Un.Mat. Argentina, XXXV (1990), 283-288.*

32. *"On the classical trapping problem" (with T. Kwembe), Math. Biosci., 102 (1990), 183-190.*

33. *"Alvaro Thomas and the Iberian Calculatores" (Interamerican Review, Puerto Rico), vol. XXI, Nos. 1,2, pp. 124-132, 1991.*

34. *"Modeling tumor growth" (with T. Kwembe), Math. Biosci., 103 (1991), 97-114.*

35. *"On the initial values of solutions of Navier-Stokes equations," Proc. AMS, 117, 3, (1993), 761-766.*

36. *"The sixteenth Century Iberian Calculatores" Rev. Un. Mat. Argentina. XXXV (1990), 245-258.*

37. *"Modeling Dispersal" (with T. Kwembe), Proceedings of the X ELAM, August 1991, Rev. Un. Mat. Argentina, 37, (1991), 212-229.*

38. *"Variational principles in Biology" Proceedings of the X ELAM, August, 1991, Rev. Un. Mat. Argentina, 37, (1991), 16-23.*

39. *"Diverse ideas in modeling tumor growth" (with T. Kwembe), Acta Cientifica Venezolana, 43, 2, (1992), 63-75.*

40. *"Remark on a non linear integral equation" (with E. Afenya), Revista de la Union Mat.Arg.39, (1995)*

41. *"Normal cell decline and inhibition in Acute Leukemia: A Biomathematical approach" (with E. Afenya), Cancer Detection and Prevention, XX, (1996), 171-179.*

42. *"Abel Summability of Jacobi Type Series" (with Virginia N. Vera de Serio), Illinois Journal of Math. 41, 2, (1997), 237-265.*

43. *"A Remark on Leukemogenesis" (with E. Afenya), International Journal of Mathematical and Statistical Sciences, 8, 2, (Dec. 1999), 1-7.*

44. *"Successive Approximations and Osgood's Theorem",Revista de la Union Mat.Argentina, 40, 3, 4, 73-81.*

45. *"Successive Approximations and Osgood Theorem II",Revista de la Union Mat.Argentina, 41, 2, (1999), 25-38.*

46. *"Diverse Ideas on the Growth of Disseminated Cancer Cells" (with E. Afenya), Bulletin of Mathematical Biology, 62, (April 2000), 527-542.*

47. *"A Representation Formula and its Applications to Singular Integrals" Indiana Journal of Mathematics, 49, (May 2000), 1-5*

48. *"Summability of Orthonormal Polynomial Series" Rev. de la Union Mat. Argentina, 42, 2, (2001), 35-42.*

49. *"Growth Kinetics of Cancer Cells Prior to Detection and Treatment" (with E. Afenya), Proceedings of the WSEAS Conferences, 2003.*

50. *"Modeling Disseminated Cancers: A review of the mathematical models" (with E. Afenya), Comments on Theoretical Biology, 8, 2-3, (2003), 225-253.*

51. *"Growth Kinetics of Cancer Cells Prior to Detection and Treatment: An Alternative View" (with E. Afenya), Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series B, 4,1, (February 2004), 25-28.*

52. *"Copernico el Mito y la Controversia" Anales de la Fundación Francisco Elías de Tejada, Madrid,Vol 11, Spain, 2005.(appeared in January 2006).*

53. *"Métodos Reales en la Teoría de Conmutadores de Integrales Singulares", VII Simposio Chileno de Matemática, Conferencias, Comunicaciones, Sociedad Matemática de Chile (November 2007).*

54. *"On Abel Summability of Jacobi Polynomial Series. The Watson Kernel and Applications". Jointly with Wilfredo Urbina Romero.*

# Reunión UMA 2012

Del 6 al 8 de agosto de 2012 la UMA celebró su Reunión Anual en la Universidad Nacional de Córdoba, en la ciudad de Córdoba, realizando

- XXXV Reunión de Educación Matemática
- XXIV Encuentro de Estudiantes de Matemática
- IV Festival de Matemática

En adhesión al IV CLAM Congreso Latinoamericano de Matemáticos patrocinado por la Unión Matemática de América Latina y el Caribe (UMALCA), institución de la cual forma parte la UMA varios eventos se organizaron en forma compartida, y la habitual Reunión Científica se llevó a cabo de forma integrada al CLAM.

En la reunión de Educación se dictaron las siguientes conferencias: *La realización de significados matemáticos en situaciones de interacción de toda la clase: aportes de la gramática sistémico funcional al análisis, la interpretación y la evaluación de registros,* por Betina Zolkower (Brooklyn College, City University of New York); *La visión de un matemático acerca de la educación matemática básica (nivel inicial y primario),* por Wilfried Schmid (Universidad de Harvard, Cambridge-Massachusetts);*Trabajo colaborativo entre docentes y relación con el conocimiento,* por Patricia Sadovsky (Universidad Pedagógica, Buenos Aires); *Lo que es y no es en la Educación Matemática Realista,* por Ana Bressan (Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática).
Se realizó una mesa redonda: "Aspectos institucionales y curriculares del proceso de elaboración de estándares del Profesorado Universitario en Matemática", coordinada por Patricia Kisbye (FAMAF).

También se dictaron 6 cursos para estudiantes y 8 cursos para profesores. Las notas de estos cursos están publicadas en la Serie B de Publicaciones de la FAMAF-UNC. Los cursos para estudiantes: *Autómatas celulares*, por Camilo Jadur (Universidad Nacional de Salta); *Métricas en álgebras de Lie dos pasos nilpotentes*, por Gabriela Ovando (CIEM); *Introducción a la teoría de reticulados*, por Miguel Campercholi (CIEM); *Ecuaciones en derivadas parciales utilizando Análisis Funcional*, por Uriel Kaufmann (CIEM); *Teorema del punto fijo en espacios métricos: una aplicación a fractales*, por Marilina Carena (IMAL); *Algebras semi-simples*, por Andrea Solotar (IMAS). Los cursos para profesores: *Explorando construcciones geométricas con Geogebra*, por Cristina Esteley (FaMAF), Isabel Marguet (Colegio 25 de Mayo, Córdoba) y Analía Cristante (Colegio 25 de Mayo); *Secciones cónicas: ¿y esto,... para qué me sirve?*, por Gabriel Soto (Universidad Nacional de la Patagonia

San Juan Bosco); *Juegos matemáticos y análisis de estrategias ganadoras*, por Carlos D'Andrea (Universidad de Barcelona); *Generación de las ideas fundamentales de la Alfabetización Estadística a través del trabajo con proyectos*, por Liliana Tauber (UNL) y Mariela Cravero (UNL); *Números, entre la creación y el descubrimiento*, por Gastón García (FaMAF); *Modelos Mecánicos y Matemáticos en la Física de Fines del Siglo XIX*, por Walter Lamberti (FAMAF); *Introducción a la Investigación en Educación Matemática*, por Virginia Montoro (UNComahue); *Una Excursión a la Tierra de los Secretos*, por Daniel Penazzi (FaMAF).

Se enviaron 45 comunicaciones de la REM, que se distribuyeron en distintas sesiones temáticas, y publicamos en este volumen, ver página 47.

En el Concurso de Monografías para Estudiantes con el tema "El Lema de Cotlar y sus aplicaciones" recibió el premio Federico Morana, alumno de la Licenciatura en Matemática Aplicada de la UNL durante el acto inaugural. En la página 11 de este volumen está el contenido completo de la monografía.

En esta ocasión la UMA otorgó 72 becas de ayuda económica a estudiantes de distintas ciudades del país.

El Festival de Matemática se realizó en la sede de la Academia Nacional de Ciencias. Desde el domingo 5 al miércoles 8 lo visitaron delegaciones de escuelas y público en general. Entre las actividades había juegos, murales; problemas, desafíos y curiosidades; arte matemático; concurso de videos; magia. Se dictaron 4 conferencias: *Paradojas de los sistemas electorales*, por Eugenio Hernández (Universidad Autónoma de Madrid); *Una invitación a la cuarta dimensión: la Conjetura de Poincaré*, por Jorge Lauret (CIEM); *Como el hombre aprendió a contar*, por Luis Quintas (Universidad Nacional de San Luis); *El frío, el calor, la difusión y el logaritmo*, por Pedro Morin (IMAL); *Bolitas en urnas, paseos al azar y el comportamiento microscópico de la materia*, por Pablo Groisman (IMAS). Todos los visitantes fueron guiados para una mejor comprensión de lo expuesto, contando con la participación de estudiantes locales y de otras universidades.

Se realizó la Asamblea Extraordinaria de Socios de la UMA el lunes 6 de agosto en el aula magna de la FAMAF.

**Comité organizador local:** Comité general Reunión UMA 2012: Nicolás Andruskiewitsch (coordinador), Adrián Andrada, Iván Angiono, Agustín García Iglesias, Emilio Lauret, Vanesa Meinardi. Comité XXXV Reunión Anual REM: Leandro Cagliero (coordinador), Cristina Esteley, Dilma Fregona, Nadina Rojas, Mónica Villarreal, Beatriz Viviani (enlace CD UMA). Comité XXIV Encuentro de Estudiantes: Marta Urciuolo (coordinador), Manuela Busaniche (enlace CD UMA), Linda Saal, Pedro Sánchez Terraf. Comité IV Festival de Matemática: Juan Pablo Rossetti (coordinador), Lisi D'Alfonso, Liliana Forzani (enlace CD UMA), Ursula Molter, Juan Carlos Pedraza, Pablo Román .

**Instituciones Organizadoras:** Facultad de Matemática, Astronomía y Física-UNC; Centro de Investigación y Estudios de Matemática (CIEM); Unión Matemática Argentina.

**Auspiciaron la Reunión:** UMA; Universidad Nacional de Córdoba; Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET-MINCyT); Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica (ANPCyT-MINCyT).

**Sitio web:** http://www.famaf.unc.edu.ar/uma2012

◊ ◊

### Asamblea UMALCA: Nuevas Autoridades de UMALCA

En la Asamblea de la UMALCA realizada el 8 de agosto durante el IV CLAM se eligieron nuevos integrantes para la UMALCA. El Dr. Nicolás Andruskiewitsch para el Comité Ejecutivo y el Dr. Hugo Aimar para el Comité Científico en representación por Argentina. Recordamos que en el periodo anterior la Dra. Harboure y el Dr. Cabrelli respectivamente representaban dichos comites.

# Monografía de Estudiantes

## El Lema de Cotlar y sus aplicaciones

Federico Morana

En la Reunión Anual de la UMA de 2012, el Concurso de Monografías para Estudiantes fue en homenaje a Misha Cotlar en el quinto aniversario de su fallecimiento. El jurado estuvo compuesto por Carlos Cabrelli, Alejandra Maestripieri y Francisco Martín Reyes.

El 6 de agosto de 2012 durante la ceremonia inaugural de la reunión la Presidente de la UMA entregó el premio a Federico Morana estudiante de la Licenciatura en Matemática de la ciudad de Santa Fe.

En este volumen del Noticiero publicamos íntegramente la monografía respetando el formato y las líneas realizados por el autor de la monografía.

# El Lema de Cotlar y Aplicaciones

Federico Morana

Licenciatura en Matemática aplicada
Facultad de Ingeniería Química
Universidad Nacional del Litoral

30 de junio de 2012

CONCURSO DE MONOGRAFÍAS PARA ESTUDIANTES
-2012-

**En homenaje a Mischa Cotlar, en el quinto aniversario de su fallecimiento.**

UNIÓN MATEMÁTICA ARGENTINA

1

*Quiero agradecer especialmente a Hugo Aimar por su dirección y ayuda en el diseño y elección de temas para la presente monografía, por su manera de transmitir la matemática con pasión y afecto, y por ser una guía en esta etapa de mi carrera.*

# Índice

# 1. Introducción

El propósito de la presente monografía es introducir el Lema de Cotlar, en 3 versiones, y mostrar su utilidad como herramienta para obtener la acotación de ciertos operadores definidos en espacios de Hilbert, aplicándolo a un par de situaciones: una clásica, la transformada de Hilbert, y otra ilustrativa a la perturbación de bases ortonormales, realizando en ambos casos una comparación con los resultados obtenidos al emplear a estos efectos la desigualdad de Young generalizada, otro método clásico en el análisis funcional.

La monografía está organizada de la siguiente manera:

Dado que el lema de Cotlar se manifiesta en los espacios de Hilbert, se dedica la sección 2 a definir y enunciar resultados básicos de dicho espacio, involucrados en el desarrollo posterior.

En la sección 3 se expone un método clásico, muy útil para la acotación de "operadores positivos", dado por la desigualdad de Young generalizada -y como caso particular el lema de Schur- de manera de exhibir más adelante la mejora que significa en muchos casos la utilización del Lema de Cotlar.

La sección 4 es dedicada propiamente al lema de Cotlar y a demostrarlo, en 3 versiones: primero se expone un caso más simple, seguido de la version original, para finalmente mostrar una generalización, útil en determinadas aplicaciones.

Por último, en la sección 5 se muestran los mencionados ejemplos, como modo ilustrativo del alcance y la potencia del lema de Cotlar. En primer lugar se aplican los resultados anteriores a obtener condiciones sobre perturbaciones de bases ortonormales en espacios $L^2(E)$, para $E \subset \mathbb{R}$, de manera que continúen siendo base del espacio, y se exhibe el caso particular de cuando las perturbaciones son de soporte disjunto en el espacio $L^2([0, 2\pi])$. A continuación se estudian las transformadas de Hilbert en sus versiones discreta y continua, para obtener mediante la aplicación del lema de Cotlar que los truncamientos son de tipo fuerte (2,2) uniformemente (de lo cual se deriva que la transformada de Hilbert discreta es de tipo fuerte (2,2) ); notamos además que si utilizamos a estos efectos la desigualdad de Young la acotación no resulta uniforme.

# 2. Los espacios de Hilbert

Los espacios de Hilbert surgen naturalmente como una generalización a dimension infinita de los espacios Euclídeos, y como tales, gozan de las propiedades familiares de ortogonalidad, complementada por la importante característica de completitud. Un aspecto básico de la teoría de estos espacios es, al igual que en el caso finito-dimensional, el estudio de sus transformaciones lineales y en particular de aquellas que son continuas, tarea que abordamos en el presente trabajo.

## 2.1. Definición y ejemplos

[SS] Un conjunto $\mathcal{H}$ es un ***espacio de Hilbert*** (real) si satisface las siguientes propiedades:

(I). $\mathcal{H}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

(II). $\mathcal{H}$ está provisto de un producto escalar $\langle .,. \rangle$, tal que

- $f \mapsto \langle f, g \rangle$ es linear en $\mathcal{H}$, $\forall\ g \in \mathcal{H}$ fijo,
- $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$, y
- $\langle f, f \rangle \geq 0$, $\forall\ f \in \mathcal{H}$.

Definimos la norma inducida $\| f \| = \langle f, f \rangle^{1/2}$.

(III). $\| f \| = 0 \ \Leftrightarrow\ f = 0$.

(IV). Valen las desigualdades de Cauchy-Schwarz y triangular

$$|\langle f, g \rangle| \leq \| f \| \| g \| \quad \text{y} \quad \| f + g \| \leq \| f \| + \| g \|$$

para todos $f, g \in \mathcal{H}$.

(V). $\mathcal{H}$ es completo en la métrica $d\langle f, g \rangle = \| f - g \|$.

(VI). $\mathcal{H}$ es separable.

*Observación* 1. Es común definir a los espacios de Hilbert sobre el cuerpo de los complejos $\mathbb{C}$, sin embargo para el caso que nos atañe alcanza con considerar como campo de escalares a $\mathbb{R}$, como simplificación.

*Observación* 2. La condición (vi) no es requerida para un espacio de Hilbert en general, sin embargo es el caso de la mayoría de las aplicaciones y ejemplos encontrados, en particular los presentados en este escrito.

Daremos a continuación 2 ejemplos fundamentales de espacios de Hilbert, que nos acompañarán a lo largo de esta presentación.

**Ejemplo 1.** *Si $E$ es un subconjunto medible de $\mathbb{R}^n$ con $m(E) > 0$, se define por $L^2(E)$ al espacio de las funciones reales (o complejas) de cuadrado integrable soportadas en $E$,*

$$L^2(E) = \{f : E \to \mathbb{R}/\ f \text{ es medible y } \int_E |f(x)|^2\, dx < \infty\}.$$

*El espacio $L^2(E)$ esta dotado de un producto escalar dado por*

$$\langle f, g\rangle = \int_E f(x)g(x)\, dx, \text{ para } f, g \in L^2(E),$$

*el cual induce la norma*

$$\| f \| = (\int_E |f(x)|^2\, dx)^{1/2}.$$

*Consideramos que dos elementos de $L^2(E)$ son equivalentes si son idénticos salvo quizás en un conjunto de medida cero, lo cual nos garantiza que $\| f \| = 0$ implica $f = 0$. Así, $L^2(E)$ cumple todas las propiedades de la definición y resulta ser un espacio de Hilbert.*

**Ejemplo 2.** *El espacio de Hilbert $\ell^2(\mathbb{Z})$ se define por*

$$\ell^2(\mathbb{Z}) = \{(\ldots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots) :\ a_i \in \mathbb{R}, \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\}.$$

*Si $a$ y $b$ son sucesiones de $\ell^2(\mathbb{Z})$, el producto escalar y la norma correspondiente están dados por*

$$\langle a, b\rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_k$$

$$y \quad \| a \| = (\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2)^{1/2}.$$

Aunque este ultimo ejemplo es muy sencillo, veremos mas adelante que todos los espacios de Hilbert (separables) de dimensión infinita son como $\ell^2(\mathbb{Z})$ en esencia.

6

Una ligera variante de este espacio es $\ell^2(\mathbb{N})$, donde consideramos solamente sucesiones unidireccionales, i.e.,

$$\ell^2(\mathbb{N}) = \{(a_1, a_2, ...) : \ a_i \in \mathbb{R}, \ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\}.$$

El producto escalar y la norma están definidos de la misma forma con las series yendo de $n = 1$ a $\infty$.

## 2.2. Bases

[Cr] En principio, notemos que una sucesión $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ en $\mathcal{H}$ es un conjunto ordenado, i.e., $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} = \{e_1, e_2, ...\}$.

**Defición 2.1.** Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Una sucesión de vectores $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ de $\mathcal{H}$ es una ***base*** (de Schauder) para $\mathcal{H}$, si para cada $f \in \mathcal{H}$, existen únicos escalares $\{c_k(f)\}_{k=1}^{\infty}$ tales que $f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)e_k$.

Cabe aclarar que aquí nos referimos a que la serie anterior converge con respecto al orden elegido de los elementos. Si la serie converge a $f$ para toda $f \in \mathcal{H}$ sin importar el orden escogido, decimos que $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una *base incondicional*.

## 2.3. Ortogonalidad - Bases ortonormales

[SS] Un aspecto característico de los espacios de Hilbert es la noción de ortogonalidad, cuyas importantes consecuencias geométricas y analíticas, los distingue de otros espacios normados. De esta forma es posible y de gran utilidad considerar bases ortonormales, que resultan una generalización natural de las bases canónicas de los espacios euclídeos, ya que poseen muchas propiedades similares a estas.

Dos elementos f y g en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ con producto interno $\langle ., . \rangle$ son *ortogonales o perpendiculares* si $\langle f, g \rangle = 0$, y lo denotamos por $f \perp g$.

**Defición 2.2.** [Cr] Un subconjunto finito o numerable $\{e_1, e_2, ...\}$ de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es *ortonormal* si $\langle e_k, e_j \rangle = \delta_{k,j}$.
Una ***base ortonormal*** es un sistema ortonormal $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ que también es base para $\mathcal{H}$.

El siguiente teorema da condiciones equivalentes sobre un sistema ortonormal $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ para ser base ortonormal.

**Teorema 2.1.** *Dado un sistema ortonormal $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, son equivalentes:*

(I). $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *es base ortonormal.*

(II). $f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k\rangle e_k, \ \forall \in \mathcal{H}.$

(III). $\langle f, g\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k\rangle \langle g, e_k\rangle, \ \forall f, g \in \mathcal{H}.$

(IV). $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k\rangle|^2 = \| f \|^2, \ \forall f \in \mathcal{H}.$

(V). $\overline{span}\{e_k\}_{k=1}^{\infty} = \mathcal{H}.$

(VI). *Si* $\langle f, e_k\rangle = 0, \ \forall \ k \in \mathbb{N}$, *entonces* $f = 0$.

Luego, es posible demostrar el siguiente

**Corolario 2.2.** *Si* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *es una base ortonormal, entonces cada* $f \in \mathcal{H}$ *tiene una expansion incondicionalmente convergente* $f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k\rangle e_k$.

**Teorema 2.3.** *Todo espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$ *separable tiene una base ortonormal.*

Un ejemplo simple de una base ortonormal concreta se da en el caso del espacio de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N})$:

**Ejemplo 3.** *Para* $k \in \mathbb{N}$*, sea* $e_k$ *la sucesión en* $\ell^2(\mathbb{N})$ *cuya coordenada k-esima es 1, y 0 el resto. Entonces* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *es una base ortonormal para* $\ell^2(\mathbb{N})$*; que usualmente se la denomina la base ortonormal* canónica *y es denotada por* $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Una consecuencia importante del ultimo teorema es que todo espacio de Hilbert (separable) puede ser identificado con $\ell^2(\mathbb{N})$.

**Teorema 2.4.** *Todo espacio de Hilbert separable de dimension infinita es isométricamente isomorfo a* $\ell^2(\mathbb{N})$.

[SS] Esto significa que todo espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ tiene la misma estructura que $\ell^2(\mathbb{N})$ pues existe una transformación *unitaria* $U : \mathcal{H} \to \ell^2(\mathbb{N})$,
i.e. $U$ satisface:

(I). $U$ es linear, esto es, $U(\alpha f + \beta g) = \alpha U(f) + \beta U(g)$.

(II). $U$ es biyectiva.

(III). $\| Uf \|_{\ell^2(\mathbb{N})} = \| f \|_{\mathcal{H}}, \ \ \forall \ f \in \mathcal{H}.$

8

## 2.4. Transformaciones lineales

[SS] Sean $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ dos espacios de Hilbert. Una función $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ es una *transformación lineal* (también llamado *operador lineal* o simplemente *operador*) si $T(af+bg) = aT(f)+bT(g)$ para cualesquiera $a, b$ escalares y $f, g \in \mathcal{H}_1$.

Diremos que un operador lineal $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ esta *acotado* si $\exists\ M > 0$ tal que $\| Tf \|_{\mathcal{H}_2} \leq M\| f \|_{\mathcal{H}_1}$. La *norma* de $T$ se denota por $\| T \|_{\mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2}$ o simplemente $\| T \|$ y se define por $\| T \| = \inf M$, donde el ínfimo se toma sobre todos los $M$ que cumplen lo anterior.

**Lema 2.5.** $\| T \| = \sup\{|\langle Tf, g\rangle| : \| f \| \leq 1, \| g \| \leq 1\}$*, donde* $f \in \mathcal{H}_1$ *y* $g \in \mathcal{H}_2$*.*

Un operador lineal $T$ es *continuo* si $T(f_n) \to T(f)$ cuando $f_n \to f$.

**Proposición 2.6.** *Un operador lineal* $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ *esta acotado si y solo si es continuo.*

Esta importante propiedad pone de manifiesto la utilidad del lema de Cotlar, que como veremos mas adelante nos permite demostrar de manera sencilla la acotación de ciertos operadores.

### 2.4.1. Funcionales lineales - Teorema de representación de Riesz

Un *funcional lineal* $l$ es una transformación linear de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ en el campo de escalares subyacente, que hemos asumido sea $\mathbb{R}$. Se define $\mathcal{H}' = \{$funcionales lineales continuas de $\mathcal{H}$ en $\mathbb{R}\}$ el *espacio dual* de $\mathcal{H}$.
Un ejemplo natural de un funcional lineal es el producto escalar en $\mathcal{H}$. En efecto, para $g$ fijo en $\mathcal{H}$, el mapeo $l(f) = \langle f, g\rangle$ es lineal, y además acotado (por la desigualdad de Cauchy-Schwarz).
Es notable el hecho de que esta ejemplo es exhaustivo, en el sentido de que todo funcional lineal continuo en un espacio de Hilbert se comporta como un producto escalar.

**Teorema 2.7** (de representación de Riesz)**.** *Sea* $l$ *un funcional lineal continuo en un espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$*. Entonces, existe un único* $g \in \mathcal{H}$ *tal que* $l(f) = \langle f, g\rangle$ *para todo* $f$ *en* $\mathcal{H}$*. Mas aun,* $\| l \| = \| g \|$*.*

### 2.4.2. Adjuntos

La primera aplicación del teorema de representación de Riesz es para determinar la existencia del adjunto de una transformación lineal.

**Proposición 2.8.** *Sea $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ una transformación lineal acotada. Existe una única transformación lineal $T^* : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tal que $\langle Tf, g\rangle = \langle f, T^*g\rangle$. Más aún $\| T \| = \| T^* \|$.*

El operador lineal $T^*$ se denomina el *adjunto* de $T$.

[R] Algunas propiedades que gozan los adjuntos son:

(I). $(T + S)^* = T^* + S^*$.

(II). $(aT)^* = aT^*$.

(III). $(ST)^* = T^*S^*$.

(IV). $T^{**} = T$.

Además, de (I) obtenemos por inducción que $(\sum T_k)^* = \sum T_k^*$ siempre que la suma sea finita.

[S] El siguiente lema, que brinda algunas propiedades relacionadas a norma de operadores y adjuntos, nos resultara útil mas adelante en la demostración de algunos resultados, por lo cual daremos una prueba.

**Lema 2.9.** *(I). $\| T^* \| = \| T \|$.*

*(II). $\| T \|^2 = \| T^*T \|$.*

*(III). $\| T \|^{2m} = \| T^*T \|^m \quad \forall\, m \in \mathbb{Z}$.*

*Demostración.* (I). Se obtiene directamente de la representación

$$\| T \| = \sup\{|\langle Tf, g\rangle| : \| f \| \leq 1, \| g \| \leq 1\}$$

$$\text{y del hecho que} \qquad \langle Tf, g\rangle = \langle f, T^*g\rangle.$$

(II). Se verifican las desigualdades

$$\| T^*T \| \leq \| T^* \| \| T \| = \| T \|^2$$

$$\text{y} \quad \| T \|^2 = \sup_{\|f\|=1} \langle Tf, Tf\rangle = \sup_{\|f\|=1} \langle T^*Tf, f\rangle \leq \| T^*T \|.$$

10

(III). Lo probamos para el caso $m = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$. El resultado general requiere un argumento ulterior que no desarrollaremos aquí.
Observemos que si $T$ es autoadjunta, tenemos por (II) que
$\| T \|^2 = \| T^2 \|$. Por inducción obtenemos $\| T \|^m = \| T^m \|$ cuando $m$ es una potencia de 2.
Usando esto con $T = T^*T$ (que es claramente autoadjunta) se sigue lo enunciado.

$\square$

# 3. Desigualdad de Young generalizada / El lema de Schur

Considerando un espacio de medida abstracto $(X, \mu)$ podemos obtener un resultado general que englobe a la desigualdad de Young para la convolución en $L^p(\mathbb{R}^n)$, y obtenerla así como corolario, como también al lema de Schur en $\ell^2(\mathbb{Z})$.

## Preliminares

Dado $(X, \Sigma, \mu)$ un espacio de medida completo y $\sigma$-finito, podemos definir un espacio de medida sobre el producto cartesiano $X \times X = X^2$ con la $\sigma$-algebra $\Sigma \times \Sigma = \Sigma^2$ generada por los subconjuntos de la forma $B_1 \times B_2$, donde $B_1, B_2 \in \Sigma$. Es posible definir además, de manera única, la medida producto $\mu \times \mu = \mu^2$ de manera que satisfaga la propiedad $\mu^2(B_1 \times B_2) = \mu(B_1)\mu(B_2)$, $\forall\ B_1, B_2 \in \Sigma$.

En estas condiciones, se verifican en el espacio producto resultados análogos a los teoremas de Fubini y de Tonelli de la teoría de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

Menos restrictiva es la desigualdad de Hölder, que continua siendo valida sin suponer la condición de completitud y $\sigma$-finitud del espacio de medida.

## El teorema general y corolarios

**Teorema 3.1.** *Sea $(X, \mu)$ un espacio de medida completo y $\sigma$-finito, y la función $m : X \times X \to \mathbb{R}$ medible en el espacio $(X^2, \Sigma^2, \mu^2)$ tal que:*

$$\int_{y \in X} |m(x, y)| d\mu(y) \leq C \qquad c.t.p\ x,\ y$$

$$\int_{x \in X} |m(x, y)| d\mu(y) \leq C \qquad c.t.p\ y,$$

11

*para una constante $C > 0$. Definimos, para $f \in L^p(X,\mu)$, con $1 \leq p \leq \infty$,*

$$Tf(x) = \int_{y \in X} m(x,y)f(y)d\mu(y).$$

*Entonces $T : L^p(X,\mu) \to L^p(X,\mu)$ es un operador lineal y continuo, de norma a lo sumo $C$. Es decir*

$$||Tf||_p \leq C||f||_p \qquad \forall f \in L^p(X,\mu).$$

*Demostración.* La linealidad se desprende directamente de la linealidad de la integral. Luego, veamos la continuidad conjuntamente con la pertenencia de $Tf$ al espacio $L^p$. Para esto, dividimos la demostración en tres casos:

- $p = \infty$

$$\begin{aligned}
\| Tf \|_\infty &= \sup \mathrm{ess}_{x \in X} |Tf(x)| \\
&\leq \sup \mathrm{ess}_{x \in X} \int |m(x,y)||f(y)|d\mu(y) \\
&\leq \sup \mathrm{ess}_{x \in X} \| f \|_\infty \int |m(x,y)|d\mu(y) \\
&\leq C \| f \|_\infty .
\end{aligned}$$

- $p = 1$

$$\begin{aligned}
\| Tf \|_1 &= \int_{x \in X} |Tf(x)|d\mu(x) \\
&\leq \int_{x \in X} \int_{y \in X} |m(x,y)||f(y)|d\mu(y)d\mu(x) \\
&\leq \int_{y \in X} |f(y)| \left( \int_{x \in X} |m(x,y)|d\mu(x) \right) d\mu(y) \qquad \text{(Tonelli)} \\
&\leq C \| f \|_1 .
\end{aligned}$$

- $1 < p < \infty$

12

Tomando $p'$ tal que $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$,

$$\begin{aligned}
|Tf(x)|^p &= |\textstyle\int_{y\in X} m(x,y)f(y)d\mu(y)|^p \\
&\leq \left(\textstyle\int_{y\in X} |m(x,y)||f(y)|d\mu(y)\right)^p \\
&= \left(\textstyle\int_{y\in X} |m(x,y)|^{\frac{1}{p'}}|m(x,y)|^{\frac{1}{p}}|f(y)|d\mu(y)\right)^p \\
&\leq \left(\textstyle\int_{y\in X} |m(x,y)|d\mu(y)\right)^{\frac{p}{p'}} \textstyle\int_{y\in X} |m(x,y)||f(y)|^p d\mu(y) \qquad \text{(Hölder)} \\
&\leq C^{\frac{p}{p'}} \textstyle\int_{y\in X} |m(x,y)||f(y)|^p d\mu(y).
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
||Tf(x)||_p &= \left(\textstyle\int_{x\in X} |Tf(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(C^{\frac{p}{p'}} \textstyle\int_{x\in X}\int_{y\in X} |m(x,y)||f(y)|^p d\mu(y)d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= C^{\frac{1}{p'}} \left(\textstyle\int_{y\in X} |f(y)|^p \left(\int_{x\in X} |m(x,y)||d\mu(x)|\right) d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{(Tonelli)} \\
&\leq C^{\frac{1}{p'}} C^{\frac{1}{p}} \left(\textstyle\int_{y\in X} |f(y)|^p d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= C||f||_p.
\end{aligned}$$

$\square$

**Corolario 3.2 (Desigualdad de Young).** *Sea $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $k \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces: $(f * k) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, y:*

$$\| f * k \|_p \leq \| f \|_p \| k \|_1.$$

*Demostración.* En este caso consideramos $X = \mathbb{R}^n$ y $\mu$ la medida de Lebesgue sobre la $\sigma$-álgebra $\mathcal{M}$ de los conjuntos medibles Lebesgue. Este espacio es completo y $\sigma$-finito. Tomando $m(x,y) = k(x-y)$ se tiene que $m$ es medible en $\mathbb{R}^{2n}$, y

$$\int_{\mathbb{R}^n} |m(x,y)|dy = \int_{\mathbb{R}^n} |k(x-y)|dy = \int_{\mathbb{R}^n} |k(z)|dz = \| k \|_1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

13

$$\int_{\mathbb{R}^n} |m(x,y)|dx = \int_{\mathbb{R}^n} |k(x-y)|dx = \parallel k \parallel_1 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n,$$

y $\parallel k \parallel_1 < \infty$ ya que $k \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Por lo tanto, por el teorema anterior se tiene que:

$$\parallel f * k \parallel_p = \parallel Tf \parallel_p \leq \parallel f \parallel_p \parallel k \parallel_1.$$

$\square$

**Corolario 3.3 (Lema de Schur).** *Sea $M = \{M_{jk}\}_{j,k=-\infty}^{\infty}$ una matriz tal que existe una constante $B > 0$ para la cual:*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |M_{jk}| \leq B \quad \forall j \in \mathbb{Z},\ y$$

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |M_{jk}| \leq B \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

*Entonces $M$ define un operador acotado en $\ell^2(\mathbb{Z})$ de norma a lo sumo $B$.*

*Demostración.* Considerando $X = \mathbb{Z}$, $\Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ y $\mu = \#$ la medida de contar, y tomando $m(x,y) = M_{jk}$, donde $j = x$ y $k = y$, se tiene por hipótesis que:

$$\int_{\mathbb{Z}} |m(j,k)|d\#(j) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} |M_{jk}| \leq B \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

$$\int_{\mathbb{Z}} |m(j,k)|d\#(k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |M_{jk}| \leq B \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Para $d : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $d(i) = d_i$,

$$(Td)(j) = \int_{\mathbb{Z}} M_{jk} d_k \ d\#(k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} M_{jk} d_k$$

es el operador definido por $M$, y verifica las conclusiones del teorema. En el caso particular que $d \in \ell^2(\mathbb{Z})$ se tiene el resultado enunciado.

$\square$

14

# 4. El lema de Cotlar

El lema de Cotlar nos provee una forma de demostrar que un operador $T$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es acotado si podemos descomponerlo como suma finita $T = \sum_k T_k$ donde las normas de los operadores $T_k$ están uniformemente acotadas y cumplen una condición de "casi ortogonalidad", lo cual se expresa requiriendo que $T_i T_j^*$ y $T_i^* T_j$ tiendan a cero convenientemente cuando $|i-j| \to \infty$.

En el caso mas simple cuando los operadores $T_k$ son ortogonales dos a dos, el resultado se presenta como sigue

**Lema 4.1** (**Cotlar, caso ortogonal**). *Sean* $\{T_k\}$ *operadores en un espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$*,*

- *uniformemente acotados:* $\|T_k\| \leq B$ *para todo* $k$*, y*
- *ortogonales:* $T_i T_j^* = 0$ *y* $T_i^* T_j = 0$ *si* $i \neq j$.

*Entonces*

$$\| \sum_{k=1}^{N} T_k \| \leq B.$$

*Demostración.* Sea $T = \sum_{k=1}^N T_k$. Se tiene que $T^* = \sum_{k=1}^N T_k^*$.
Por la propiedad (III) del lema 2.9 aplicada a $T$ tenemos:

$$\begin{aligned} \| T \|^{2m} &= \| (T^*T)^m \| = \| [(\textstyle\sum_{i=1}^N T_i^*)(\sum_{j=1}^N T_j)]^m \| = \| (\sum_{i,j=1}^N T_i^* T_j)^m \| \\ &\leq \textstyle\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_{2m}=1}^N \| T_{i_1}^* T_{i_2} T_{i_3}^* T_{i_4} \ldots T_{i_{2m-1}}^* T_{i_{2m}} \| = (*) \end{aligned}$$

Por la ortogonalidad de los $T_k$, en esta sumatoria sobreviven sólo los sumandos donde $i_1 = i_2 = \cdots = i_{2m}$, en consecuencia:

$$\begin{aligned} (*) &= \textstyle\sum_{k=1}^N \| T_k^* T_k \ldots T_k^* T_k \| && (2m \text{ términos}) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^N \| (T_k^* T_k)^m \| \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^N \| T_k \|^{2m} \\ &\leq \textstyle\sum_{k=1}^N B^{2m} = N B^{2m} && (\text{por hipótesis}) \end{aligned}$$

15

Tomando raíz $2m$-ésima a ambos lados de la desigualdad tenemos

$$\| \sum_{k=1}^{N} T_k \| \leq N^{\frac{1}{2m}} B \ \rightarrow \ B \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

$\square$

Cotlar demostró que el resultado anterior sigue siendo válido sin que los operadores $T_k$ sean ortogonales, con tal que sean aproximadamente ortogonales en un sentido apropiado.

Una versión del lema similar a la originalmente presentada por Cotlar en [C] es la siguiente:

**Lema 4.2 (Cotlar).** *Sea $\{T_k\}$ una sucesión de operadores en un espacio de Hilbert. Supongamos que existe una sucesión $c : \mathbb{Z} \rightarrow [0, \infty)$ que verifique $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^{\frac{1}{2}} \leq B < \infty$ tal que para todos $i, j \in \mathbb{N}$,*

$$\| T_i^* T_j \| \leq c_{i-j} \quad y \quad \| T_i T_j^* \| \leq c_{i-j}.$$

*Entonces, para todo $N \in \mathbb{N}$,*

$$\| \sum_{k=1}^{N} T_k \| \leq B.$$

*Demostración.* Procediendo de manera similar al caso ortogonal definimos $T = \sum_{k=1}^{N} T_k$ y llegamos a $(*)$. Ahora bien, cada término de esta sumatoria está mayorado por:

$$\begin{aligned} M &= \| T_{i_1}^* \| \| T_{i_2} T_{i_3}^* \| \ldots \| T_{i_{2m-2}} T_{i_{2m-1}}^* \| \| T_{i_{2m}} \| \\ &\leq c_0^{\frac{1}{2}} c_{i_2 - i_3} \ldots c_{i_{2m-2} - i_{2m-1}} c_0^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

y por

$$\begin{aligned} P &= \| T_{i_1}^* T_{i_2} \| \ldots \| T_{i_{2m-1}}^* T_{i_{2m}} \| \\ &\leq c_{i_1 - i_2} \ldots c_{i_{2m-1} - i_{2m}}. \end{aligned}$$

Luego, estará mayorado también por la media geométrica de $M$ y $P$:

$$\sqrt{MP} \leq c_0^{\frac{1}{2}} c_{i_1 - i_2}^{\frac{1}{2}} c_{i_2 - i_3}^{\frac{1}{2}} \ldots c_{i_{2m-1} - i_{2m}}^{\frac{1}{2}}.$$

16

Así:

$$
\begin{aligned}
\| \textstyle\sum_{k=1}^{N} T_k \|^{2m} &\leq \textstyle\sum_{i_1,\ldots,i_{2m}=1}^{N} c_0^{\frac{1}{2}} c_{i_1-i_2}^{\frac{1}{2}} \ldots c_{i_{2m-1}-i_{2m}}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c_0^{\frac{1}{2}} \textstyle\sum_{i_1,\ldots,i_{2m-1}=1}^{N} c_{i_1-i_2}^{\frac{1}{2}} \ldots c_{i_{2m-2}-i_{2m-1}}^{\frac{1}{2}} \left(\textstyle\sum_{i_{2m}=1}^{N} c_{i_{2m-1}-i_{2m}}^{\frac{1}{2}}\right) \\
&\leq c_0^{\frac{1}{2}} \textstyle\sum_{i_1,\ldots,i_{2m-1}=1}^{N} c_{i_1-i_2}^{\frac{1}{2}} \ldots c_{i_{2m-2}-i_{2m-1}}^{\frac{1}{2}} B \\
&\ldots \\
&\leq c_0^{\frac{1}{2}} B^{2m-1} \textstyle\sum_{i_1=1}^{N} 1 \\
&\leq B^{2m} N.
\end{aligned}
$$

Finalmente, tomando raíz $2m$-ésima en las primera y última expresiones anteriores y haciendo tender $m$ a $\infty$ obtenemos:

$$\| \sum_{k=1}^{N} T_k \| \leq B.$$

$\square$

Como generalización, es posible modificar las hipótesis del lema de manera que la cota de $\| T_i^* T_j \|$ y $\| T_i T_j^* \|$ no dependa de la diferencia $i-j$.

**Lema 4.3 (Cotlar, versión más general).** *Sea $\{T_k\}$ una sucesión de operadores en un espacio de Hilbert, y supongamos que existe una constante $B > 0$ tal que*

$$\sum_j \sqrt{\| T_i^* T_j \|} \leq B \qquad \forall i, \ y$$

$$\sum_j \sqrt{\| T_i T_j^* \|} \leq B \qquad \forall i.$$

*Entonces*

$$\| \sum_{k=1}^{N} T_k \| \leq B, \ \forall N \in \mathbb{N}.$$

*Demostración.* La prueba es similar a del lema en su version original, pero sin pasar por la sucesión $\{c_k\}$.

Definiendo $M$ y $P$ como antes tendremos que cada término de la sumatoria $(*)$ estará mayorado por la media geométrica $\sqrt{MP}$. Así:

17

$$
\begin{aligned}
\| \sum_{k=1}^{N} T_k \|^{2m} &\leq \sum_{i_1,\ldots,i_{2m}=1}^{N} \| T_{i_1}^* \|^{1/2} \| T_{i_1}^* T_{i_2} \|^{1/2} \ldots \| T_{i_{2m-1}}^* T_{i_{2m}} \|^{1/2} \| T_{i_{2m}} \|^{1/2} \\
&\leq \sum_{i_1,\ldots,i_{2m}=1}^{N} B^{1/2} \| T_{i_1}^* T_{i_2} \|^{1/2} \ldots \| T_{i_{2m-1}}^* T_{i_{2m}} \|^{1/2} B^{1/2} \\
&\leq B \sum_{i_1,\ldots,i_{2m-1}=1}^{N} \| T_{i_1}^* T_{i_2} \|^{1/2} \ldots \| T_{i_{2m-2}} T_{i_{2m-1}}^* \|^{1/2} \cdot \\
&\qquad \left( \sum_{i_{2m}=1}^{N} \| T_{i_{2m-1}}^* T_{i_{2m}} \|^{1/2} \right) \\
&\leq B \sum_{i_1,\ldots,i_{2m-1}=1}^{N} \| T_{i_1}^* T_{i_2} \|^{1/2} \ldots \| T_{i_{2m-2}} T_{i_{2m-1}}^* \|^{1/2} B \\
&\ldots \\
&\leq B^{2m} \sum_{i_1=1}^{N} 1 \\
&\leq B^{2m} N.
\end{aligned}
$$

Nuevamente, tomando raíz $2m$-ésima en ambos extremos y luego limite cuando $m \to \infty$ obtenemos la tesis.

□

# 5. Ejemplos y aplicaciones

## 5.1. Perturbación de bases

Como primer ejemplo, veamos como la aplicación del lema de Schur y del lema de Cotlar nos proveen distintas condiciones para que la perturbación de una base ortonormal de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ continue siendo base del espacio. Consideraremos el caso particular $\mathcal{H} = L^2(E)$, con $E \subset \mathbb{R}^n$ medible.

Sea $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ una base ortonormal de $L^2(E)$.

*Así, para cada $f \in L^2(E)$ existe una única sucesión de escalares $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$ tales que $f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$. Además, se tiene que $c_k = \langle f, \varphi_k \rangle \quad \forall k \in \mathbb{N}$, y $\| f \| = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_k \rangle|^2$.*

Tomamos ahora una perturbación $\{\varphi_k + \varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ de la base ortonormal anterior, con $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^2(E)$, y buscamos condiciones en las sucesiones $\{\varphi_k\}$ y $\{\varepsilon_k\}$ de manera que la base ortonormal perturbada continúe siendo base de $L^2(E)$ (posiblemente ya no ortogonal ni normal).

Para esto, utilizamos el resultado siguiente, válido en todo espacio de Banach, luego también en los espacios de Hilbert y en particular en $L^2(E)$.

**5.1.1.** *Si $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una base de un espacio de Banach $\mathcal{X}$, y $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathcal{X}$ tal que $\exists\ \lambda \in (0,1)$ de manera que*

$\| \sum c_k(f_k - g_k) \| \ \leq\ \lambda \| \sum c_k f_k \| \quad \forall$ *sucesión finita de escalares* $\{c_k\}$

*entonces $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es también base de $\mathcal{X}$.*

De esta manera, una condición suficiente para que la perturbación $\{\varphi_k + \varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ sea base es que $\exists \lambda \in (0,1)$ tal que para toda sucesión finita $\{c_k\}_{k=1}^{N} \subset \mathbb{R}$,

$$\| \sum c_k \varepsilon_k \| \leq \lambda \| \sum c_k \varphi_k \|. \qquad (✠)$$

Tomando $f = \sum c_k \varphi_k \in L^2(E)$, ésta última desigualdad se traduce en $\| \sum c_k \varepsilon_k \| \leq \lambda \| f \|$.

Busquemos entonces condiciones en $\{\varepsilon_k\}$ y $\{\varphi_k\}$ para que se cumpla (✠) utilizando primero la versión general de la desigualdad de Young y luego el lema de Cotlar, definiendo operadores apropiadamente.

`(i) Young`

Operando formalmente,

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_k c_k \varepsilon_k(x) &= \textstyle\sum_k \langle f, \varphi_k \rangle \varepsilon_k(x) \\ &= \textstyle\sum_k \left(\int_{y\in E} f(y)\varphi_k(y)dy\right)\varepsilon_k(x) \\ &= \textstyle\int_{y\in E} f(y) \left(\sum_k \varphi_k(y)\varepsilon_k(x)\right) dy. \end{aligned}$$

Luego, esto nos motiva a definir (siempre que sea posible)

$$k(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(y)\varepsilon_k(x)$$

$$\text{y} \quad Tf(x) = \int_{y\in E} f(y)k(x,y)dy.$$

Observemos que $k(x,y)$ estará correctamente definida dependiendo de cuáles sean $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$. Además, $T$ está definido como en el teorema de Young, y la acotación de $T$ se corresponde con la de $\sum_k c_k \varepsilon_k$ siempre que las operaciones anteriores sean factibles. Esto nos conduce a la siguiente

19

**Proposición 5.1.2.** *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ medible, $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de $L^2(E)$ y $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^2(E)$ tales que:*

1. $\| \varphi_k \|_\infty \leq M_1, \ \forall k \in \mathbb{N}$,
2. $\| \varphi_k \|_1 \leq M_2, \ \forall k \in \mathbb{N}$,
3. $\sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{x\in E} |\varepsilon_k(x)| dx \leq \frac{\lambda}{M_1}$, *y*
4. $\sum_{k\in\mathbb{N}} |\varepsilon_k(x)| \leq \frac{\lambda}{M_2}$ *en c.t.p.* $x \in E$,

*para ciertas constantes $\lambda \in (0,1), M_1 > 0$ y $M_2 > 0$.*

*Entonces la perturbación $\{\varphi_k + \varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es base de $L^2(E)$.*

*Demostración.* Definimos los operadores:
$K(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(y)\varepsilon_j(x)$
y $T_f(x) = \int_{y\in E} f(y)K(x,y)dy$, para $f \in L^2(E)$.

- $K$ está bien definido y es medible en $E \times E$.

  En efecto, la serie que define $K$ converge absolutamente, pues

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_j(y)||\varepsilon_j(x)| &\leq \| \varphi_j \|_\infty \sum_{j=1}^{\infty} |\varepsilon_j(x)| \\ &\leq M_1 \frac{\lambda}{M_2}, \quad \text{c.t.p } (x,y) \in E \times E. \end{aligned}$$

  Veamos que es medible. Definimos para esto

  $K_j : E \times E \to \mathbb{R} \ / \ K_j(x,y) = \varphi_j(y)\varepsilon_j(x), \ j \in \mathbb{N}$.

  Como $\tilde{\varphi_j}(x,y) = \varphi_j(y)$ y $\tilde{\varepsilon_j}(x,y) = \varepsilon_j(x)$ son medibles en $E\times E \ \forall j \in \mathbb{N}$ también $K_j$ es medible por ser producto de funciones medibles. Luego $\sum_{j=1}^{N} K_j$ es medible $\forall N \in \mathbb{N}$, y también lo es $K$ por ser límite puntual de funciones medibles.

- Se verifican las hipótesis del teorema de Young.

$$\begin{aligned} \int_{x\in E} |K(x,y)| dx &= \int_{x\in E} |\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(y)\varepsilon_j(x)| dx \\ &\leq \int_{x\in E} \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_j(y)||\varepsilon_j(x)| dx \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_j(y)| \int_{x\in E} |\varepsilon_j(x)| dx \quad \text{(teo de conv monótona)} \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \| \varphi_j \|_\infty \int_{x\in E} |\varepsilon_j(x)| dx \\ &\leq M_1 \sum_{j=1}^{\infty} \int_{x\in E} |\varepsilon_j(x)| dx \\ &\leq M_1 \frac{\lambda}{M_1} = \lambda, \ \text{en casi todo } y \in E. \end{aligned}$$

20

$$\begin{aligned}
\int_{y\in E}|K(x,y)|dy &\leq \int_{y\in E}\sum_{j=1}^{\infty}|\varphi_j(y)||\varepsilon_j(x)|dy\\
&= \sum_{j=1}^{\infty}|\varepsilon_j(x)|\int_{y\in E}|\varphi_j(y)|dy\\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty}|\varepsilon_j(x)|\|\ \varphi_j\ \|_1\\
&\leq M_2\sum_{j=1}^{\infty}|\varepsilon_j(x)|\\
&\leq M_2\frac{\lambda}{M_2}=\lambda,\ \text{en casi todo } x\in E.
\end{aligned}$$

- $\|\ T_f\ \|\leq\lambda\|\ f\ \|$ por aplicación directa del teorema de Young.
- $\|\ \sum_{k=1}^{N}c_k\varepsilon_k\ \|\leq\lambda\|\ \sum_{k=1}^{N}c_k\varphi_k\ \|\quad\forall$ sucesión finita $\{c_k\}_{k=1}^{N}\subset\mathbb{R}$.

  Para ver esto, sea $f=\sum_{k=1}^{N}c_k\varphi_k\in L^2(E)$ y veamos que $\sum_{k=1}^{N}c_k\varepsilon_k=T_f$.

  En efecto,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N}c_k\varepsilon_k(x) &= \sum_{k=1}^{N}\langle f,\varphi_k\rangle\varepsilon_k(x)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\langle f,\varphi_k\rangle\varepsilon_k(x)\\
&= \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\left(\int_{y\in E}f(y)\varphi_k(y)dy\right)\varepsilon_k(x)\\
&= \lim_{N\to\infty}\int_{y\in E}f(y)\sum_{k=1}^{N}\varphi_k(y)\varepsilon_k(x)dy\\
&= \int_{y\in E}f(y)\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(y)\varepsilon_k(x)dy \qquad \text{(T.C.D.)}\\
&= \int_{y\in E}f(y)K(x,y)dy\\
&= T_f(x).
\end{aligned}$$

  Aquí fue posible intercambiar el límite con la integral en virtud del teorema de convergencia dominada aplicado a la sucesión de funciones medibles en $E$, $g_N(y)=f(y)\sum_{k=1}^{N}\varphi_k(y)\varepsilon_k(x)$, $N\in\mathbb{N}$, ya que

  - $g_N(y)\longrightarrow f(y)K(x,y)$ cuando $N\to\infty$, en c.t.p. $y\in E$.
  - $$\begin{aligned}
|g_N(y)| &= |f(y)||\sum_{k=1}^{N}\varphi_k(y)\varepsilon_k(x)|\\
&\leq |f(y)|\sum_{k=1}^{N}|\varphi_k(y)||\varepsilon_k(x)|\\
&\leq |f(y)|\frac{M_1\lambda}{M_2},\ \forall N\in\mathbb{N}
\end{aligned}$$

21

- Como $\| \varphi_j \|_1 \leq M_2 \ \forall j \in \mathbb{N}$, entonces $\varphi_j \in L^1(E) \ \forall j \in \mathbb{N}$. Luego, $f = \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j \in L^1(E)$ y por lo tanto $\int_{y\in E} |f(y)| \frac{M_1 \lambda}{M_2} dy < \infty$.

Por el . anterior obtenemos lo afirmado en este.

En consecuencia, $\{\varphi_k + \varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es base para $L^2(E)$, ya que verifica la condición (✠).

$\square$

En el caso particular que $E$ tenga medida finita, podemos obtener el siguiente

**Corolario 5.1.3.** *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ con $|E| < \infty$. Si $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal de $L^2(E)$ y $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^2(E)$ verifican*

I. $\| \varphi_k \|_\infty \leq M_1, \ \forall k \in \mathbb{N}$

II. $\| \varphi_k \|_1 \leq M_2, \ \forall k \in \mathbb{N}$

III. $\sum_{k\in\mathbb{N}} |\varepsilon_k(x)| \leq \frac{\lambda}{\text{máx}(M_2, |E| M_1)}$ *en c.t.p. $x \in E$,*

*para ciertas constantes $\lambda \in (0,1)$ y $M_1, M_2 > 0$, entonces la perturbación $\{\varphi_k + \varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es base para $L^2(E)$.*

*Demostración.* Claramente se cumplen las hipótesis (1), (2) y (4) de la Proposición 5.1.2. Para ver que vale (3), utilizamos la condición (III) y el teorema de convergencia monótona.

$$\begin{aligned} \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{x\in E} |\varepsilon_k(x)| dx &= \int_{x\in E} \sum_{k\in\mathbb{N}} |\varepsilon_k(x)| dx \\ &\leq \int_{x\in E} \frac{\lambda}{M_1 |E|} dx = \frac{\lambda}{M_1}. \end{aligned}$$

$\square$

`(ii) Cotlar`

Quiero que $\| \sum c_k \varepsilon_k \| \leq \lambda \| f \|$, para toda $f \in L^2(E)$ de la forma $f = \displaystyle\sum_{k=1}^N c_k \varphi_k$, con $k \in \mathbb{N}$.

Para esto, defino los operadores

$$T_k : L^2(E) \to L^2(E) / \ \ T_k f(x) = c_k \varepsilon_k(x) = \langle f, \varphi_k \rangle \varepsilon_k(x)$$

$$\text{y} \quad T : L^2(E) \to L^2(E) / \ \ Tf(x) = \sum_{k=1}^N T_k f(x) = \sum_{k=1}^N c_k \varepsilon_k(x).$$

22

Calculemos ahora los adjuntos $T_k^*$. Para $f, g \in L^2(E)$,

$$\langle T_k f, g\rangle = \langle f, \varphi_k\rangle\langle \varepsilon_k, g\rangle = \langle f, \langle g, \varepsilon_k\rangle\varphi_k\rangle = \langle f, T_k^* g\rangle$$

Luego, $T_k^* g = \langle g, \varepsilon_k\rangle\varphi_k$.

Ahora,

- $$T_i^* T_j f = T_i^*(\langle f, \varphi_j\rangle\varepsilon_j) = \langle f, \varphi_j\rangle\langle \varepsilon_j, \varepsilon_i\rangle\varphi_i$$
  $$\begin{aligned} \| T_i^* T_j \| &= \sup_{\|f\|=1} \| T_i^* T_j f \| \\ &= \sup_{\|f\|=1} |\langle f, \varphi_j\rangle| \, |\langle \varepsilon_j, \varepsilon_i\rangle| \, \| \varphi_i \| \\ &\leq |\langle \varepsilon_j, \varepsilon_i\rangle| \end{aligned}$$
  $\therefore$ pido $$\sum_j \sqrt{|\langle \varepsilon_j, \varepsilon_i\rangle|} \leq \lambda \ \ \forall i.$$

- $$T_i T_j^* f = T_i(\langle f, \varepsilon_j\rangle\varphi_j) = \langle f, \varepsilon_j\rangle\langle \varphi_j, \varphi_i\rangle\varepsilon_i$$
  $$\begin{aligned} \| T_i T_j^* \| &= \sup_{\|f\|=1} \| T_i T_j^* f \| \\ &= \sup_{\|f\|=1} |\langle f, \varepsilon_j\rangle| \, |\langle \varphi_j, \varphi_i\rangle| \, \| \varepsilon_i \| \\ &\leq \| \varepsilon_j \| \| \varepsilon_i \| \qquad \text{(por Cauchy-Schwarz)} \end{aligned}$$
  $\therefore$ pido $$\sum_j \sqrt{\| \varepsilon_j \| \| \varepsilon_i \|} \leq \lambda \ \ \forall i.$$

Utilizando nuevamente Cauchy-Schwarz vemos que es suficiente pedir esto último, que es equivalente a que

$$\sum_j \sqrt{\| \varepsilon_j \|} \ \leq \ \frac{\lambda}{\sup_i \sqrt{\| \varepsilon_i \|}}.$$

Con estas condiciones, por la versión general del lema de Cotlar (lema 4.3) tenemos que

$$\| T \| = \| \sum_{k=1}^{N} T_k \| \leq \lambda$$

$$\Rightarrow \quad \| Tf \| \leq \lambda \| f \|, \ \ \forall \ f \in L^2(E)$$

que es a lo que queríamos llegar, pues $Tf = \sum c_k \varepsilon_k$.

Hemos demostrado la siguiente

23

**Proposición 5.1.4.** *Sea* $E \subset \mathbb{R}^n$ *medible,* $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *una base ortonormal de* $L^2(E)$ *y* $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^2(E)$ *tal que*

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \sqrt{\| \varepsilon_j \|} \leq \frac{\lambda}{\sup_{i\in\mathbb{N}} \sqrt{\| \varepsilon_i \|}} \qquad \text{para alguna constante } \lambda \in (0,1).$$

*Entonces la perturbación* $\{\varphi_k + \varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *es base de* $L^2(E)$.

Ahora bien, las proposiciones obtenidas anteriormente mediante Young y Cotlar nos brindan a primera vista condiciones muy abstractas sobre las familias $\{\varepsilon_k\}$ y $\{\varphi_k\}$, sin embargo se observan diferencias que se hacen palpables al considerar ejemplos particulares.

Además, cabe mencionar que por Cotlar obtuvimos condiciones solamente sobre la familia $\{\varepsilon_k\}$ entretanto la base o.n. $\{\varphi_k\}$ puede ser cualquiera, mientras que por Young se necesitan satisfacer condiciones en ambas familias.

El siguiente ejemplo es ilustrativo de estas diferencias, y de la mejora al utilizar Cotlar puesto que permite una mayor libertad sobre la familia $\{\varepsilon_k\}$.

Notemos que aunque en los teoremas anteriores utilizamos como conjunto de subíndices a los naturales $\mathbb{N}$, estos continúan siendo válidos tomando, por ejemplo, a los enteros $\mathbb{Z}$ o a cualquier otro conjunto numerable.

**Ejemplo 4.** *Consideremos en el espacio* $L^2([0,2\pi])$ *la base ortonormal* $\{\varphi_k(\theta) = \frac{e^{ik\theta}}{\sqrt{2\pi}} : k \in \mathbb{Z}\}$ *y perturbaciones* $\{\varphi_k + \varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *donde los elementos de la familia* $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *tienen soporte disjunto.*

*En especial, sea* $\{I_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *la partición de* $[0,2\pi]$ *dada por*

$$I_k = \begin{cases} [\frac{2\pi}{2^k}, \frac{2\pi}{2^{k-1}}) & si \quad k \in \mathbb{N} \\ \emptyset & si \quad k \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}, \end{cases}$$

*y definamos* $\varepsilon_k = \alpha_k \chi_{I_k}$, *donde los* $\alpha_k$ *son constantes que elegiremos de manera que las perturbaciones continúen siendo base del espacio, de acuerdo a los resultados obtenidos anteriormente utilizando los lemas de Young y de Cotlar (*$\chi_{I_k}$ *representa la función característica del conjunto* $I_k$*).*

*Por Young (corolario 5.1.3), como*

- $\| \varphi_k \|_\infty = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ \forall k \in \mathbb{Z}$
- $\| \varphi_k \|_1 = \sqrt{2\pi}, \ \forall k \in \mathbb{Z}$
- $|[0,2\pi]| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{2\pi}$

24

*entonces debo pedir que* $\| \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\varepsilon_k| \|_\infty \leq \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}}$ *para* $\lambda \in (0{,}1)$*;*
*o bien, que* $\sqrt{2\pi}\ \| \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\varepsilon_k| \|_\infty < 1$.

*Ya que* $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *tienen soporte disjunto y son constantes en su soporte, entonces lo anterior es igual a requerir que* $\sqrt{2\pi}\ \text{máx}_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_k| < 1$
$\Leftrightarrow \quad \text{máx}_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_k| < \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

*Por Cotlar (proposición 5.1.4), pido que*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \sqrt{\| \varepsilon_k \|} \leq \frac{\lambda}{\sup_{j\in\mathbb{Z}} \sqrt{\| \varepsilon_j \|}} \qquad \textit{para alguna constante } \lambda \in (0,1),$$

*o bien, que* $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \sqrt{\| \varepsilon_k \|}\ \sup_{j\in\mathbb{Z}} \sqrt{\| \varepsilon_j \|} < 1$. $\quad\circledcirc$

*Como* $\varepsilon_k \equiv 0$ *si* $k \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$ *entonces las sumatorias las efectuamos sobre* $\mathbb{N}$*, luego*

$$\| \varepsilon_k \| \ = \ (\int_0^{2\pi} |\alpha_k \chi_{I_k}(\theta)|^2 d\theta)^{1/2} \ = \ |\alpha_k|\sqrt{|I_k|} \ = \ |\alpha_k|\sqrt{\frac{2\pi}{2^k}}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\| \varepsilon_k \|} \ = \ \sqrt{|\alpha_k|}\frac{\sqrt[4]{2\pi}}{\sqrt[4]{2^k}} \ = \ \frac{\beta_k}{r^k} \ , \quad \textit{con} \ \ \beta_k = \sqrt{|\alpha_k|}\sqrt[4]{2\pi} \ \ \textit{y} \ \ r = \sqrt[4]{2}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sqrt{\| \varepsilon_k \|} \ = \ \sum_{k\in\mathbb{N}} \sqrt{\| \varepsilon_k \|} \ = \ \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\beta_k}{r^k}.$$

*La serie geométrica* $\sum_{k\in\mathbb{N}} (\frac{1}{r})^k$ *es sumable, y continuará siéndolo si multiplicamos cada término por un factor* $\beta_k$ *que crezca polinomialmente con k (por dar un ejemplo; podría crecer aún más rápido y continuar siendo sumable). En particular, podemos tomar* $\beta_k = ck$*, con c una constante elegida de manera que se cumpla la condición* $\circledcirc$*. Luego, por la definición de* $\beta_k$*, eligiendo* $\alpha_k$ *de manera que* $|\alpha_k| = \frac{\beta_k^2}{\sqrt{2\pi}} = Ck^2$*, con* $C = \frac{c^2}{\sqrt{2\pi}}$*, la familia* $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *cumple* $\circledcirc$*.*

*Notemos que los requerimientos sobre los* $\alpha_k$ *son en este caso menos restrictivos, particularmente no es necesario que estén acotados.*

*Como muestra, hemos obtenido que las siguientes perturbaciones de la base ortonormal* $\{\frac{e^{ik\theta}}{\sqrt{2\pi}} : k \in \mathbb{Z}\}$ *del espacio* $L^2([0, 2\pi])$ *son base:*

- $\{\frac{e^{ik\theta}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{4}\chi_{[\frac{2\pi}{2^k}, \frac{2\pi}{2^{k-1}})}(\theta) : k \in \mathbb{Z}\}$ *(por Young)*
- $\{\frac{e^{ik\theta}}{\sqrt{2\pi}} + Ck^2\chi_{[\frac{2\pi}{2^k}, \frac{2\pi}{2^{k-1}})}(\theta) : k \in \mathbb{Z}\}$ *(por Cotlar)*

## 5.2. Transformada de Hilbert

La transformada de Hilbert, en su version continua, es una importante herramienta en el análisis funcional, así como también en análisis armónico y de Fourier. Además, tiene notables aplicaciones en el campo de procesamiento de señales, entre otros.

Utilizando el lema de Cotlar es posible obtener de manera relativamente sencilla que las transformadas de Hilbert truncadas son de tipo fuerte (2,2) uniformemente. Esta fue la primera aplicación dada por Cotlar al lema que lleva su nombre en [C]. Se observa además que si utilizamos para este propósito el lema de Young/Schur, la acotación obtenida no resulta uniforme.

Es también interesante estudiar el tipo de la version discreta de la transformada de Hilbert, la cual presentamos en primer lugar.

### 5.2.1. Transformada de Hilbert discreta

Dada una sucesión $\overline{s} = \{s(i)\}_{i\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$ definimos la transformada de Hilbert discreta por

$$H\overline{s}(j) = \sum_{i\neq j} \frac{s(i)}{j-i} = (h * \overline{s})(j), \text{ donde}$$

$$h(j) = \begin{cases} \frac{1}{j} & \text{para} \quad j \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad j = 0. \end{cases}$$

Notemos aquí que si $\overline{s} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ entonces la serie que define $H\overline{s}(j)$ es absolutamente convergente, por la desigualdad de Schwartz, para todo $j \in \mathbb{Z}$, luego $H\overline{s}$ esta bien definida. Utilizando el lema de Cotlar veremos que además está en $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Para $M \in \mathbb{N}$, definimos un truncamiento de la transformada de Hilbert discreta por:

$$H_M\overline{s}(j) = \sum_{|j-i|=1}^{2^M-1} \frac{s(i)}{j-i} = (h_M * \overline{s})(j), \text{ donde}$$

$$h_M(j) = \begin{cases} \frac{1}{j} & \text{para} \quad 1 \leq |j| < 2^M \\ 0 & \text{sino.} \end{cases}$$

Además, definimos para $k \in \mathbb{N}$:

$$T_k\overline{s}(j) = \sum_{|j-i|=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{s(i)}{j-i} = (t_k * \overline{s})(j), \text{ donde}$$

26

$$t_k(j) = \begin{cases} \frac{1}{j} & \text{para} \quad 2^{k-1} \leq |j| < 2^k \\ 0 & \text{sino.} \end{cases}$$

Así, $H_M\overline{s} = h_M * \overline{s} = \sum_{k=1}^{M} t_k * \overline{s} = \sum_{k=1}^{M}(t_k * \overline{s}) = \sum_{k=1}^{M} t_k\overline{s}$.

$$\therefore \quad H_M = \sum_{k=1}^{M} T_k.$$

Veamos que los operadores $T_k$ verifican las hipótesis del Lema de Cotlar, y así $\| H_M\overline{s} \| \leq C\| \overline{s} \|$ con $c > 0$ independiente de $M$ y de $\overline{s}$.

Para esto, calculemos en primer lugar los adjuntos $T_k^*$.

$$\begin{aligned} \langle T_k\overline{s}, \overline{r}\rangle &= \textstyle\sum_{j\in\mathbb{Z}}(T_k\overline{s})(j)r(j) = \sum_j (t_k * \overline{s})(j)r(j) = \sum_j r(j)\sum_i s(i)t_k(j-i) \\ &= \textstyle\sum_i s(i)\sum_j r(j)t_k(j-i) = \sum_i s(i)(\tilde{t_k} * \overline{r})(i) = \langle \overline{s}, T_k^*\overline{r}\rangle \end{aligned}$$

donde $\tilde{t_k}(j) = t_k(-j)$ y $T_k^*\overline{r} = \tilde{t_k} * \overline{r}$.

- Por la desigualdad de Young para la convolución (en el caso discreto) tenemos

  $\| T_i^*T_j\overline{s} \| = \| T_i^*(t_j * \overline{s}) \| = \| \tilde{t_i} * t_j * \overline{s} \| \leq \| \tilde{t_i} * t_j \|_1 \| \overline{s} \| = \| t_i * t_j \|_1 \| \overline{s} \|$

  Ahora, ya que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} t_i(n) = 0$,

  $$\begin{aligned} \| t_i * t_j \|_1 &= \textstyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} |(t_i * t_j)(k)| \\ &= \textstyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\sum_{n\in\mathbb{Z}} t_i(n)t_j(k-n)| \\ &= \textstyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\sum_{n\in\mathbb{Z}} t_i(n)(t_j(k-n) - t_j(k))| \\ &\leq \textstyle\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} |t_i(n)||t_j(k-n) - t_j(k)| \\ &= \textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |t_j(n)|\sum_{k\in\mathbb{Z}} |t_j(k-n) - t_j(k)| \\ &= (\spadesuit) \end{aligned}$$

  Para acotar $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |t_j(k-n) - t_j(k)|$ consideremos los casos:

  1. $n \in (-2^{j-1}, 2^{j-1})$

     Elijo la partición de $\mathbb{Z}$ dada por

     $$\begin{aligned} A &= \{k : \ |k| \in [2^{j-1}, 2^j) \ \wedge \ |k-n| \in [2^{j-1}, 2^j)\}, \\ B &= \{k : \ |k| \notin [2^{j-1}, 2^j) \ \wedge \ |k-n| \notin [2^{j-1}, 2^j)\}, \\ C &= \{k : \ |k| \in [2^{j-1}, 2^j) \ \veebar \ |k-n| \in [2^{j-1}, 2^j)\}. \end{aligned}$$

27

- Si $k \in B \quad \Rightarrow \quad |t_j(k-n) - t_j(k)| = 0.$
- Si $k \in A \quad \Rightarrow \quad |t_j(k-n) - t_j(k)| = |\frac{1}{k-n} - \frac{1}{k}| = \frac{|n|}{|k(k-n)|} \leq \frac{|n|}{2^{2(j-1)}}$, además, $|A| \leq 2 \cdot 2^{j-1} = 2^j$.
- Si $k \in C \quad \Rightarrow \quad |t_j(k-n) - t_j(k)| \leq \frac{1}{2^{j-1}}$, y $|C| \leq 4|n|$.

Luego, para tales n

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} |t_j(k-n) - t_j(k)| &= \textstyle\sum_{k\in A} + \sum_{k\in B} + \sum_{k\in C} \\ &\leq \frac{|n|}{2^{2(j-1)}} \cdot 2^j + 0 + \frac{1}{2^{j-1}} \cdot 4|n| \ = \ \frac{6|n|}{2^{j-1}} \\ &\leq 12\frac{|n|}{2^j} \end{aligned}$$

2. $|n| \geq 2^{j-1}$
   Si $j > 1$,

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} |t_j(k-n) - t_j(k)| &\leq 2\textstyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} |t_j(k)| \ = \ 4\sum_{k=2^{j-1}}^{2^j-1} \frac{1}{k} \\ &\leq 4\int_{2^{j-1}-1}^{2^j-1} \frac{1}{x}dx \\ &= 4\ln x|_{2^{j-1}-1}^{2^j-1} \\ &= 4\ln\frac{2^j-1}{2^{j-1}-1} \ \leq \ 8 \qquad (\star) \\ &\leq 16\frac{|n|}{2^j} \qquad \text{pues } \ |n| \geq 2^{j-1} \end{aligned}$$

$(\star)$ $j > 1 \ \Rightarrow \ \frac{2^j-1}{2^{j-1}-1} \ \leq \ 3 \ \Rightarrow \ \ln\frac{2^j-1}{2^{j-1}-1} \ \leq \ 2$

Si $j = 1$ esta acotación sale directa.

En consecuencia,

$$\begin{aligned} (\spadesuit) &\leq \textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |t_i(n)| 16\frac{|n|}{2^j} \\ &= 16\textstyle\sum_{|n|=2^{i-1}}^{2^i-1} \frac{1}{|n|}\frac{|n|}{2^j} = 16 \cdot 2 \cdot 2^{i-1} \cdot 2^{-j} \\ &= 16 \cdot 2^{i-j} \end{aligned}$$

De esta forma,

◇ Si $i < j$, $\| \, t_i * t_j \, \|_1 \leq 16 \cdot 2^{-|i-j|}$.

28

◇ Si $j < i$, $\| t_i * t_j \|_1 = \| t_j * t_i \|_1 \leq 16 \cdot 2^{j-i} = 16 \cdot 2^{-|i-j|}$.

Entonces, $\| T_i^* T_j \| \leq 16 \cdot 2^{-|i-j|}$.

- De igual manera, $\| T_i T_j^* \| \leq 16 \cdot 2^{-|i-j|}$, pues

$$\begin{aligned} \| T_i T_j^* \overline{s} \| &= \| T_i(\tilde{t_j} * \overline{s}) \| = \| t_i * \tilde{t_j} * \overline{s} \| \leq \| t_i * \tilde{t_j} \|_1 \| \overline{s} \| = \| t_i * t_j \|_1 \| \overline{s} \| \\ &\leq 16 \cdot 2^{-|i-j|} \| \overline{s} \|. \end{aligned}$$

- Finalmente, como

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{16}{2^k}} = 4 \sum_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^k < \infty,$$

estamos en las hipótesis del lema de Cotlar.

De esta manera obtenemos la desigualdad $\| H_M \overline{s} \|_{\ell^2} \leq C \| \overline{s} \|_{\ell^2}$, de la cual se deduce que $\{H_M \overline{s}\}_{M \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\ell^2(\mathbb{Z})$ y entonces $H_M \overline{s}$ converge en $\ell^2$ a una sucesión $\overline{\sigma}$ tal que $\| \overline{\sigma} \|_{\ell^2} \leq C \| \overline{s} \|_{\ell^2}$. Luego, una subsucesión $H_{M_k} \overline{s}(j)$ converge puntualmente a $\overline{\sigma}(j)$. Pero el límite puntual de $H_{M_k} \overline{s}(j)$ es el mismo que el límite puntual de $H_M \overline{s}(j)$ y por lo tanto $\overline{\sigma}(j) = H\overline{s}(j) \ \ \forall j \in \mathbb{Z}$ y $\| H\overline{s} \|_{\ell^2} \leq C \| \overline{s} \|_{\ell^2}$.

### 5.2.2. Transformada de Hilbert truncada

Operando de manera similar que en el caso discreto, aplicando el lema de Cotlar se puede demostrar fácilmente que las transformadas de Hilbert truncadas están uniformemente acotadas [G].

Para $i, j \in \mathbb{Z}$, $i < j$, $f \in L^2(\mathbb{R})$ definimos por

$$H_{ij} f(x) = h_{ij} * f(x) = \int_{2^i < |x-t| \leq 2^j} \frac{f(t)}{x-t} dt$$

las transformadas de Hilbert truncadas (entre potencias de 2, de manera discreta), donde

$$h_{ij}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si} \quad 2^i < |x| \leq 2^j \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Considerando las funciones de $L^1(\mathbb{R})$

$$h_j(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si} \quad 2^{j-1} < |x| \leq 2^j, j \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sino.} \end{cases}$$

29

definimos los operadores $T_j : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ por

$$T_j f = h_j * f.$$

Así, tenemos que:

$$H_{ij} f = h_{ij} * f = (\sum_{k=i}^{j} h_k) * f = \sum_{k=i}^{j} (h_k * f) = \sum_{k=i}^{j} T_k f.$$

Veamos que los operadores $T_j$ verifican las hipótesis del lema de Cotlar, y en consecuencia

$$\| H_{ij} f \|_2 \leq C \| f \|_2$$

con $C > 0$ independiente de $i, j, f$.

Para esto, calculemos en primer lugar los adjuntos de los operadores $T_j$. Definiendo $\tilde{h_j}(x) = h_j(-x)$ tendremos $T_j^* f = \tilde{h_j} * f$.

En efecto, para $f, g \in L^2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
\langle T_j f, g \rangle &= \int_{\mathbb{R}} (T_j f)(x) g(x) dx \\
&= \int (h_j * f)(x) g(x) dx \\
&= \int \int f(t) h_j(x-t) dt g(x) dx \\
&= \int \int f(t) h_j(x-t) g(x) dt dx \\
&= \int \int f(t) h_j(x-t) g(x) dx dt \\
&= \int f(t) \int \tilde{h_j}(t-x) g(x) dx dt \\
&= \int f(t) (\tilde{h_j} * g)(t) dt \\
&= \langle f, T^* g \rangle
\end{aligned}$$

Luego, por la desigualdad de Young para la convolución, para $i \leq j$,

$$\| T_i^* T_j f \|_2 = \| \tilde{h_i} * (h_j * f) \|_2 = \| (\tilde{h_i} * h_j) * f \|_2 \leq \| \tilde{h_i} * h_j \|_1 \| f \|_2$$

entonces $\| T_i^* T_j \|_2 \leq \| \tilde{h_i} * h_j \|_1$.

30

Como $\int h_j(x)dx = 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\| \tilde{h_i} * h_j \|_1 &= \int_x |\int_t \tilde{h_i}(t) h_j(x-t)dt|dx \\
&= \int_x |\int_t \tilde{h_i}(t)[h_j(x-t) - h_j(x)]dt|dx \\
&\leq \int_x \int_t |\tilde{h_i}(t)||h_j(x-t) - h_j(x)|dtdx \\
&= \int_t |\tilde{h_i}(t)| \int_x |h_j(x-t) - h_j(x)|dxdt
\end{aligned}$$

Observando que $h_j(x) = 2^{-j}h_0(2^{-j}x)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_x |h_j(x-t) - h_j(x)|dx &= 2^{-j} \int_x |h_0\left(\frac{x-t}{2^j}\right) - h_0\left(\frac{x}{x^j}\right)|dx \\
&= \int |h_0(z - \frac{t}{2^j}) - h_0(z)|dz
\end{aligned}$$

Consideramos ahora los siguientes casos:

- Si $|\frac{t}{2^j}| \geq \frac{1}{4}$,

$$\begin{aligned}
\int |h_0(z - \tfrac{t}{2^j}) - h_0(z)|dz &\leq \int |h_0(z - \tfrac{t}{2^j})|dz - \int |h_0(z)|dz \\
&\leq 2\int |h_0(z)|dz \\
&= 2 \cdot 2 \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x}dx \\
&= 4 \ln x|_{\frac{1}{2}}^{1} \\
&= 4(-\ln \tfrac{1}{2}) \\
&= 4\ln 2 \leq 4 \leq 16|\tfrac{t}{2^j}|.
\end{aligned}$$

- Si $|\frac{t}{2^j}| < \frac{1}{4}$,
  definiendo el conjunto $J_0 = \{x : \frac{1}{2} < |x| \leq 1\}$
  y la partición de $\mathbb{R}$ dada por:

$$\begin{aligned}
A &= \{x: \ x \in J_0 \ \wedge \ x - \tfrac{t}{2^j} \in J_0\}, \\
B &= \{x: \ x \notin J_0 \ \wedge \ x - \tfrac{t}{2^j} \notin J_0\}, \\
C &= \{x: \ x \in J_0 \ \veebar \ x - \tfrac{t}{2^j} \in J_0\},
\end{aligned}$$

  entonces tenemos que

31

- si $x \in B$, $|h_0(x) - h_0(x - \frac{t}{2^j})| = 0$,
- si $x \in A$, $|h_0(x) - h_0(x - \frac{t}{2^j})| = \frac{|\frac{t}{2^j}|}{|x(x-2^{-j}t)|} \leq 4|\frac{t}{2^j}|$, pues $|x| \geq \frac{1}{2}$ y $|x - \frac{t}{2^j}| \geq \frac{1}{2}$, por definición de $A$,
- si $x \in C$, $|h_0(x) - h_0(x - \frac{t}{2^j})| \leq 2$, pues o bien $h_0(x) = 0$ ó $h_0(x - \frac{t}{2^j}) = 0$, por definición de $C$.

Además, $|A| \leq |J_0| = 1$, $|C| \leq 4|\frac{t}{2^j}|$. Por lo tanto,

$$\int |h_0(z - \frac{t}{2^j}) - h_0(z)|dz = \int_A + \int_B + \int_C \leq 4|\frac{t}{2^j}| + 0 + 2 \cdot 4|\frac{t}{2^j}| = 12|\frac{t}{2^j}|.$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned}
\| \tilde{h}_i * h_j \|_1 &\leq \int_t |\tilde{h}_i(t)| \int_x |h_j(x-t) - h_j(x)|dxdt \\
&\leq 16 \int_t |\tilde{h}_i(t)||\tfrac{t}{2^j}|dt \\
&= 16 \int_{2^{i-1}<|t|\leq 2^i} \tfrac{1}{|t|}|\tfrac{t}{2^j}|dt \\
&= 16\tfrac{1}{2^j} \cdot 2 \cdot 2^{i-1} = 16 \cdot 2^{i-j}.
\end{aligned}$$

Hemos obtenido de esta forma que

$$\| T_i^* T_j \|_2 \leq \| \tilde{h}_i * h_j \|_1 \leq C2^{-|i-j|}, \text{ para } i, j \in \mathbb{Z},$$

en vista de que para el caso $i > j$ basta observar que $\tilde{h}_i * h_j = h_j * \tilde{h}_i$ y que $|\tilde{h}_i(x)| = |h_i(x)|$, y proceder como antes.

De manera similar, se tiene que

$$\| T_i T_j^* \|_2 \leq C2^{-|i-j|}.$$

Finalmente, como

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{C}{2^k}} = \sqrt{C} \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k < \infty,$$

estamos en las hipótesis del lema de Cotlar.

Cabe observar que aunque hemos demostrado la acotación uniforme de las transformadas de Hilbert truncadas de una manera discreta particular, un argumento posterior nos permite llegar al mismo resultado para truncamientos generales dados por

$$H_{\varepsilon R} f(x) = (h_{\varepsilon R} * f)(x) = \int_{\varepsilon < |x-t| \leq R} \frac{f(t)}{x-t} dt$$

32

donde $0 < \varepsilon < R$.

**Observación:** *Acotación de las transformadas de Hilbert truncadas mediante la desigualdad de Young.*

Dados $i, j \in \mathbb{Z}$, $i < j$, $f \in L^2(\mathbb{R})$, hemos definido

$$H_{ij}f(x) = h_{ij} * f(x) = \int_{2^i < |x-t| \leq 2^j} \frac{f(t)}{x-t} dt$$

con

$$h_{ij}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si} \quad 2^i < |x| \leq 2^j \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Como

- $h_{ij} \in L^1(\mathbb{R})$, pues

$$\begin{aligned} \| h_{ij} \|_1 &= \int_{2^i < |x| \leq 2^j} |\tfrac{1}{x}| dx \\ &= 2 \int_{2^i}^{2^j} \tfrac{1}{x} dx \\ &= 2(\ln(2^j) - \ln(2^i)) \\ &= 2(\ln 2)(j-i), \quad \text{y} \end{aligned}$$

- $f \in L^2(\mathbb{R})$

por la desigualdad de Young obtenemos que $(h_{ij} * f) \in L^2(\mathbb{R})$ y

$$\| H_{ij}f \|_2 = \| h_{ij} * f \|_2 \ \leq \ \| h_{ij} \|_1 \| f \|_2 \ \leq \ 2(\ln 2)(j-i) \| f \|_2.$$

Pero esta acotación no resulta uniforme ya que $(j-i)$ se hace arbitrariamente grande cuando, por ejemplo, $i = 1$ y $j \to \infty$.

# Referencias

[SS] E. M. Stein, R. Schakarchi, *Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2005.

[Cr] O. Christensen, *An Introduction to Frames and Riesz Bases*, Birkhäuser, Boston, 2003.

[R] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, Inc., second edition, 1991.

[S] E. M. Stein, *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

[C] M. Cotlar, *A combinatorial inequality and its application to L2 spaces*, Revista Matemática Cuyana, vol. 1, pag. 41-55, 1955.

[G] M. de Guzmán, *Real Variable Methods in Fourier Analysis*, North Holland Publishing Company, 1981.

# Comunicaciones REM 2012

Universidad Nacional de Córdoba

Córdoba

## Enseñanza de la Matemática Universitaria

**Autor: Héctor Agnelli**
**Lugar: Universidad Nacional de Río Cuarto**
**Categoría: Reflexiones. Nivel: Universitario**

### Caracterización aleatoria del valor p y sus implicancias para la inferencia

Es una práctica rutinaria entre los usuarios de la estadística utilizar el valor p de un test como parte de un procedimiento de decisión para rechazar o no la hipótesis nula, dado que su cálculo es efectuado por algún software estadístico su aplicación está casi automatizada. Sin embargo la ausencia de reflexión acerca del significado del mismo lleva a asignarle interpretaciones incorrectas tales como: creer que el valor p entrega la probabilidad de que la hipótesis nula sea verdadera, que valores pequeños del mismo implican un efecto de tratamiento de gran magnitud o que es una evidencia a favor de la replicación de los resultados. Considerando que en la etapa de su enseñanza presentaciones alternativas del tema pueden contribuir a disipar interpretaciones erróneas como las señaladas, en el presente trabajo se hace una caracterización de la naturaleza aleatoria del valor p: como una probabilidad, como una variable aleatoria y como un estadístico. También se presentan simulaciones que procuran aclarar el verdadero alcance del valor p.

**Autor: Adrián Alvarez**
**Lugar: UTN Facultad Regional Avellaneda**
**Categoría: Relatos de experiencias. Nivel: Universitario**

### La vocación usada como motor de desarrollo cognitivo

Es la propuesta de trabajo anual de aplicación del análisis numérico a problemas concretos de la electrónica. En estos problemas se busca generar creatividad, soluciones ingeniosas y rigurosidad científica para formar ingenieros capaces de observar, detectar necesidades o encontrar espacios para ubicar propuestas, se pide que sea en grupos, para incentivar la tarea en equipos, además de integrar alumnos en distintos estados de la carrera para traccionar a los mas jóvenes a las aplicaciones concretas, también generar la capacidad de proponer y resolver problemas con soluciones novedosas con suficiente seguridad y la autoridad académica que brinda una sólida formación teórica. La siguiente es la dirección del blog que usamos para interactuar con los alumnos: http://calculonumerico-numerico.blogspot.com/ donde se puede ver el desarrollo de la materia.

La idea en este trabajo es transmitir a mis colegas una forma de presentar los temas desde la propia práxis del alumno, poniendo lo contextual, más precisamente desde la afinidad vocacional como elemento motivador, y dejar la descontextualización a cargo del grupo de alumnos. Es necesario poner el marco general de aplicación de la siguiente propuesta. Para cursar la materia Cálculo Numérico, los alumnos deben tener aprobadas la totalidad de las materias básicas, esta situación se puede alcanzar formalmente en el segundo año aunque en la práctica es común que se curse en el cuarto año de la carrera.

---

**Autores: Angélica R. Arnulfo, Cintia G. Cianciardo y José A. Semitiel**
**Lugar: Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura - Universidad Nacional de Rosario**
**Categoría: Relatos de experiencias. Nivel: Universitario**
**Expositores: Angélica R. Arnulfo y José A. Semitiel**

---

Incorporación de las nuevas tecnologías para el estudio de la existencia de solución de un problema de valor inicial

El siguiente trabajo relata una experiencia de cátedra llevada a cabo con alumnos de un curso de Análisis Matemático III correspondiente al año 2012 del ciclo básico de las carreras de Ingeniería de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario. Está enmarcado en el proyecto 1ING299 "El aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales como herramientas de modelización en la Matemática básica para las carreras de Ingeniería" dirigido por la Lic. Martha Fascella. Trata acerca del estudio de la existencia de solución de un problema de valor inicial (PVI) para el cual se utilizaron diferentes estrategias analíticas como también herramientas computacionales, que permitió justificar experimentalmente que el PVI dado carece de solución.

---

**Autores: Angélica Arnulfo, Alicia Kurdobrin y Pablo Sabatinelli**
**Lugar: Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (UNR)**
**Categoría: Relatos de experiencia. Nivel: Universitario**
**Expositor: Alicia Kurdobrin**

---

Integrales triples: una experiencia didáctica en carreras de ingeniería

Hemos detectado a través de varios años de trabajar en la asignatura Análisis Matemático II de las carreras de Ingeniería, que se presentan grandes dificultades en la descripción de la región de integración y en consecuencia en el planteo de la integral múltiple como integrales iteradas. La situación no se circunscribe únicamente a regiones descriptas en sistemas coordenados cartesianos ortogonales sino que también se presenta en sistemas coordenados generales.

Este trabajo consiste en mostrar una experiencia áulica que intenta enriquecer los ejercicios que se presentan en los libros de texto que se usan habitualmente. Se busca mejorar la visualización que tienen los estudiantes de los dominios de integración para integrales múltiples.

**Autores: María Belén Celis y Ana María Vozzi**
**Lugar: Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura - Universidad Nacional de Rosario.**
**Categoría: Relato de experiencia. Nivel: Universitario**
**Expositor: María Belén Celis**

---

Propuesta de enseñanza para la lectura autónoma

El presente trabajo se encuadra en el proyecto de investigación "El libro de texto como factor coadyuvante en la producción de los conocimientos" dirigido por la Prof. Martha Elena Guzmán. En el marco de nuestro proyecto de investigación nos hemos preguntado frecuentemente ¿cómo colaborar para que los estudiantes asuman el compromiso de un aprendizaje autónomo?

La base de esta propuesta es guiar al alumno en la lectura comprensiva de conceptos, propiedades y teoremas cuando éste aborda los temas a partir de la lectura de un libro de texto. Como docentes queremos instalar en el alumno la actitud de que al leer el libro de texto además de informarse sobre un contenido particular atienda a las explicaciones que este proporciona y sea capaz de relacionar conceptos, proporcionando ejemplos y aplicaciones. Se busca lograr que el estudiante se convierta en un lector autónomo, cuestionando e investigando conceptos, propiedades y resultados. El tema seleccionado para este trabajo es "Transormaciones lineales: Núcleo y Contradominio", del libro Álgebra lineal con aplicaciones de G. Nakos y D. Joyner, a partir de las definiciones, teoremas, propiedades y ejemplos que el libro propone, se realizó una propuesta de estudio para dichos temas.

---

**Autores: Marcela Cifuentes y María Teresa Juan**
**Lugar: Centro Regional Universitario Bariloche - Universidad Nacional del Comahue**
**Categoría: Relato de experiencia. Nivel: Secundario, ingreso a la universidad**
**Expositor: Marcela Cifuentes**

---

Una experiencia de articulación entre el colegio secundario y la universidad. Taller de matemática: un puente entre el colegio secundario y la universidad

En esta comunicación se relata una experiencia de articulación entre el nivel secundario y la universidad, a través de un Taller de Matemática denominado "Un puente entre el colegio secundario y la Universidad". Dicho taller se llevó a cabo en el Centro Regional Bariloche de la Universidad Nacional del Comahue, y estuvo destinado a los alumnos de 5to y 6to año de los diferentes colegios secundarios de la ciudad de Bariloche. El curso estuvo organizado en tres ejes: Eje 1: Lenguaje, pensamiento y método matemático, Eje 2: Funciones, Eje 3: Pensamiento Numérico. Se optó por la modalidad de Taller como metodología de trabajo tendiente a favorecer la actividad creadora y reflexiva de los estudiantes. El objetivo principal de la propuesta es suministrar a los estudiantes de nivel secundario una primera instancia de acercamiento a la universidad tanto a su espacio físico como al abordaje de contenidos matemáticos.

**Autores: Cristina Egüez y Antonio Sángari**
**Lugar: Facultad de Ciencias Exactas y Consejo de Investigación de la Universidad Nacional de Salta**
**Categoría: Reflexiones. Nivel: Universitario**
**Expositor: Cristina Egüez**

### Optimización sin cálculo diferencial

Los problemas de optimización se pueden, por regla general, reducir al estudio de una función en forma analítica y muchas veces el cálculo se hace tedioso. Aquí presentamos la resolución de problemas de área y volumen mínimos, en el plano y en el espacio, a través de razonamientos geométricos interesantes que permiten alcanzar el objetivo más rápidamente y formular algunas conjeturas.

**Autores: Mauricio A. Martel y María Elena Markiewicz**
**Lugar: Universidad Nacional de Río Cuarto**
**Categoría: Relato de experiencia. Nivel: Educación superior**
**Expositores: Mauricio A. Martel y María Elena Markiewicz**

### Una propuesta para promover la articulación entre temas básicos de álgebra y computación

Este trabajo se basa en un problema didáctico que hemos detectado en el ámbito de las carreras de Analista en Computación, Profesorado y Licenciatura en Ciencias de la Computación en el ámbito de nuestra universidad, vinculado a la falta de integración entre los contenidos que se trabajan en las asignaturas básicas de matemática que se imparten en el primer año de estas carreras (en particular, en la asignatura Introducción al Algebra) con cuestiones específicas referidas a la Computación. El objetivo de este trabajo es mostrar una propuesta de cómo relacionar dichas cuestiones, de manera que los alumnos puedan, desde el comienzo de su carrera, vincular contenidos y tener una visión más clara de las importantes aplicaciones que tienen ciertos temas claves de Algebra en las Ciencias de la Computación. Esta propuesta apunta a que los alumnos puedan construir un significado diferente de los objetos estudiados, enriquecido con nuevas situaciones estrechamente vinculadas a la computación, promoviendo así una relación diferente con los saberes que les van a ser de utilidad en su futura práctica profesional.

**Autores: Silvana Puca y Cristina Egüez**
**Lugar: Facultad de Ciencias Exactas y Consejo de Investigación de la Universidad Nacional de Salta**
**Categoría: Relato de experiencias. Nivel: Universitario**
**Expositores: Silvana Puca y Cristina Egüez**

## Un enfoque para la enseñanza de la diferenciabilidad en el cálculo multivariable

Este trabajo tiene como propósito dar a conocer una experiencia con software realizada en la cátedra de Análisis Matemático II (cálculo multivariable) de la Licenciatura en Análisis de Sistemas. El objetivo de la misma fue abordar un tema central del cálculo, como es la diferenciabilidad, a partir de la generalización natural del caso de una variable, tanto en su aspecto analítico como geométrico. La experiencia, concretamente, se realizó en el desarrollo de la derivabilidad, la regla de la cadena y la optimización, para destacar la importancia de la diferenciabilidad y aprovechar la interpretación geométrica de los resultados obtenidos. Para esto, las actividades se realizaron en las clases prácticas en un laboratorio de informática y a través de un foro de discusión de la página web de la cátedra donde se incorporaron además archivos con música y animación. Los alumnos desarrollaron una guía de estudio dirigida, que les permitió aplicar los conceptos teóricos, interpretarlos geométricamente y visualizarlos. Se propició también la elaboración de conjeturas sobre propiedades observadas, para luego buscar una demostración formal de las mismas.

**Autores: Cinthia Rougier y Sara Scaglia**
**Lugar: Facultad de Humanidades y Ciencias, Universidad Nacional del Litoral**
**Categoría: Relato de experiencia. Nivel: Universitario**
**Expositor: Cinthia Rougier**

## Una experiencia con futuros profesores basada en la formulación y contrastación de conjeturas

En este trabajo se describe una experiencia áulica desarrollada con futuros profesores de matemática, con el objetivo de generar la posibilidad de que los estudiantes tengan la oportunidad de desarrollar procesos de formulación y contrastación de conjeturas durante su formación disciplinar.

Las intervenciones del docente y de los alumnos permiten avanzar en la formulación de conjeturas con creciente grado de generalidad. En el ejemplo presentado, las conjeturas formuladas se demuestran mediante una actividad de justificación desarrollada a partir de las interacciones entre el docente y los alumnos.

Se ponen de manifiesto algunas de las dificultades inherentes a este tipo de trabajo, como por ejemplo la posibilidad de que algunas discusiones no puedan ser seguidas por todos los alumnos, cuestión que se agudiza cuando se trata de cursos numerosos.

Más allá de estas limitaciones, la experiencia se valora como muy fructífera para todos los participantes, lo que conduce a subrayar la necesidad de que los futuros profesores puedan familiarizarse con este tipo de trabajo durante su formación inicial.

## Educación de Adultos/ Formación Docente/ Educación a Distancia

**Autores: Graciela Lilian Andreani, Gabriela Marijan y Adrián Ortega**
**Lugar: Universidad Nacional de Salta, Sede Regional Tartagal, Salta**
**Categoría: Trabajo de Investigación. Nivel: Nivel Superior**
**Expositores: Graciela Lilian Andreani, Gabriela Marijan y Adrián Ortega**

### De la incorporación de los recursos tecnológicos a la implementación de la modalidad semipresencial en el CIU

En este trabajo exponemos la experiencia realizada, en la Sede Regional Tartagal de la Universidad Nacional de Salta, en el Curso de Ingreso Universitario realizado en el periodo 2012, con modalidad semipresencial, para las carreras Ingeniería y Tecnicatura en Perforaciones. Presentamos datos obtenidos en el curso de ingresos 2011 y del seguimiento realizado, a estos alumnos, en la disciplina matemática.

Por otra parte, explicamos las variables que tuvimos en cuenta para desarrollar el aula virtual para alumnos ingresantes, el trabajo realizado con el procesador wiris integrado como módulo externo a la plataforma moodle y los nuevos interrogantes que se despliegan en la búsqueda de mejorar la permanencia de los alumnos en el nivel universitario.

**Autores: Graciela Andreani, Gabriela Marijan y Adrián Ortega**
**Lugar: Universidad Nacional de Salta, Sede Regional Tartagal, Salta**
**Categoría: Trabajo de investigación. Nivel: Superior**
**Expositores: Graciela Andreani, Gabriela Marijan y Adrián Ortega**

### La construcción de un aula virtual para facilitar el aprendizaje de la matematica: nuestro desafío actual

En los últimos cuatro años, en la asignatura Matemática I, pusimos en marcha un proyecto de investigación aprobado por el CIUNSa- Consejo de Investigación de la Universidad Nacional de Salta-, el cual tiene como objetivo mejorar la permanencia de los alumnos ingresantes al primer año de la carrera de Ingeniería en Perforaciones, a través de la implementación de una nueva propuesta metodológica de aprendizaje y enseñanza. Esta nueva propuesta consistió en la incorporación de un Aula Virtual como extensión y complementación del dictado de las clases presenciales y la implementación paulatina de tareas virtuales y a distancia.

A partir de la implementación del proyecto, y de manera gradual, fuimos modificando las prácticas docentes, y produciendo cambios significativos en las mismas. En este trabajo intentamos compartir el largo trayecto, enmarañado pero sostenido en el tiempo, desde una metodología tradicional basada en clases expositivas con poca participación de los alumnos hasta una modalidad intermedia entre el extended learning y el blended learning, centrada en el aprendizaje de los alumnos y la incorporación de recursos, diseñados por los docentes, que posibilitan la mediación tecnológica entre alumnos y contenidos a través de actividades interactivas de aprendizaje y autocontrol.

**Autor: María Fernanda Delprato**
**Lugar: CIFFyH (Centro de Investigaciones de la Facultad de Filosofía y Humanidades "María Saleme de Burnichón"), Universidad Nacional de Córdoba**
**Categoría: Trabajo de investigación. Nivel: Nivel primario de adultos**

El calendario: ¿recurso u objeto de enseñanza?

En esta presentación comunicaremos algunos modos de intervención en un taller de educadores implementado en el marco del trabajo de campo de una tesis de doctorado en curso "Condiciones de la enseñanza matemática a adultos con baja escolaridad" (Doctorado en Educación de FFyH, UNC, directora: Dra. Dilma Fregona), en torno a un portador de información numérica: el calendario. La intención es reconstruir las concepciones que fueron revisadas en este taller, su incidencia en las decisiones de algunos episodios de aula sobre el desempeño de los alumnos adultos.

Nota: Este trabajo se ha realizado con la colaboración de: Aguilar, Gabriela; Arredondo, Adriana; Fregona, Dilma y Schiapparelli, Paula.

**Autores: Dilma Fregona, Pilar Orús**
**Lugar: Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba y Universidad Jaime I, Castellón, España**
**Categoría: Trabajo de investigación. Nivel: Formación inicial y continua de docentes que enseñan matemática**
**Expositor: Dilma Fregona**

Enseñar la división en la escuela primaria: un problema de investigación y de formación docente

Comunicaremos aspectos de un trabajo colectivo realizado en un taller donde un equipo de seis docentes de diferentes niveles y modalidades, se propuso estudiar, problematizar y reconstruir un informe de actividades para la enseñanza de la división en el nivel primario. Ese informe surgió de un trabajo en colaboración publicado en 1985 por la Universidad de Bordeaux, y se implementó reiteradamente en la Escuela Jules Michelet de Talence. En este establecimiento público, durante más de 25 años, se confrontaron con la contingencia, estudios teóricos en el marco de la Teoría de las Situaciones Didácticas.

El taller se desarrolló sistemáticamente durante el año 2011. Las dudas, las consultas a otros documentos, etc. fueron registradas por cada uno de los participantes en un archivo que es objeto de análisis. Expresamos el objetivo de nuestro trabajo como: "estudiar la secuencia para enseñar la división, y profundizar en el texto para acordar sobre el modo de comunicación de dicha secuencia".

Mostraremos también cómo la posibilidad de interactuar con quienes diseñaron e implementaron esas clases, sumado al acceso a los recursos documentales disponibles en la Universidad Jaime I (España), suministra valiosos aportes para la reconstrucción de la secuencia y posibles modos de comunicación a otros actores del sistema.

Nota: Agradecemos a Marie Hélène Salin por la atenta lectura y las sugerencias realizadas.

---

**Autores: José Nicolás Gerez Cuevas**
**Lugar: Facultad de Filosofía y Humanidades, UNC**
**Categoría: Trabajo de investigación. Nivel: Nivel primario en la modalidad de Educación Permanente de Jóvenes y Adultos.**

---

## Condiciones para la educación matemática en la modalidad de jóvenes y adultos

El presente trabajo apunta a comunicar algunos avances de una investigación en curso [2] que tiene como objetivo explorar y analizar problemáticas del oficio docente que emergen de las condiciones en que se desenvuelve la oferta semipresencial en la modalidad de Educación Permanente de Jóvenes y Adultos, en relación a la enseñanza de saberes matemáticos. En particular, en esta comunicación se busca presentar algunos aspectos de la complejidad de la educación matemática en la modalidad de jóvenes y adultos, a través de un análisis descriptivo de las condiciones en las que se desarrollan las prácticas de enseñanza que son objeto de la investigación.

[2]Investigación titulada "La enseñanza de saberes matemáticos en la oferta semipresencial de nivel primario de la modalidad de jóvenes y adultos" y enmarcada en el Trabajo Final de la Licenciatura en Ciencias de la Educación, dirigido por la Mgter. Ma. Fernanda Delprato y codirigida por la Dra. Dilma Fregona, con proyecto aprobado por el Consejo de la Escuela de Cs. de la Educación Fac. de Filosofía y Humanidades Universidad Nacional de Córdoba.

# Álgebra y su Enseñanza

**Autores: Adolfo R. Aguirre y Alejandra del C. Acevedo**
**Lugar: Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Catamarca**
**Categoría: Reflexiones. Nivel: Nivel Medio**
**Expositores: Adolfo R. Aguirre y Alejandra del C. Acevedo**

## Los diferentes estatus de las letras en el simbolismo algebraico

Tomando como punto de partida la resolución de una ecuación fraccionaria se plantea el problema de los tres estatus que distinguimos para las letras en el marco de la introducción del simbolismo algebraico: 1) Incógnita en la ecuación dada, 2) variable de la función dada por el primer miembro de la ecuación y 3) indeterminada de una expresión algebraica a la cual se asocia una función. Se discute el principal punto crítico: valores que anulan al numerador y al denominador y se dan las conclusiones.

Este trabajo se enmarca en el Proyecto de Investigación denominado: "La Presentación Conceptual del Simbolismo Algebraico: Marco Teórico, Problemas de Transferencia, Propuesta Testeada" en proceso de ejecución en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Catamarca.

**Autores: Claudina Canter y Silvia Etchegaray**
**Lugar: Universidad Nacional de Río Cuarto**
**Categoría: Trabajo de Investigación. Nivel: Formación de profesores y licenciados en Matemática**
**Expositores: Claudina Canter y Silvia Etchegaray**

## La teoría de las ecuaciones algebraicas: un primer análisis epistémico

El Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) remarca la importancia, para la Didáctica de la Matemática, de indagar sobre la naturaleza de los contenidos matemáticos pues no es posible estudiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de objetos difusos o indefinidos. En este marco se desarrolla este trabajo que forma parte de una tesis de Licenciatura en Matemática, la cual se está desarrollando en la Universidad Nacional de Río Cuarto. En el mismo abordamos el estudio de la construcción de la Teoría Algebraica de Ecuaciones. El tema de estudio fue elegido teniendo en cuenta que esta Teoría es hoy un tema cerrado que alcanzó su completa madurez hace mucho tiempo, en el sentido que ha logrado llegar a la caracterización total de las ecuaciones que poseen el tipo de solución buscada. Esto hace que sea posible desvelar todos los estadios en la construcción de la misma. Además es un tema elemental, presente en todos los niveles educativos, y que a su vez conduce a nociones, conceptos, propiedades, lenguajes y formas de razonar fundamentales del álgebra escolar obligatoria y superior.

---

**Autor: Augusto Ariel Estrada Velasquez**
**Lugar: Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de Salta**
**Categoría: Relato de experiencia. Nivel: Universitario**

---

Tutoriales: una estrategia de enseñanza para complementar la tarea del aula en el aprendizaje de álgebra lineal y geometría analítica

Este trabajo relata una experiencia desarrollada con un grupo de estudiantes que cursan la asignatura Algebra Lineal y Geometría Analítica del primer año de diversas carreras de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de Salta.

En 2010 se cambia el Plan de Estudios Licenciatura en Análisis de Sistemas disminuyendo la carga horaria con respecto al resto de las carreras. Como docente, a cargo de las clases prácticas, buscando estrategias de enseñanza que suplan esta disminución de tiempo en la presencialidad y hagan uso de las nuevas tecnologías, me propuse complementar el trabajo del aula mediante elaboración de tutoriales para cada uno de los trabajos prácticos poniéndolos a disposición de los estudiantes usando el correo electrónico.

Para responder a los retos que demanda la sociedad de la información y la comunicación, se postula como uno de los pilares el de Aprender a aprender. En concordancia con ello, los tutoriales, se conciben como un instrumento además de enseñar procedimientos, enseñen a aprender. De allí que en su desarrollo se busca mostrar al aprendiz, que debe realizar una tarea, el qué se debe hacer, el cómo se debe hacer y el por qué se hace de uno u otro modo.

---

**Autor: Diego Isaías Ibañez**
**Lugar: Departamento de Formación Docente y Educación Científica, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Catamarca**
**Categoría: Trabajos de investigación. Nivel: Secundario**

---

Caracterización de la utilización de lenguajes matemáticos en alumnos de la secundaria

El uso de los lenguajes matemáticos es una de las dificultades más importantes en el aprendizaje de la Matemática; su relación con conceptos, propiedades e interpretaciones de los alumnos se presenta en forma constante en las distintas situaciones áulicas, cualquiera sea el tema o la rama de la matemática que se trate. Esta problemática inicia la investigación que se realiza en 8° año de la N.E.S. de la Escuela Preuniversitaria Fray Mamerto Esquiú (UNCa), la cual tiene como meta incentivar a los docentes a plantear sus clases teniendo en cuenta la comunicación en el aula. Para ello se descubren y analizan dificultades y errores en la forma de "expresar" la matemática y su relación con los contenidos y procedimientos involucrados. En este trabajo se consideran los dos primeros niveles del análisis didáctico de Font: el primero describe la secuencia de prácticas matemáticas y el segundo los objetos matemáticos implícitos en dichas prácticas. Además se analizan, en torno a los objetivos planteados, los conflictos propios del lenguaje utilizado. Las observaciones realizadas se tabularon realizando comentarios sobre las mismas y se compararon los análisis descriptos para la conclusión donde se incluyen recomendaciones sobre la práctica docente.

---

**Autores: Irma Martínez, Jorge Almazán, Marta Lentini, María Lentini y Hernán Crespo**
**Lugar: Facultad de Ciencias Exactas, Facultad de Ingeniería, Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de Salta**
**Categoría: Relatos de experiencias. Nivel: Universitario**
**Expositores: Irma Martínez, Marta Lentini y Hernán Crespo**

---

## Autovalores, autovectores, autoespacios. Diagonalización, con herramientas tecnológicas

El propósito de este trabajo es relatar algunas de las actividades que se están realizando, en el marco del trabajo de investigación: "El uso de software de cálculo simbólico, como complemento en la enseñanza en el área Matemática del CIUNSA"- Consejo de Investigación de la Universidad Nacional de Salta, por docentes de distintas Facultades del área Matemática, integrantes del proyecto. Esta presentación describe el uso y aplicación del soft Maple en una clase normal del tema: autovalores, autovectores, autoespacios y diagonalización, de Álgebra Lineal y Geometría Analítica, asignatura de 1° Año de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de Salta. Como docentes, nos cuestionamos si somos coherentes con lo cambios que provoca la tecnología, y si optimizamos nuestras prácticas, por ello se incorporó el uso de herramientas tecnológicas a las tareas tradicionales, para lograr que los alumnos desarrollen otras estrategias en sus producciones. Aquí nos referimos al trabajo realizado en clases prácticas para el tema citado, con el uso del Soft Maple. Las apreciaciones de los participantes, fueron favorables dado que estiman que el uso de los recursos tecnológicos, favorece la enseñanza-aprendizaje de la Matemática.

## Uso de TIC en la Educación Matemática

**Autores: Patricia Cademartori, V. Cano Kelly , María Giacomone y María Olea**
**Lugar: Facultad de Ciencias Exactas, Imapec, Facultad de Ingeniería, Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación, UNLP**
**Categoría: Relatos de experiencias. Nivel: Secundario**
**Expositores: Patricia Cademartori y María Giacomone**

### Conectar con la igualdad matemática en acción

Presentamos el Proyecto de Voluntariado Universitario Conectar con la Igualdad Matemática en Acción, que fue aprobado en la convocatoria del año 2011 del Programa de Voluntariado Universitario de la Secretaría de Políticas Universitarias del Ministerio de Educación de la Nación "La Universidad se conecta con la Igualdad. Universidad y Escuela Secundaria 2.0". Participan del mismo docentes, alumnos, graduados e investigadores de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación, la Facultad de Ciencias Exactas y la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata. Está dirigido a docentes y alumnos de tres escuelas públicas del radio urbano de la ciudad de La Plata y consiste en la realización de encuentros que involucren el uso de las netbooks del Programa Conectar Igualdad como recurso educativo de las clases de Matemática. Se propuso también la realización de encuentros en las escuelas participantes y en una unidad académica universitaria en los que se presenten a la comunidad de las mismas problemas y juegos que impliquen el uso de las netbooks y en cuya elección y confección hayan participado alumnos y docentes de las escuelas intervinientes.

**Autores: Araceli Coirini Carreras y María Melania Giannone**
**Lugar: FaMAF, UNC**
**Categoría: Relato de experiencia. Nivel: Secundario**
**Expositores: Araceli Coirini Carreras y María Melania Giannone**

### Conectándonos con la matemática potenciando el uso de las TIC en el aula

A partir de 2011, docentes y estudiantes de la FaMAF y de la FCEFyN, desarrollamos dos proyectos de extensión y voluntariado que pretenden contribuir a la consecución de los objetivos planteados en el programa nacional Conectar Igualdad, en el marco de escuelas públicas secundarias de la Provincia de Córdoba. Tales proyectos son, respectivamente: "Potenciemos el uso de las TIC en el entorno de la Matemática y las Ciencias Naturales dentro y fuera de la escuela" y "Conectémonos con la Matemática y la Física a través de las TICs". La experiencia que relataremos está en el marco de los proyectos mencionados y se desarrolló en una escuela pública de Córdoba, que frente a la necesidad de familiarizar a docentes y estudiantes del nivel secundario con el uso de las netbooks para la enseñanza de la Matemática llevamos a cabo diversos talleres. En el desarrollo de estos encuentros se implementaron propuestas para el aula que incorporen las Tecnología de la Información y la Comunicación (TIC) como herramientas para aprender y "pensar con". Algunos de los aportes que esta experiencia brindó fueron un espacio de formación para los docentes, aprendizajes mediante actividades lúdicas para los estudiantes y contribuciones a nuestro desarrollo profesional.

---

**Autores: María de las Mercedes Moya, Mario Ubaldo Avila y Andrea Carolina Monaldi**
**Lugar: Consejo de Investigación de la Universidad Nacional de Salta (CIUNSa)**
**Categoría: Trabajo de Investigación. Nivel: Superior Universitario y no Universitario**
**Expositor: Mario Ubaldo Avila**

---

### Derivadas y ecuaciones diferenciales ordinarias con multimedia

El Proyecto de Investigación Tecnomatemática: aula extendida, dependiente del Consejo de Investigación de la Universidad Nacional de Salta, tiene entre sus objetivos la producción de materiales educativos que sirvan de apoyo para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

En este trabajo se presenta la producción de dos materiales multimediales (los videos), relativos a temas del Análisis Matemático en una variable. Se propone utilizar este medio, acompañándolo con problemas que buscan evaluar el aprendizaje. Pueden ocuparse para la enseñanza y el aprendizaje de las Derivadas y Ecuaciones Diferenciales Ordinarias; temas complejos de enseñar para un docente y aprender para un estudiante. Se presentan "El problema de la velocidad instantánea" y "¿Cómo se enfría una torta?", como videos Instruccionales y Modelizadores de una situación concreta de la realidad.

En ambos videos, se destaca, cómo las distintas ramas de la ciencia, aportan sus ideas y conceptos, para el desarrollo de la matemática y recíprocamente. Docentes y estudiantes pueden tener acceso al material fácilmente y recurrir al mismo cuando lo necesiten. Generan conflictos cognitivos y metacognitivos en el estudiante, que luego son resueltos, y otras situaciones problemáticas que sirven para el entendimiento del tema.

---

**Autor: Luz Bella Cristina Patton**
**Lugar: Escuela de Educación Técnica "Vespucio" N°3136, General Enrique Mosconi, Salta**
**Categoría: Relato de experiencia. Nivel: Secundario**

---

### Enseñar matemática con empleo de las TICs

Hoy las tecnologías han modificado las relaciones sociales en todos los aspectos, llegando a redefinir la manera de interactuar con el medio, esta introducción supone un desafío para todos enseñar matemática desde los lineamientos de la Didáctica utilizando las TICs en forma apropiada, descubriendo las posibilidades que ofrecen.

El trabajo pretende describir y analizar dentro de los marcos teóricos, el recorrido inicial de una propuesta didáctica que combina el empleo de un software de procesamiento simbólico y gráfico GEOGEBRA, un programa de Geometría dinámica con el que pueden construirse páginas interactivas, diseñado como apoyo para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. Las actividades se implementaron desde primer año. La experiencia apunta a poder lograr la evolución de los alumnos partiendo del supuesto de que la mera definición de un concepto no basta para comprenderlo y que el estudio de diversas representaciones gráficas pueden permitir una conceptualización completa y adecuada. En otras palabras, lograr que el medio tecnológico se incorpore a sus esquemas de acción (reorganización conceptual) considerando al alumno y a la tecnología como un sistema inseparable capaz de producir actividad matemática con la misma validez epistemológica que la desarrollada en el entorno habitual de lápiz y papel.

---

**Autores: Nélida Haydée Pérez, Diana Celia Mellincovsky, María Emilce Barrozo, Héctor Páez y Magdalena Pekolj**
**Lugar: Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de San Luis**
**Categoría: Reflexiones. Nivel: Bachillerato - Superior**
**Expositores: Nélida Haydée Pérez y Diana Celia Mellincovsky**

---

## Técnica y tecnología, reflexiones entorno a ecuaciones e inecuaciones

Estas reflexiones surgieron a partir de analizar algunas cuestiones que emergieron en cursos obligatorios que toman alumnos del Profesorado de la UNSL al trabajar el tema de resolución de ecuaciones e inecuaciones en una variable.

Teniendo en cuenta que no es posible ni para el matemático ni para los alumnos actuar eficazmente sino se comprende lo que se hace, como tampoco se puede llevar adelante una comprensión profunda, sino se hace una práctica matemática, nos preguntamos cuáles serían las técnicas didácticas adecuadas para abordar un proceso de estudio.

Adoptamos como marco teórico a la Teoría Antropológica de lo Didáctico para construir una praxeología matemática que permita ingresar a un proceso de estudio.

## Enseñanza Matemática Secundaria

**Autor: Adrián Omar Alvarez**
**Lugar: Instituto Libre de Segunda Enseñanza, UBA**
**Categoría de trabajo: Relatos de experiencias. Nivel: Medio**
**Expositor: Adrián Omar Alvarez**

### Materatura

La matemática es ante todo un lenguaje, áspero extenso riguroso, quien podría encontrar belleza allí, claro quien más que Jorge Luis Borges, que en su cuento La Biblioteca de Babel desarrolla un despliegue único de rigurosidad lógica, una sucesión de afirmaciones estrechamente ligadas en sentido tal sentido, nada allí está librado al azar, recorre diversos aspectos matemáticos en forma sutil llevando de modo irreversible al lector por el universo de razonamientos que el cuento propone.

La tarea propuesta a los jóvenes se trató de: juntarse en pequeños grupos de trabajo encontrar afirmaciones planteadas en el cuento y analizar su validez.

Existe actualmente un interesante debate entre la antigua Educación Algorítmica y las modernas teorías de la Didáctica, como la Teoría de Situaciones. Es fuerte la resistencia de la comunidad educativa a la resolución de situaciones problemáticas, como motor de conocimiento, se acepta en lo discursivo pero no tanto en la praxis. Tal vez el desconcierto inicial ante la situación problemática desconocida, la necesidad de una reflexión y posterior puesta en común con su correspondiente debate, generen momentos incómodos pero necesarios para lograr alguna adquisición del conocimiento que se pretende desarrollar en la situación inicialmente planteada. No se valora que luego, viene la belleza, el hermoso placer de haber logrado la comprensión del problema y poder comunicar como se obtuvo la solución del mismo.

**Autores: Florencia Di Rito y Silvia Bernardis**
**Lugar: Facultad de Humanidades y Ciencias, UNL**
**Categoría: Trabajo de investigación Nivel: Universitario**
**Expositor: Florencia Di Rito y Silvia Bernardis**

### Justificación de respuestas de verdadero-falso

Los ejercicios en los que se solicita a los estudiantes que determinen la verdad o falsedad de proposiciones matemáticas y justifiquen su respuesta, son muy útiles para trabajar la demostración como una actividad significativa para los alumnos. El tratamiento de la demostración presenta dificultades, pues este tipo de ejercicios requiere, para su resolución, de experiencia previa adicional, que va más allá del desarrollo del concepto matemático en cuestión.

En esta comunicación nos proponemos dar a conocer los resultados de una investigación realizada con el objetivo de detectar si los estudiantes de primer año del Profesorado de Matemática presentan dificultades en la justificación de respuestas de verdadero-falso. Partimos de la hipótesis de que los estudiantes tienen dificultades a la hora de realizar este tipo de ejercicios.

---

**Autores: Cristina Esteley, Silvina Smith y Mónica Villarreal**
**Lugar: Universidad Nacional de Córdoba-CONICET**
**Categoría: Investigación. Nivel: Secundario**
**Expositor: Silvina Smith**

---

Un itinerario didáctico en torno a la proporcionalidad en un escenario de modelización matemática

Esta comunicación presenta algunos resultados producidos en el ámbito de una investigación que busca caracterizar el desarrollo profesional de profesores de matemática en escenarios de modelización matemática. En particular informamos brevemente sobre la implementación en aula de un proyecto de modelización desarrollado por tres docentes de nivel secundario que trabajan en una misma institución pública de la ciudad de Córdoba y describimos el itinerario didáctico en torno a la noción de proporcionalidad directa que se constituye durante la puesta en aula. Acompañamos la descripción del itinerario didáctico con un trabajo analítico de *arqueología matemática*, por medio del cual buscamos hacer explícitas y visibles las matemáticas en tal itinerario. A partir del análisis e interpretación de los datos se abre una discusión en relación con los resultados reportados y algunas implicancias de los mismos relativas al desarrollo profesional.

---

**Autores: Adriana Magallanes y Darío Colaneri**
**Lugar: UNRC; IPEM N°119**
**Categoría: Relato de experiencia y Reflexiones. Nivel: Medio**
**Expositor: Adriana Magallanes y Darío Colaneri**

---

Proyecto para una educacion matemática crítica "Diagnóstico de la situación laboral en Alpa Corral"

Este trabajo pretende llevar a la práctica una experiencia áulica enmarcada en una educación matemática crítica. Se propone un escenario de investigación sobre la situación laboral de los habitantes de Alpa Corral, contribuyendo desde la experiencia, a este enfoque de la educación matemática e interrumpiendo con la típica fragmentación que generalmente se propone en la educación secundaria. Asimismo, se plantea que este enfoque permite poner en práctica la educación que hoy se concibe como necesaria desde un paradigma situacional.

Este proyecto pretende contribuir con la educación del estudiante como ciudadano, preparado para vivir en democracia al hacerlo protagonista en el análisis de la realidad social de su entorno. Los estudiantes elaboraron una encuesta para recolectar datos sobre la situación laboral de los habitantes permanentes de Alpa Corral. Esta información fue resumida utilizando tablas y gráficos estadísticos. También se muestra en este trabajo el análisis que los estudiantes realizaron sobre sus resultados; así como sus distintos posicionamientos en las hipótesis explicativas que formularon. Entendemos que este tipo de ambientes de aprendizaje puede favorecer tanto la implicación en el proceso educativo como la autonomía intelectual de los estudiantes.

**Autores: Martina Olivares, Marianela Sosa y Nora M. Zón**
**Lugar: Universidad Nacional de Río Cuarto**
**Categoría: Relatos de experiencia. Nivel: Medio**
**Expositor: Martina Olivares, Marianela Sosa y Nora M. Zón**

Una manera diferente de enseñar recurrencia en primer año de la escuela media

Se presenta una serie de tareas que pretenden mostrar una secuencia de situaciones y dos posibles soluciones de ellas, ya que permiten diferentes entradas para su resolución.

Se podrá ver en la planificación: actividades individuales, de a pares y de equipo.En un momento, la organización de la clase será de manera individual para permitir que los estudiantes se apropien de los problemas. El trabajo en pares permite una confrontación y discusión de las posturas de cada uno; organizar el trabajo en equipos favorece la discusión de procedimientos y argumentaciones empleadas. La puesta en común será primordial, concediendo a los estudiantes la posibilidad de que validen sus producciones, busquen respuestas y se responsabilicen matemáticamente de ellas.

Los objetivos que se buscan plantean, no sólo la transmisión y construcción de conocimientos matemáticos, sino también los modos de hacer matemática; es decir, se busca que los alumnos se apropien de la forma de "hacer y pensar" propia de la matemática, y principalmente "reflexionar sobre el hacer". Además pretendemos que los alumnos: puedan descubrir que son capaces de hacer matemática y, a partir de su hacer, definir una herramienta matemática desconocida para ellos: la Recurrencia; pudiendo reconocer y construir modelos regresivos ante determinadas situaciones.

## Geometría y su enseñanza

**Autores: Marcelo Valentín Arias y Antonio Sángari**
**Lugar: Universidad Nacional de Salta**
**Categoría: Reflexiones. Nivel: Universitario**
**Expositor: Marcelo Valentín Arias**

### Construcciones con regla y compás oxidado

El presente trabajo presenta una propuesta para la enseñanza a nivel universitario sobre las construcciones con regla y un compás oxidado o fijo usando la asistencia del soft libre Geogebra. Uno de los fundamentos de nuestra propuesta es el encantamiento, la perfección, y la belleza de las construcciones con regla y compás, como punto de partida. El uso de soft, por otra parte, nos permitirá contar con una herramienta de precisión y a la vez un recurso muy cercano a una juventud cada vez mas vinculada a los medios informáticos y tecnológicos.

Referencias:

Smogorzhevski. A. *La regla en construcciones geométricas*. Editorial MIR. Moscú, 1981.
Kostovski. A. N. *Construcciones geométricas mediante un compás*. Editorial MIR. Moscú, 1984.

**Autores: Silvia Bernardis y Susana Moriena**
**Lugar: Facultad de Humanidades y Ciencias, UNL**
**Categoría: Reflexiones. Nivel: Medio**
**Expositor: Silvia Bernardis**

### Develar las dinámicas de Thales

Uno de los teoremas más importantes de la Geometría Sintética es el Teorema de Thales. Consideramos que tiene más dificultades de aprendizaje de las que podemos sospechar. El objetivo de esta comunicación es presentar una propuesta que permita superarlas, elaborada en el marco del proyecto de investigación CAID+D: "Estudio de propuestas didácticas que promuevan la validación de las producciones matemáticas de los alumnos".

Presentamos, por un lado, el Teorema de Thales en su aspecto proyección, brindando una idea de movimiento respaldada en las características de la proyección paralela.

Por otro, trabajamos dicho teorema en su aspecto homotecia, aprovechando la otra dinámica que utiliza las características de la homotecia.

Debido a que el Teorema se aborda en la escuela, como una configuración estática que oculta estas dos dinámicas, consideramos que trabajando estas dos experiencias con el mismo problema, lograremos que se entremezclen para una mejor comprensión.

**Autores: Marcela Götte y Ana María Mántica**
**Lugar: Facultad de Humanidades y Ciencias, UNL**
**Categoría: Trabajo de investigación. Nivel: Superior**
**Expositor: Marcela Götte y Ana María Mántica**

Estudio de particularidades del aprendizaje de la geometría tridimensional

Este trabajo es parte de una investigación más amplia cuyo objetivo es detectar y analizar dificultades y errores cometidos por futuros profesores de matemática en la realización de demostraciones geométricas tridimensionales y categorizar los errores detectados.

Se presentan algunas dificultades que tienen los alumnos, de la cátedra Geometría Euclídea Espacial del Profesorado en Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias, en la resolución de problemas que involucran los conceptos de perpendicularidad y paralelismo.

Estos conceptos son complejos en su aprendizaje, más aún, como se muestra en este estudio, en la geometría del espacio, coincidiendo con lo señalado por Volkert (2008) que la geometría sólida presenta mayor dificultad que la plana.

**Autor: Antonio Sángari**
**Lugar: Universidad Nacional de Salta**
**Categoría: Reflexiones. Nivel: Universitario**
**Expositor: Antonio Sángari**

Génesis de una transformación conforme

Este trabajo presenta una sucesión de conceptos elementales de geometría y de variable compleja, tendientes a resolver un problema de las transformaciones conformes en el plano complejo. El problema trata sobre encontrar una transformación conforme biyectiva del círculo unitario en si mismo que transforme cuatro puntos de la circunferencia en vértices de un rectángulo. Para esto, es necesario encontrar el centro y la razón de la inversión geométrica que preserve la circunferencia inicial, pero que transforme cuatro puntos cualesquiera de la misma en vértices de un rectángulo. Se usa geometría sintética básica para encontrar el punto mencionado y, a partir de la construcción realizada, se toman datos suficientes para simplificar los cálculos y hallar las coordenadas correspondientes. Este problema es de importancia pedagógica pues permite a los estudiantes trazar un paralelo entre los cálculos algebraicos y la geometría básica.

## Probabilidad, Estadística y su enseñanza

**Autores: María Paula Dieser, Lorena V. Cavero y Laura B. Wagner**
**Lugar: Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de La Pampa**
**Categoría: Reflexiones. Nivel: Secundario/Polimodal y Superior**
**Expositor: Lorena V. Cavero y Laura B. Wagner**

### Paradojas como recurso didáctico: el problema de Monty Hall

En este trabajo se analizan soluciones de un problema de probabilidad utilizando algunos elementos, tales como tarea, técnica, tecnología y teoría, provenientes del enfoque antropológico de Yves Chevallard para la Didáctica de la Matemática. Las soluciones propuestas y analizadas incluyen estrategias personales, la construcción de diagramas de árbol, la aplicación de conceptos y propiedades de probabilidad elemental y la ejecución de procesos de simulación. El análisis didáctico del problema considerado puede ser útil en la formación de futuros profesores de matemática, permitiendo integrar conceptos y procedimientos estudiados en diferentes asignaturas. Asimismo, la presentación del problema a los estudiantes puede favorecer el enfrentamiento con algunas intuiciones incorrectas en la aplicación de la noción de probabilidad condicional, promoviendo el aprendizaje de dicho concepto desde una perspectiva constructivista.

**Autores: Stella Maris Figueroa, Sandra Baccelli, Gloria Prieto y Emilce Moler**
**Lugar: Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata**
**Categoría: Investigación. Nivel: Superior**
**Expositor: Stella Maris Figueroa**

### Funciones semióticas asociadas a los errores más frecuentes en la resolución de problemas bayesianos

La investigación que encuadra este trabajo tuvo por objetivo la detección de las dificultades y errores en la resolución de problemas bayesianos, bajo el marco teórico y metodológico del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. Para ello, se analizaron las producciones escritas de 50 estudiantes que cursan la asignatura Estadística en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata. Sobre la base de los errores cometidos al razonar sobre la probabilidad condicional, se diseñó y aplicó una nueva estrategia didáctica durante el proceso de instrucción, que pretende contribuir a la construcción del significado de la fórmula del Teorema de Bayes. De esta forma, se favorece la habilidad de efectuar transformaciones entre representaciones realizadas en distintos registros, en particular, del coloquial al simbólico. Los alumnos que evidenciaron el uso de estas transformaciones, mostraron menores dificultades en sus resoluciones al establecer correctamente las funciones semióticas entre los datos de estos problemas con los sucesos involucrados y sus probabilidades asociadas.

**Autores: Raúl D. Katz, Pablo A. Sabatinelli**
**Lugar: Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, UNR**
**Categoría: Relatos de experiencia. Nivel: Universitario**
**Expositor: Raúl D. Katz, Pablo A. Sabatinelli**

La evaluación de los aprendizajes en probabilidad y estadística como punto de partida para la generación de nuevas estrategias didácticas

En esta comunicación se muestra un estudio exploratorio realizado con estudiantes de Ingeniería, en la asignatura Probabilidad y Estadística. Nuestro objetivo es indagar en las estrategias que ponen en juego cuando se los enfrenta con un problema que trasciende la mera capacidad de reproducir conocimientos y requiere la aplicación de los mismos de manera interrelacionada.

De la evaluación de dichas estrategias surgen una serie de interrogantes que nos impulsa a repensar nuestras prácticas, la necesidad de diseñar nuevas estrategias a fin de lograr aprendizajes más satisfactorios.

**Autor: María Inés Rodríguez**
**Lugar: Universidad Nacional de Río Cuarto**
**Categoría: Reflexiones. Nivel: Medio y Terciario**

Inferencia informal: del análisis de los datos a la inferencia estadística

Todo curso introductorio de estadística a nivel universitario tiene como propósito llegar a desarrollar los métodos de inferencia estadística. Siendo éste uno de los temas más enseñados es, a la vez, el peor comprendido y utilizado. Esto ha preocupado a la comunidad internacional de expertos dedicados al estudio e investigación en Educación Estadística nucleados en la IASE (International Association for Statistics Education) quienes, reconociendo el papel del conocimiento estadístico en la formación elemental, desde 1999 vienen realizando cada dos años Foros de estudio sobre "Razonamiento, Pensamiento y Alfabetización Estadística" (SRTL)[3]. Estos foros, inicialmente abordaron los diferentes tipos de razonamiento estadístico, llegando en 2005, al consenso de que los estudiantes deben aprender a realizar inferencias, inicialmente de manera informal. Esto significa, que la inferencia estadística debe ser desarrollada en etapas, a lo largo de varios años, recomendando comenzar entre los 14-17 años.

En este trabajo se presentan algunas reflexiones surgidas a partir de la bibliografía revisada, definiciones y aspectos fundamentales a considerar, finalizando con la descripción de una actividad áulica que puede contribuir

[3]http://srtl.stat.auckland.ac.nz/

al desarrollo del razonamiento inferencial informal, preparando así al estudiante para una mejor comprensión y aplicación de la inferencia en niveles superiores y trabajo futuro.

---

**Autores: María Inés Rodríguez y María Inés Herrera**
**Lugar: Facultad de Ciencias Exactas Físico-Químicas y Naturales, Departamento de Matemática, Universidad Nacional de Río Cuarto**
**Categoría: Relatos de experiencias (de enseñanza y formación). Nivel: Primario y Secundario**
**Expositor: María Inés Rodríguez y María Inés Herrera**

---

Iniciativas para la promoción de la alfabetización estadística en el marco de la olimpíada de estadística de Córdoba

El Proyecto Internacional de Alfabetización Estadística (ISLP) implementado por el IASE en 2006, tuvo como objetivo crear, apoyar y participar en actividades de alfabetización estadística y difundirlas en todo el mundo. En agosto de 2009, el IASE organiza las primeras Competencias Internacionales de Alfabetización Estadística en Durban, Sudáfrica. Con la intención de estimular la participación de nuestro país, iniciamos su divulgación y además preparamos al equipo de alumnos que representaron a nuestro país en tal evento de alcance mundial. Con la finalidad de instalar este tipo de iniciativas en Argentina, establecimos contactos con los Ministerios de Educación y de Ciencia y Tecnología de Córdoba, surgiendo así el Proyecto de las Olimpíadas Provinciales de Estadística (OEC), que desde el año 2010 se realizan anualmente.

El plan de actividades de la OEC, involucra la confección de materiales de entrenamiento, asesoramiento para el desarrollo de inquietudes institucionales y también la realización de talleres de formación docente en didáctica de la estadística.

El objetivo de esta presentación es mostrar la organización y las distintas actividades que se desarrollan en el marco de la OEC, con el fin de promover la enseñanza de la estadística en los niveles obligatorios de educación.

---

**Autores: Héctor Orlando Suzaño, Mauricio Enrique Borjas y María Cristina Ahumada**
**Lugar: Universidad Nacional de Salta**
**Categoría: Relato de experiencia. Nivel: Secundario**
**Expositores: Héctor Orlando Suzaño, Mauricio Enrique Borjas**

---

¿Variabilidad = variable?

Se usan muchas veces conceptos estadísticos sin conocer sus definiciones, sus características y/o sus limitaciones. Una indagatoria con alumnos de nuestra facultad, nos hizo conocer que el concepto de variabilidad no está bien entendido aún en los niveles superiores, donde se estudia estadística.

A raíz de estos resultados nos propusimos diseñar una estrategia didáctica tendiente a que el concepto de variabilidad tenga el sentido que debe tener y no se deje al olvido con tanta facilidad.

La propuesta se basó a partir de dos preguntas, propone recoger datos reales y contextualizados en el ámbito escolar, llevándolos al análisis de las observaciones con la realización de tablas y gráficos.

De una manera dinámica tratamos de presentar los conceptos que son necesarios para esta propuesta, y trabajar entre las cosas más comunes de los alumnos.

Estamos convencidos que la observación que proponemos ayudará a la mejor comprensión del concepto de variabilidad. Queremos aportar con estas ideas, que llevaremos a la práctica cuando tengamos la oportunidad en nuestra carrera y en nuestro futuro docente. Sabemos que, aunque la estadística se incluya de una forma oficial en el currículo no necesariamente se enseña, por diferentes motivos, y hace falta mucho material del tema.

## Resolución de problemas

**Autores: María C. Ahumada, Eudosia Díaz de Hibbard, Estela Aliendro, Liliana Valdez, Carlos Puga, Augusto Estrada Velásquez, Walter Garzón y Martín Herran**
**Lugar: Universidad Nacional de Salta**
**Categoría: Trabajo de investigación Nivel: Superior Universitario**
**Expositor: María C. Ahumada**

### Pruebas diagnóstico: aleatoriedad y conocimiento

En el marco del Proyecto "Tutorías estudiantiles para apoyar al ingresante universitario", desarrollado en la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de Salta, estudiamos la incidencia de la incorporación de tutores alumnos en las clases de matemática de asignaturas de los primeros años en nuestra facultad. Entre otras actividades, se realizan pruebas de diagnóstico al inicio y al finalizar el dictado de las asignaturas involucradas. Los resultados, especialmente del diagnóstico inicial, muestran un gran porcentaje de respuestas vacías en los diferentes temas evaluados, de lo que surgió un interés en investigar la aleatoriedad. Al ser una prueba de opciones múltiples nos interesa saber si los estudiantes eligen las respuestas aleatoriamente o no. Nos preguntamos porqué un estudiante prefiere dejar sin responder un ejercicio a jugarse por una respuesta aleatoria y tener una posibilidad al menos, de sacar puntaje. Mostramos los resultados particularmente de la asignatura Matemática para Informática, que en el año 2011 se dictó por primera vez separada de las otras carreras.

**Autor: Christian Berrocal Araya**
**Lugar: Colegio Técnico Profesional de Upala (CTPU), Costa Rica**
**Categoría: Relatos de experiencias. Nivel: Secundaria**

### SeE-MoRe: un nuevo modelo para la enseñanza de la matemática en secundaria

Se implementa un modelo para la enseñanza de la matemática en secundaria, llamado SeE-MoRe (*Ver más, ver mejor*), que contempla cuatro etapas fundamentales: Sensibilización, Experimentación, Modelización y Refuerzo, permitiéndole a los estudiantes tener una visión integradora de la matemática con su entorno.

Los recursos tecnológicos utilizados están desarrollados en el ambiente de programación Visual Basic 6.0 y el software Geometer's Sketchpad 4.0, y se orientan al desarrollo de juegos y actividades que le permitan al educando fortalecer lo aprendido.

**Autores: Eudosia Díaz de Hibbard, Estela Sonia Aliendro, Graciela Méndez, Martín Herran, Walter Garzón, Julio Pojasi, Teresita Passamai, Gustavo Delupí, Mauricio Vidaurre y Pablo Villarroel Yonar**
**Lugar: Universidad Nacional de Salta**
**Categoría: Relatos de experiencia. Nivel: Superior Universitario**
**Expositores: Estela Sonia Aliendro, Graciela Méndez, Martín Herran**

---

## Problemas con varias aristas

Con este trabajo nos proponemos mostrar el uso de una estrategia de enseñanza basada en el planteo de problemas matemáticos elementales que pueden resolverse en diferentes marcos y están presentes en diversas situaciones de la vida real. La enseñanza a través de la resolución de problemas es un método eficaz para poner en práctica el principio de aprendizaje activo. Empleamos esta estrategia en la primera asignatura de dictado común a varias carreras de la Facultad de Ciencias Exactas. En la misma abordamos los diferentes temas del programa mediante problemas sencillos, pero que pueden prestarse a discusiones interesantes, en cuanto a métodos de resolución, variación de los enunciados, abordajes desde distintos ángulos o con enunciados relacionados con la vida real y situaciones de la naturaleza. El curso consiste básicamente en el estudio de Sistemas numéricos y de las funciones elementales, tales como la lineal, cuadrática, exponencial, logarítmica y las trigonométricas. Se promueve que el estudiante se acerque a los diferentes problemas planteados en forma gráfica, numérica y simbólica, a la vez que sepa aplicar estos conocimientos, junto con los que ya tenga del álgebra o de la geometría, para generar variantes interesantes de las situaciones presentadas.

---

**Autores: Adonay José Jaramillo Garrido**
**Lugar: Institución Educativa Nuestra Señora de la Candelaria (Malambo) - Corporación Universitaria Americana - Grupo de investigación calidad educativa - Universidad Simón Bolivar (Barranquilla)**
**Categoría: Relato de experiencia. Nivel: Básico**

---

## "A más estímulos más aprendientes"

La ciencia ha demostrado que cada persona posee una manera de procesar la información que recibe. Este hallazgo de la ciencia, invita a quienes nos dedicamos a orientar procesos de enseñanza a diversificar nuestros estilos de enseñanza y a variar los estímulos que proponemos al abordar un contenido puesto que en el aula tenemos a estudiantes que poseen diferentes manera de aprender.

Los estímulos propuestos deben garantizar en el estudiante la movilización de sus preferencias cerebrales, de ahí, que estos deben ser pensados y puestos en escena a fin de que el estudiante se encuentre a tono con su manera de procesar la información. Las preferencias cerebrales en el estudiante se pueden diagnosticar ya sea por medios tecnológicos o inferidos por el contacto a diario con ellos.

**Autores: Silvia S. Martínez, Nydia Dal Bianco**
**Lugar: Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de la Pampa**
**Categoría: Reflexiones. Nivel: Universitario**
**Expositor: Silvia S. Martínez**

### Estrategia didáctica: un enfoque metaheurístico

La metodología de enseñanza a través de la resolución de problemas en educación matemática constituye uno de los puntos clave como método integral en la evolución de esta disciplina. Las tareas humanas, fundamentalmente las vinculadas a habilidades intelectuales como las puestas en juego en la resolución de problemas, no están signadas por algoritmos, pues mediante heurísticas el comportamiento intelectual articula las fuentes de conocimiento, conduciendo el proceso de búsqueda en la dirección más ventajosa y sugiriendo en general cuál es el camino a seguir cuando hay varios disponibles.

Según las reglas heurísticas, los contenidos asimilados deben ser articulados por un sistema de aprendizaje que utilice datos anteriores e instancias, y ejemplos de soluciones consideradas exitosas de una determinada situación problemática.

Para este trabajo consideramos un problema cuya resolución integra diversos contenidos matemáticos, con la articulación de diferentes registros de representación y a partir de estrategias didácticas, se modeliza la situación dada.

La resolución de problemas no es repetir procedimientos, sino un proceso que implica la asimilación de los conocimientos, el desarrollo de la creatividad, de la independencia cognoscitiva y de las habilidades propias para su resolución.

## Reunión Anual de la UMA 2013

La Reunión de la UMA del 2013 tendrá lugar en la ciudad de Rosario. La Comisión Directiva de la UMA en la Asamblea Ordinaria realizada en Santa Fe el 16 de noviembre anunció que la próxima reunión de la UMA tendrá lugar en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (FCEIA) de la Universidad Nacional de Rosario, entre el 16 y 21 de septiembre de 2013.

Próximamente más información sobre la Reunión en Rosario estará accesible desde el sitio web de la UMA http://www.union-matematica.org.ar.

♢ ♢

# UNIÓN MATEMÁTICA ARGENTINA




**Dirección postal:** Unión Matemática Argentina
IMAL
CONICET Santa Fe
Güemes 3450
S3000GLN Santa Fe
Argentina

Tel.: +54-342-4559155 (int. 2161)
Fax: +54-342-4559944
E-mail: `uma at union-matematica punto org punto ar`
Sitio web: **http://www.union-matematica.org.ar**

## Secretarios Locales

**Laura Rueda**
Depto. de Matemática
Universidad Nacional del Sur
Avda. Alem 1253
8000 BAHÍA BLANCA

**Graciela Fernández**
Depto. de Matematica - FCEyN
Universidad de Buenos Aires
Pab. I Ciudad Universitaria
1428 CAPITAL FEDERAL

**Gustavo Juarez**
B°Avellaneda y Tula - Casa n° 102
4700 CATAMARCA

**María Mendonça**
San Martín 1426
9000 COMODORO RIVADAVIA

**Germán Torres**
FaMAF - Ciudad Universitaria
M. Allende y Haya de la Torre
5000 CÓRDOBA

**Rubén Cerutti**
Depto. de Matemática- FCEyN - UNNE
9 de Julio 1449
3400 CORRIENTES

**Nydia Dal Bianco**
Fac. Cs. Exactas y Naturales
Uruguay 151
6300 Santa Rosa - LA PAMPA

**Adriana Galli**
Depto. Matemática
Fac. Cs. Exactas - UNLP
Calle 47 y 115- 1900 LA PLATA

**Guillermo Valdéz**
Depto. de Matemática- FCEyN
Universidad Nacional de Mar del Plata
Funes 3250
7600 MAR DEL PLATA

**Liliana Zaragoza**
Juan B. Justo 441
5501 GODOY CRUZ
MENDOZA

**Cristina Cano**
Depto. de Matemática
Fac. de Economía - UNCo
Buenos Aires 1400
8300 NEUQUÉN

**Víctor Wall**
Facultad de Cs. Exactas,
Químicas y Naturales - UNAM
Entre Ríos 2419
3300 POSADAS

**Adriana M. González**
Depto. de Matemática
Fac. de Ciencias Exactas - UNRC
Ruta 36 Km 601
X5804ZAB RÍO CUARTO

**Viviana del Barco**
Fac. de Ciencias Exactas
Ingeniería y Agrimensura - UNR
Av. Pellegrini 250
2000 ROSARIO

**Mercedes Heredia**
Lavalle y Alem
4440 METÁN
SALTA

**Eudosia (Nena) Diaz de Hibbard**
Depto. de Matemática
Fac. de Ciencias Exactas - UNSa
Buenos Aires 177
4400 SALTA

**Virginia Montoro**
Centro Regional Univer. Bariloche
Quintral 1250
8400 S. C. DE BARILOCHE

**Fernando Ramos**
FFHA - UN de San Juan
Av. Ignacio de la Roza 230(O)
5400 SAN JUAN

**Bárbara Bajuk**
Depto. de Matemática - UNSL
Ejército de los Andes 950
5700 SAN LUIS

**Ana Benavente**
Depto. de Matemática - UNSL
Ejército de los Andes 950
5700 SAN LUIS

**María Chara**
IMAL
Güemes 3450
S3000GLN SANTA FE

**Ismael Gómez**
Depto. de Matemática -FCE
UN de Santiago del Estero
4200 SANTIAGO DEL ESTERO

**Marta García**
FCE-UNCPBA
Campus Universitario
Paraje Arroyo Seco
7000 TANDIL

**Susana Gloria González de Quevedo**
Fac. de Ingeniería
UN de la Patagonia
Belgrano 504 - 2°p.
9100 TRELEW CHUBUT

**Marcela Lazarte**
Pje. Roca 4369
4000 TUCUMÁN

**Ricardo Zalik**
221 Parker Hall,
Department of Mathematics and Statistics
ALABAMA 36849-5310 USA

**Nydia Ester Carrizo**
5300 LA RIOJA

**Rubén Andreu**
3500 RESISTENCIA CHACO

## Socios de la UMA

Para asociarse a la UMA completar el formulario de inscripción disponible en
http://www.union-matematica.org.ar/institucional/planilla_inscrip.pdf
y contactarse con el Secretario Local para realizar el pago de la cuota correspondiente al año en curso.

**Modos de pago de la cuota anual.**

- Pago directo en efectivo al Secretario Local.
- Por transferencia bancaria:
  BANCO FRANCÉS
  Sucursal: 210
  Dirección: San Martín 2515 - (3000) Santa Fe
  Cuenta Corriente en Pesos Nº: 210-156885
  CBU: 0170210320000001568855
  CUIT: 30-67838158-2
  Titulares: Eleonor Harboure y Liliana Forzani

  Una vez realizada la transferencia se debe enviar un mail adjuntando el comprobante de la misma a `uma.tesoreria at gmail punto com` y al correspondiente Secretario Local, colocando en el asunto del mail el nombre y apellido. (Esto es indispensable para que su pago quede registrado).
  Solicitar el recibo del pago por mail al Secretario Local o retirar el recibo en la Secretaría Local.

**Montos de la cuota 2012/2013.**

| | al 10 de abril | al 10 de agosto | año vencido |
|---|---|---|---|
| Titular | $180 | $230 | $270 |
| Adherente | $140 | $180 | $210 |
| Institucional | $1200 | $1200 | $1200 |
| Del exterior | U$D 60 | U$D 60 | U$D 60 |

## Publicaciones

### Revista de la Unión Matemática Argentina

ISSN 0041-6932



Correo electrónico: `revuma at criba punto edu punto ar`
Sitio web: **http://inmabb.criba.edu.ar/revuma/**
Dirección postal: Instituto de Matemática
Universidad Nacional del Sur
Av. Alem 1253
B8000CPB Bahía Blanca
Argentina

**Revista de Educación Matemática**

ISSN Nº 0326-8780
ISSN Nº 1852-2882 (en línea)



Correo electrónico: `revm at famaf punto unc punto edu punto ar`
Sitio web: **http://www.famaf.unc.edu.ar/rev_edu/**
Dirección postal: FaMAF
Universidad Nacional de Córdoba
M. Allende y Haya de la Torre
Ciudad Universitaria
5000 Córdoba, Argentina.
TE: 54-351-4334051/52 Int: 131
Fax: 54-351-4334054

**Noticiero de la Unión Matemática Argentina**
ISSN 1514 - 9560 (Versión impresa)
ISSN 1514 - 9595 (Versión electrónica)

- **Editora**
  Ivana Gómez
- **Colaboradora**
  Silvia Hartzstein

Correo electrónico: `noticiero.uma at gmail punto com`
Sitio web: **http://www.notiuma.santafe-conicet.gov.ar**
Dirección postal: Noticiero de la UMA
IMAL
CONICET Santa Fe
Güemes 3450
S3000GLN Santa Fe
Argentina.

Tel.: +54-342-4559155 (int. 2165)
Fax: +54-342-4559944