Noticiero de la Unión Matemática Argentina

UNIÓN
MATEMÁTICA
ARGENTINA

FUNDADA EN 1936

Volumen 59, Número 1
Año 2024

ISSN 1514-9595 (en línea)

Índice general

NOTICIERO

ISSN 1514-9595 (web)

Editorial

El Noticiero de la UMA es una tradición ya arraigada que ha ido variando su estilo a lo largo del tiempo y con las distintas Comisiones Directivas. Luego del primer año de la actual gestión, se decidió darle al Noticiero de la UMA un nuevo impulso.

En esta etapa, nuestra intención es transformar el Noticiero en una publicación dirigida a la comunidad matemática general abarcando temas diversos, organizados en diferentes secciones. A continuación describimos algunos de los contenidos que serán incluidos en este y en los números siguientes.

Para empezar, queremos que en cada número haya siempre al menos un artículo sobre matemática de interés general. Serán incluidos en la sección **Miradas Matemáticas** y pretenden ser de contenido matemático específico para público general no especializado en el tema sobre el cual trate.

También, habrá lugar para la **comunicación de la matemática** (conocida anteriormente como "divulgación matemática"). Con estos artículos esperamos poder disfrutar, en un lenguaje claro y con ejemplos concretos, de explicaciones de conceptos matemáticos complejos que despierten interés y curiosidad sobre la importancia y aplicaciones de las matemáticas en la vida cotidiana, la ciencia y la tecnología.

Para acercarnos entre nosotros y nosotras, vamos a incluir una sección que decidimos llamar **Diálogos**, que va a contener entrevistas a integrantes de la comunidad matemática.

La sección **Experiencias y herramientas** tendrá contenido que ayude e inspire a diferentes miembros de la comunidad matemática, especialmente a la gente que está comenzando su carrera.

Pensando en la importancia de conocer a las personalidades que dejaron huellas en nuestra disciplina y se distinguieron por su excelencia, tendremos la sección **Semblanzas**.

Vamos a incluir también artículos sobre género, sobre educación, sobre la Competencia Interuniversitaria de Matemática Argentina (CIMA) y una sección que recopile las distinciones y los premios otorgados a miembros de la comunidad, como alguna vez se incluyó en ediciones anteriores del Noticiero. En este número reunimos los reconocimientos que fueron otorgados durante el año 2023 y hasta abril de 2024.

Para que esto sea posible, fuimos convocados a formar un comité editorial Marilina Carena (Universidad Nacional del Litoral), Silvia Lassalle (Universidad de San Andrés), Emilio Lauret (Universidad Nacional del Sur) y quien escribe. Desde hace ya varios meses venimos trabajando y dando forma a las ideas que nos van surgiendo, con la intención sincera y entusiasta de generar interés en la comunidad matemática toda.

Agradecemos profundamente a todas las personas que colaboraron en la redacción de los artículos que forman parte de este primer número del año 2024. Realmente es muy motivador saber que contamos con colegas que se entusiasman con la propuesta. Un especial agradecimiento para Nino (Antonio Cafure) que aceptó compartir desinteresadamente las entrevistas de su ciclo *Conversaciones Matemáticas* publicadas en su canal de YouTube *Matemática Sentimental* y por su compromiso en seguir participando en los próximos números con más *diálogos*. Y otro agradecimiento a Néstor Aguilera por su valioso aporte a la reseña sobre Pola Harboure que acompaña la entrevista incluida en la sección **Diálogos**.

Creemos que en estas épocas difíciles que corren, tener una publicación de este estilo puede ayudarnos a fortalecer nuestro entusiasmo por la Matemática, a valorar la gran producción que hay en nuestro país, conocernos un poco más y por qué no, generar nuevas interacciones entre miembros de nuestra comunidad.

Esperamos que disfruten de esta versión del Noticiero de la UMA.

Victoria Paternostro
Directora de publicaciones de la UMA

NOTICIERO

ISSN 1514-9595 (web)

Miradas Matemáticas

Combinando vaguedad con incertidumbre

Manuela Busaniche

Universidad Nacional del Litoral - CONICET

Resumen

En este artículo presentamos de manera informal y simplificada las ideas para determinar una semántica algebraica de un sistema lógico modal y difuso definido a partir de una semántica relacional.

Introducción

La lógica es la disciplina que estudia la forma de los razonamientos válidos. Los sistemas lógicos que trataremos en este artículo son sistemas proposicionales: se expresan en un lenguaje formal (simbólico) y permiten la representación de enunciados (o proposiciones) mediante fórmulas. Dos aspectos son fundamentales en el estudio lógico: el aspecto sintáctico, que consiste en lograr modelar la forma de los razonamientos mediante reglas que manipulen simbólicamente los enunciados y establezcan cómo a partir de ciertas premisas (axiomas o hipótesis) otros enunciados resultan válidos; y el aspecto semántico, que es dar una interpretación de lo que se considera una proposición verdadera en el sistema. Uno de los desafíos más importantes en lógica es lograr modelar un sistema con una sintaxis y una semántica compatibles: es decir, los enunciados válidos en el sistema sintáctico coincidan con los que se interpretan como verdaderos semánticamente. Pero hay otras técnicas interesantes para abordar el estudio de una lógica, como la que llevaremos a cabo en este artículo, que consiste en comparar dos semánticas distintas para un mismo sistema.

Desde sus primeros tratamientos, ya en la antigua Grecia hasta los grandes avances impulsados por los progresos informáticos actuales, sistemas de lógicas que modelan diversos tipos de razonamientos se han desarrollado, dando lugar a múltiples técnicas y herramientas que permiten abordar su estudio. Los más conocidos e investigados son los que modelan la lógica clásica, que es la lógica con la que razonamos en matemática. Pero otros sistemas han cobrado gran interés por su capacidad de formalizar razonamientos más generales.

Tal es el caso de las lógicas modales, que son desarrolladas para razonar bajo distintos tipos de incertidumbre. Las mismas se obtienen extendiendo un sistema proposicional (usualmente el clásico) con operadores que permiten interpretar nociones como creencia, posibilidad, conocimiento, obligaciones, tiempo ([1], [10]). Otro tipo de formalismo interesante es el que proponen los sistemas de lógicas difusas y multivaluadas[1] que permiten manipular información vaga o imprecisa asignando a los enunciados valores de verdad intermedios, es decir, interpretan que un enunciado puede tener un determinado grado de verdad que mida cuán verdadero o cuán falso es ([4], [8]).

Tanto las lógicas modales como las multivaluadas y difusas han evolucionado de manera independiente en paralelo, y es en los últimos años donde surge con gran ímpetu la necesidad de contar con sistemas que manejen a la vez incertidumbre y vaguedad.

Es por esto que, muchos grupos de investigación estudian sistemas de lógicas que comparten las dos características: son modales y difusas. Desde el punto de vista formal, el gran desafío que plantean estos sistemas es su interpretación, puesto que las semánticas que mejor se adecúan a los sistemas modales son semánticas relacionales, basadas en marcos de Kripke, mientras que para el manejo de sistemas de lógicas difusas las semánticas algebraicas han demostrado ser el instrumento correcto para su interpretación.

En este artículo trataremos de mostrar de manera muy simplificada e informal el problema de combinar ambas semánticas para comprender ciertos sistemas que sean a la vez modales y difusos. Presentaremos el desafío para investigar este tipo de lógicas y mostraremos un ejemplo concreto.

1. ¿Qué tipo de enunciados pretendemos modelar?

Los sistemas proposicionales multivaluados y difusos posibilitan el modelado de enunciados que no son necesariamente verdaderos o falsos, asignando grados de verdad intermedios que permiten la comparación de la verdad de los mismos. Generalmente se toma el grado de verdad como un valor mayor o igual que cero (falso) y menor o igual que uno (verdadero). Estos cálculos interpretan de manera eficiente predicados difusos del tipo *ser alto* o *estar caliente.* Es intuitivamente claro que el enunciado *la temperatura es alta en Santa Fe* debería tener un grado de verdad mayor al enunciado *la temperatura es alta en Bariloche,* y este último un grado de verdad mayor a *la temperatura es alta en Ushuaia*.

Por otro lado, los sistemas de lógicas modales son útiles para modelar formas de razonamientos a partir de datos inciertos, ya sea por el conocimiento que se tenga o porque involucren una creencia o posibilidad.

Así, un sistema que sea a la vez modal y difuso permitiría el manejo de enunciados del tipo *se conoce que la temperatura es alta* o *es posible que el agua esté caliente* con mayor precisión que un sistema clásico.

2. ¿Cómo está compuesto un lenguaje modal y difuso?

Los cálculos proposicionales difusos que presentaremos están basados en un lenguaje proposicional formado por un conjunto numerable $Var = \{x_1, x_2, ...\}$ de variables

[1] Si bien hay diversos sistemas de lógicas difusas y multivaluadas, las lógicas multivaluadas que aquí trataremos son casos particulares de sistemas difusos.

proposicionales y los conectivos $\{*, \to, \wedge, \vee, 0, 1\}$ [2]. En estos cálculos los conectivos se interpretan usualmente como: $*$ conjunción fuerte, $\to$ implicación, $\wedge$ conjunción débil[3], $\vee$ disyunción. También es usual interpretar a las constantes 0 y 1 respectivamente como la falsedad y la verdad. Para el tratamiento modal, se le suman al sistema los operadores modales. En los ejemplos que aquí veremos hemos elegido solo sumar un operador modal $\Box$ de necesidad. Es decir, la fórmula $\Box\varphi$ se lee *es necesario* φ. Dependiendo del sistema que se precise investigar se pueden agregar la cantidad de operadores modales que se requieran.

El conjunto $Form_\Box$ de fórmulas proposicionales se obtiene aplicando de manera recursiva un número finito de veces las siguientes reglas:

- $Var \subseteq Form_\Box$ y $0, 1 \in Form_\Box$;
- si $\varphi, \psi \in Form_\Box$, entonces $\varphi \star \psi \in Form_\Box$, donde $\star \in \{*, \to, \wedge, \vee\}$;
- si $\varphi \in Form_\Box$, entonces $\Box\varphi \in Form_\Box$.

3. ¿Qué álgebras son la base de las semánticas algebraicas de sistemas multivaluados y difusos?

La teoría de lógicas algebrizables es una teoría profunda y técnicamente compleja que, bajo ciertas hipótesis, provee un mecanismo para establecer una sintaxis (axiomática tipo Hilbert) de un cálculo si se conoce a priori su semántica algebraica (ver [6] y [12]).

Las lógicas multivaluadas y difusas que aquí tratamos cuentan con semánticas algebraicas muy estudiadas, basadas en retículos residuados. Para una comprensión general y más informal del tema, haremos un abuso de notación, identificando los conectivos lógicos y los operadores algebraicos que los interpretarán con los mismos símbolos. Un retículo residuado acotado y conmutativo (o simplemente retículo residuado [7]) es una estructura algebraica $\mathbf{A} = \langle A, *, \to, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ que consta de un universo (conjunto no vacío) A, operadores binarios $*, \to, \wedge, \vee$ y constantes $0, 1 \in A$ que satisfacen:

- $\langle A; *, 1\rangle$ es un monoide conmutativo: $*$ es una operación binaria conmutativa en A para la cual 1 es el elemento neutro;
- $\langle A; \vee, \wedge, 1, 0\rangle$ es un retículo, con elemento mayor 1 y menor 0;
- si $x, y, z \in A$ entonces $x * y \leq z$ si y solo si $x \leq y \to z$ donde $\leq$ es el orden dado por la estructura de retículo.

Las álgebras de Boole, las álgebras de Heyting, las MV-álgebras y las BL-álgebras son ejemplos conocidos de retículos residuados. Estas clases de álgebras son, respectivamente, las semánticas algebraicas de la lógica clásica, la intuicionista, la lógica multivaluada de Łukasiewicz y la lógica básica (Basic Logic). Un retículo residuado se dice completo si para cada subconjunto $S \subseteq A$ el ínfimo y el supremo de S existen.

[2] El lector interesado puede ver la justificación en la elección de los conectivos en [8].
[3] En el cálculo clásico ambas conjunciones coinciden, por esto se trabaja con un solo conectivo conjunción.

4. ¿Cómo extender estas estructuras para trabajar con operadores modales?

Al trabajar con operadores modales agregamos a nuestro lenguaje algebraico un operador unario $\Box$, así como lo hemos agregado como conectivo para formar las fórmulas. Un retículo residuado modal (el nombre lo hemos puesto solo para este trabajo), será una estructura $\langle \mathbf{A}, \Box\rangle = \langle A, *, \to, \wedge, \vee, \Box, 0, 1\rangle$ donde $\mathbf{A} = \langle A, *, \to, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ es un retículo residuado y $\Box : A \to A$ es un operador unario.

Para caracterizar algebraicamente el sistema modal y difuso, nuestro desafío consiste en determinar las relaciones entre el nuevo operador modal y los operadores existentes, que dependerán de las propiedades particulares que pretendemos que nuestro operador satisfaga. Por ejemplo, en la mayoría de los sistemas que estudiamos suelen ser verdaderas las identidades $\Box 1 = 1$ y $\Box(x \wedge y) = \Box x \wedge \Box y$.

Una ecuación en el lenguaje de retículos residuados modales es una expresión en el lenguaje proposicional $\mathcal{L} = \langle Var, *, \to, \wedge, \vee, \Box, 0, 1\rangle$ del tipo

$$\varphi = \psi$$

donde φ y ψ son términos en el lenguaje. Pretendemos que este compendio sea un resumen informal, por esto optamos por no entrar en detalles precisos, y dado el abuso de lenguaje que hemos hecho, podemos pensar que φ y ψ son fórmulas en $Form_{\Box}$. Una cuasiecuación es una expresión del tipo

$$\text{si } \varphi_1 = \psi_1 \text{ y } \varphi_2 = \psi_2 \text{ y } \dots \text{ y } \varphi_n = \psi_n \text{ entonces } \varphi = \psi$$

formada por ecuaciones. Una cuasivariedad de álgebras $\mathcal{Q}$ es una clase de álgebras del mismo tipo que es cerrada bajo un conjunto de cuasiecuaciones, esto es, todas las álgebras en $\mathcal{Q}$ satisfacen un conjunto de cuasiecuaciones y toda álgebra que satisfaga este conjunto de cuasiecuaciones está en $\mathcal{Q}$. Hay múltiples cuasivariedades de retículos residuados modales, que dependen de las cuasiecuaciones que las caracterizan.

Sea $\mathbf{M} = \langle \mathbf{A}, \Box\rangle$ un retículo residuado modal. Una función $v : Form_{\Box} \to \mathbf{M}$ será llamada valuación si preserva todos los conectivos. Fijemos una cuasivariedad $\mathcal{Q}$ de retículos residuados modales y sea $\varphi \in Form_{\Box}$.

> Decimos que φ es *verdadera en* $\mathcal{Q}$ si para cada $\mathbf{M} \in \mathcal{Q}$ y para cada valuación $v : Form_{\Box} \to \mathbf{M}$ se satisface que $v(\varphi) = 1$.

Nuestro propósito es encontrar quasivariedades de retículos residuados modales que sean la semántica algebraica de sistemas lógicos modales y difusos. Estos sistemas van a estar determinados por otra semántica que estudiaremos a continuación.

5. Semántica de Kripke

Los sistemas de lógicas modales históricamente se han interpretado a partir de semánticas relacionales (o de mundos posibles) conocidas como semánticas de Kripke ([11]). Para nuestro objetivo presentamos una versión de las mismas que generaliza a la versión clásica.

Sea $\mathbf{A} = \langle A, *, \to, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ un retículo residuado. Un *marco de Kripke* **A**-*valuado* es una estructura $\langle W, R\rangle$ donde W es un conjunto no vacío, cuyos elementos se llaman *mundos posibles* y $R : W \times W \to \mathbf{A}$ es una relación binaria no clásica en W, conocida como la relación de accesibilidad ([8]). De acuerdo al problema que se intente modelar la relación R podrá tener distintas características. En el ejemplo que daremos trabajaremos con una relación en general, sin ninguna restricción. Los lectores familiarizados con la noción clásica de marco de Kripke podrán notar que esta noción es un caso particular de marco de Kripke **A**-valuado, en donde el retículo residuado **A** es el álgebra de Boole de dos elementos, por lo que R es simplemente una relación binaria.

Dado un marco de Kripke **A**-valuado $\langle W, R\rangle$, definimos un modelo de Kripke **A**-valuado $\mathcal{M} = \langle W, R, e\rangle$ añadiendo al marco una función $e : Var \times W \to \mathbf{A}$, que se extiende al conjunto de fórmulas interpretando los conectivos $*, \to, \wedge, \vee, 0, 1$ como los correspondientes operadores en **A** y el operador modal $\Box$ por:

$$e(\Box\varphi, w) = \inf_{w' \in W}\{R(w, w') \to e(\varphi, w')\}.$$

Si bien la interpretación del conectivo $\Box$ puede resultar arbitraria, y aquí no presentaremos una justificación de su elección, podemos notar que el valor de la fórmula $\Box\varphi$ en un mundo depende del valor de la fórmula φ en todo mundo w' y el grado de accesibilidad del mundo que se está considerando a w'.

Si el retículo residuado **A** es completo, el modelo está bien definido.[4] Diremos que una fórmula $\varphi \in Form_\Box$ es verdadera en el modelo $\mathcal{M} = \langle W, R, e\rangle$ si para todo $w \in W$ se tiene que $e(\varphi, w) = 1$.

La *lógica minimal modal* **A**-*valuada* se define semánticamente como el conjunto de fórmulas verdaderas en todo modelo de Kripke **A**-valuado.

Algunas consideraciones:

- Para cada retículo residuado completo **A** se tiene una lógica minimal modal **A**-valuada, por lo que estamos en presencia de distintos sistemas que dependen del retículo elegido. Se puede generalizar esta definición para clases de álgebras en lugar de una sola álgebra fija.
- La definición de una lógica, desde un punto de vista semántico, puede variar (incluso tener distintos nombres). Hemos decidido presentar una definición sencilla, sin involucrar los conceptos de consecuencia, que suelen ser los que se tienen en cuenta para este tipo de definiciones y análisis lógicos. Un sistema similar basado en la noción de consecuencia puede verse en [2].
- Estamos determinando un sistema lógico a partir de su semántica. Al definirlo de esta manera desconocemos una sintaxis para el mismo. Si logramos encontrar una semántica algebraica equivalente tendremos mecanismos para determinar una sintaxis estilo Hilbert.
- Dada nuestra pretensión de exponer de manera sencilla y simplificada el tema, hemos optado por considerar sistemas en donde la relación R no tiene restricciones.

[4] Aquí también resaltamos la analogía con el caso clásico. Si **A** es el álgebra de Boole con dos elementos, R es simplemente una relación binaria, por lo que si $S = \{w' : R(w, w') = 1\}$ entonces $e(\Box\varphi, w) = \inf_S\{e(\varphi, w')\}$.

6. Comparando las dos semánticas.

Como se mencionó previamente, contar con una semántica algebraica para un sistema lógico facilita la caracterización axiomática del sistema formal, y permite estudiar propiedades del mismo.

Intentaremos mostrar una de las ideas para encontrar una semántica algebraica apropiada para la lógica minimal modal **A**-valuada. Esto implica encontrar una cuasivariedad de retículos residuados modales cuyas fórmulas verdaderas coincidan con las fórmulas verdaderas de la lógica modal.

Dado un retículo residuado **A**, para cada conjunto no vacío W podemos definir el álgebra de funciones $\mathbf{A}^W$ con dominio W y codominio **A** y las operaciones $*, \to, \wedge, \vee, 0, 1$ definidas punto a punto. Dado un marco de Kripke **A**-valuado $\langle W, R\rangle$ definimos un operador unario $\Box$ para cada $\overline{x} \in A^W$ como

$$\Box\overline{x}(i) = \bigwedge_{j\in W}\{R(i,j) \to \overline{x}(j)\}.$$

El álgebra $\langle \mathbf{A}^W, \Box\rangle$ se llamará álgebra complex sobre **A** determinada por el marco $\langle W, R\rangle$ (notar que $\langle \mathbf{A}^W, \Box\rangle$ es un retículo residuado modal).

Es muy fácil ver que si $\mathcal{M} = \langle W, R, e\rangle$ es un modelo de Kripke **A**-valuado, la función $v_e : Form_\Box \to \mathbf{A}^W$ dada por

$$v_e(\varphi)(w) := e(\varphi, w)$$

es una valuación sobre el retículo residuado modal $\mathbf{M} = \langle \mathbf{A}^W, \Box\rangle$. Recíprocamente, si $v : Form_\Box \to \mathbf{A}^W$ es una valuación en $\langle \mathbf{A}^W, \Box\rangle$, entonces la aplicación $e_v : Form_\Box \times W \to \mathbf{A}$ dada por

$$e_v(\varphi, w) := v(\varphi(w))$$

determina un modelo de Kripke **A**-valuado $\langle W, R, e\rangle$ sobre el marco $\langle W, R\rangle$.

Concretamente:

Las valuaciones en las álgebras complex sobre un retículo residuado **A** están en correspondencia biyectiva con los modelos de Kripke **A**-valuados.

Objetivo: para obtener una semántica algebraica del sistema de lógica minimal modal **A**-valuado debemos determinar la cuasivariedad de retículos residuados modales generada por las álgebras complex sobre **A**. Obtener una caracterización correcta y completa de una cuasivariedad de álgebras conociendo solo a las álgebras generadoras es una tarea difícil, que requiere un análisis profundo de las álgebras complex, de sus propiedades y que no siempre tiene éxito. Ese es uno de nuestros desafíos actuales para distintos sistemas específicos modales y difusos.

7. Ejemplo: Lógica minimal modal sobre la cadena Ł$_3$

Ofrecemos un ejemplo sencillo de una semántica algebraica para una lógica modal y multivaluada. Dada la complejidad de los cálculos, no presentamos demostraciones, solo mostramos los resultados para este ejemplo que fue estudiado en [3].

Tomamos el álgebra cuyo universo es

$$Ł_3 = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\},$$

con el orden heredado de los reales (por lo que $\wedge$, $\vee$, 0, y 1 quedan determinados) y las operaciones

$$a \to b = \text{mín}\{1, 1 - a + b\} \quad a * b = \text{máx}\{0, (a + b) - 1\}.$$

El álgebra $\mathbf{Ł}_3 = \langle Ł_3, *, \to, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ se conoce como la MV-cadena de tres elementos y es un retículo residuado finito. Posee otras operaciones adicionales que se definen a partir de las anteriores: $\neg a = a \to 0 = 1 - a$ y $a \oplus b = \neg(\neg a * \neg b) = \text{mín}\{1, a + b\}$ (ver detalles en [4]).

Esta cadena $\mathbf{Ł}_3$ genera una cuasivariedad MV_3 de álgebras[5] que constituyen la semántica algebraica del cálculo proposicional tres valuado de Łukasiewicz, uno de los cálculos multivaluados más sencillos y con mayor cantidad de aplicaciones.

A continuación daremos una caracterización de la cuasivariedad generada por las álgebras complex determinadas por marcos de Kripke $Ł_3$-valuados, esto es, de la mínima cuasivariedad que contenga todas las álgebras complex de la forma $\langle \mathbf{Ł}_3^W, \Box\rangle$ con $\langle W, R\rangle$ un marco de Kripke $Ł_3$-valuado.

Abreviamos $x * x = x^2$ y $x \oplus x = 2x$. Un álgebra $\langle \mathbf{A}, \Box\rangle$ es una ML_3-álgebra si $\mathbf{A} \in MV_3$ y $\Box$ es un operador unario que satisface:

(M$_1$) $\Box 1 = 1$,

(M$_2$) $\Box(x \wedge y) = \Box x \wedge \Box y$,

(M$_3$) Si $(2x \wedge y^2) \to 2z = 1$ entonces $(2(\Box x) \wedge (\Box y)^2) \to 2(\Box z) = 1$,

(M$_4$) Si $(2x \wedge y^2) \to z^2 = 1$ y $2y \to 2z = 1$ entonces $(2(\Box x) \wedge (\Box y)^2) \to (\Box z)^2 = 1$.

Denotamos por $\mathbb{ML}_3$ la cuasivariedad de ML_3-álgebras.

> La quasivariedad $\mathbb{ML}_3$ es la semántica algebraica de la lógica minimal modal sobre $Ł_3$, esto es, la lógica determinada por los modelos de Kripke $Ł_3$-valuados.

La forma de obtener las ecuaciones y cuasiecuaciones depende tanto del álgebra sobre la que se evalúa, como de las características de la relación R de los marcos. Eso escapa a la complejidad de esta presentación, y es parte del trabajo de los matemáticos que hacemos lógica algebraica: caracterizar los sistemas, comprender sus propiedades, estudiar sus alcances y compararlos con otros ya existentes.

8. Conclusiones

La demanda de sistemas lógicos que puedan razonar de manera eficiente con enunciados que sean a la vez vagos e inciertos se hace imperiosa en los tiempos actuales en los que grandes volúmenes de información deben procesarse de forma precisa.

Los sistemas de lógicas modales multivaluadas y difusas son una herramienta para modelar este razonamiento. Si bien este tipo de sistemas pueden plantearse y estudiarse de maneras muy diversas, el estudio de semánticas algebraicas ofrece un contexto seguro y con múltiples posibilidades de aplicaciones.

Nuestro objetivo en este artículo es presentar de manera sintética e informal las semánticas posibles para el análisis de sistemas de lógicas modales y difusas, y el problema que se debe abordar al tratar de trabajar con dos tipos de semánticas distintas. Aunque

[5] MV_3 es en realidad una variedad de álgebras, puesto que se puede caracterizar por ecuaciones.

la noción de relación de consecuencia lógica es fundamental a la hora de plantear los sistemas, su comprensión escapa a la brevedad y simpleza de este texto. También obviamos detallar características deseables de los sistemas, o especificidades a la hora de modelar los conectivos lógicos. Dejamos para el lector interesado algunas referencias (la bibliografía es inmensa) donde profundizar el conocimiento del tema: [2], [5], [9].

La autora del artículo quiere agradecer a Marilina Carena por la invitación para esta publicación y a Miguel Andrés Marcos por sus aportes para mejorar el texto.

Referencias

[1] P. Blackburn, M. Rijke and Y. Venema (2001). *Modal Logic.* Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, 53. Cambridge University Press, Cambridge.

[2] F. Bou, F. Esteva, L. Godo and R. Rodriguez (2011). On the minimum many-valued modal logic over a finite residuated lattice. *Journal of Logic and Computation*, 5:21, 739–790.

[3] M. Busaniche, P. Cordero and R. Rodriguez (2022). Algebraic semantics for the minimum many-valued modal logic over $Ł_n$. *Fuzzy Sets and Systems*, 431: 94–109.

[4] R. Cignoli, I. D'Ottaviano and D. Mundici (2000). *Algebraic foundations of many-valued reasoning.* Trends in Logic-Studia Logica Library, 7. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[5] M.C. Fitting (1991 and 1992). Many-valued modal logics and Many-valued modal logics II. *Fundamenta Informaticae*, 15 (3-4): 235–254 and 17 (1-2): 55–73.

[6] J.M. Font (2016). *Abstract Algebraic Logic: An Introductory Textbook.* Studies in Logic, Mathematical Logic and Foundations, Vol 60, College Pub.

[7] N. Galatos, P. Jipsen, T. Kowalski and H. Ono (2007). *Residuated lattices: an algebraic glimpse at substructural logics.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 151. Elsevier B. V., Amsterdam.

[8] P. Hájek (1998). *Metamathematics of fuzzy logic.* Trends in Logic-Studia Logica Library, 4. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[9] G. Hansoul and B. Teheux (2013). Extending Lukasiewicz logics with a modality: Algebraic approach to relational semantics, *Studia Logica,* 101(3): 505–545.

[10] R. Jansana (1990). *Una introducción a la lógica modal.* Editorial Tecnos, Madrid.

[11] S. Kripke (1963). Semantical analysis of modal logic. I. Normal modal propositional calculi. *Z. Math. Logik Grundlagen Math.* 9, 67–96.

[12] T. Moraschini (2021). Algebraic Logic, class notes of the Master in Pure and Applied Logic, Department of Philosophy, University of Barcelona.

Ir al índice general

NOTICIERO

ISSN 1514-9595 (web)

Miradas Matemáticas

Entrelazando bases

Carlos Cabrelli

Universidad de Buenos Aires - IMAS - CONICET

Motivación

En procesamiento de señales, una señal continua usualmente se discretiza tomando muestras a través de sensores equi-espaciados o distribuidos con algún criterio. La información recogida por los sensores debe ser suficiente para reconstruir la señal. Otro requerimiento, sobre todo en presencia de ruido, es que la reconstrucción sea estable. O sea, que una pequeña perturbación en las muestras no impacte excesivamente la reconstrucción.

En ciertas aplicaciones en procesamiento distribuido se presenta la siguiente situación: supongamos que tenemos dos líneas de sensores que notamos por $A = \{a_i\}$ y $B = \{b_i\}$, donde a_i y b_i son los sensores del nodo i. Ambas líneas tienen la propiedad de reconstrucción estable. Es decir, si se tienen muestras de una señal tomadas por los sensores de la línea A, esta señal puede ser reconstruida de manera estable. Lo mismo ocurre con la línea B.

Supongamos ahora que una señal es muestreada, pero en cada nodo se activa solo uno de los dos sensores, según algún criterio, pero no siempre de la misma línea.

¿Se podrá en este caso reconstruir la señal a partir de esta información?

En otras palabras, si se forma una sola línea entrelazando sensores de A y de B, (uno en cada nodo), ¿esta nueva línea constituye todavía un conjunto de reconstrucción estable?

Bases entrelazadas, definición y una caracterización

El hecho que la línea de sensores sea un conjunto de muestreo estable se traduce matemáticamente en términos de *marcos* en espacios de Hilbert. Los marcos son generalizaciones de la noción de base (ver [3] para más detalles).

En esta nota nos ocuparemos del caso particular en que los marcos son bases del espacio.

Definición: *Sea n un número natural, y sean $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{w_1, \dots, w_n\}$ dos bases de $\mathbb{C}^n$, $I = \{1, \dots, n\}$. Se dice que $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ están **entrelazadas** si para todo $J \subset I$ el conjunto $\{v_j\}_{j \in J} \cup \{w_j\}_{j \in I \setminus J}$ es una base de $\mathbb{C}^n$.*

La caracterización de bases entrelazadas pareciera ser un problema sencillo de resolver, pero como veremos enseguida presenta serias dificultades.

La primera observación, que es fácil de comprobar, es que la relación de entrelazamiento es reflexiva y simétrica, pero *no* transitiva. Por otro lado, el entrelazamiento en general depende del orden. Por ejemplo, la base canónica de $\mathbb{C}^n$ está entrelazada con ella misma, pero nunca con una permutación de ella. Esto motiva que estudiemos el siguiente problema: *dadas dos bases, ¿cuándo existe una permutación de una de ellas que está entrelazada con la otra?*

Si dos bases están entrelazadas y le aplicamos a ambas un isomorfismo (el mismo a las dos), entonces sus imágenes, que también son bases, están entrelazadas. Luego, podemos restringirnos, sin perder generalidad, a estudiar cuándo una base está entrelazada con la base canónica.

Pregunta: *dada una base ortogonal, ¿existe siempre una permutación que esté entrelazada con la base canónica?*

Si agrupamos los vectores de una base como columnas de una matriz, decir que esa base está entrelazada con la base canónica es equivalente a ver que si elegimos cualquier $J \subset I$ y para cada $j \in J$ reemplazamos la j-ésima columna de la matriz por el j-ésimo vector de la base canónica, la matriz sigue siendo inversible.

Luego, la pregunta puede parafrasearse como: dada una matriz unitaria, ¿existe una permutación de sus columnas que la entrelaza con la base canónica? O también, dada una matriz unitaria, ¿existe una permutación de sus columnas tal que la sustitución de $\#J$ de sus columnas por las correspondientes de la base canónica la deje inversible para cualquier subconjunto J de I?

En lo que sigue vamos a dar una caracterización de bases entrelazadas que nos servirá para estudiar sus propiedades y construir ejemplos y contraejemplos.

Sea $A = \{a_{i,j}\}$ en $\mathbb{C}^{n \times n}$ una matriz cuadrada. Una submatriz cuadrada de A se dice **central** si es de la forma $A_J = \{a_{i,j}\}_{i,j \in J}$ para algún subconjunto $J \subset I$. Notar que cada elección de $J \subseteq I$, no vacío, define una submatriz central. O sea que A tiene $2^n - 1$ submatrices centrales. En particular, los elementos de la diagonal son submatrices centrales.

Ahora, dadas dos bases $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{w_1, \dots, w_n\}$ de $\mathbb{C}^n$, denotemos por $A = \{a_{i,j}\}$ a la matriz de cambio de base, i.e.

$$w_i = a_{1,i} v_1 + \cdots + a_{n,i} v_n, \qquad \text{para todo } i \in I.$$

Teorema ([2]). *Dos bases de $\mathbb{C}^n$ están entrelazadas si y solo si todas las submatrices centrales de la matriz de cambio de base son inversibles.*

Es interesante que la propiedad de entrelazamiento pueda ser puesta en términos de propiedades de una matriz.

La clase *W*

Notemos por W la clase de matrices cuadradas con coeficientes complejos tal que todas sus submatrices centrales son inversibles, y por W_n las de orden n, o sea

$$W_n = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} \colon A \in W\}.$$

Observar que cuando una de las bases consideradas es la canónica, los vectores columnas de la matriz de cambio de base son los vectores de la otra base. O sea, si $\mathcal{B}_1$ es la base canónica y $\mathcal{B}_2 = \{w_1, \ldots, w_n\}$, entonces $Ae_i = w_i,\ i = 1, \ldots, n$. Teniendo en cuenta este comentario, el problema de estudiar bases entrelazadas se reduce a estudiar cuándo una matriz pertenece a la clase W. O sea, dadas dos bases, estas están entrelazadas si y solo si el isomorfismo que lleva una de ellas a la base canónica lleva la otra a una base, con vectores que son columnas de una matriz de W.

A continuación estudiaremos las propiedades de la clase W. Usando esta caracterización, la pregunta anterior puede ser reformulada de la siguiente forma: dada una matriz unitaria en $\mathbb{C}^{n\times n}$, ¿existe alguna permutación de sus columnas que la lleve a W_n? Como el lector puede verificar, el resultado es cierto en dimensiones 1 y 2. Para dimensiones mayores no lo sabemos.

Usando esta caracterización se puede ver que si una matriz está en la clase W, entonces su transpuesta y su adjunta también están en W. En particular, si las columnas de una matriz están entrelazadas con la base canónica, sus filas también. Estas propiedades se deducen fácilmente notando que las submatrices centrales de la transpuesta son la transpuesta de las submatrices centrales. Lo mismo para la adjunta.

Por otro lado, si A está en W, usando que la matriz identidad pertenece a W y multiplicando ambas por la inversa de A (A es inversible por pertenecer a W), queda que la inversa también está en W.

Vamos a describir ahora una propiedad interesante para las aplicaciones. Supongamos, por un momento, que se quiere codificar una señal discreta $x = (x_1, \ldots, x_n)$ usando una matriz A. Sea $y = Ax$. Si A es inversible, x puede ser recuperado a través de la inversa de A aplicada a y. Pero si sabemos que A está en W entonces x puede ser recuperado a partir de $\{y_j\}_{j\in J} \cup \{x_j\}_{j\in I\setminus J}$ para cualquier conjunto de índices $J \subset I$.

Otra propiedad importante de la clase W_n como subconjunto de las matrices $M_n = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n}\}$ es que es un conjunto abierto, denso y tal que $M_n \setminus W_n$ tiene medida de Lebesgue cero. Para ver que es un conjunto abierto basta ver que $A \in M_n \setminus W_n$ si y solo si existe una submatriz central de A no inversible o sea

$$\prod_B \det(B) = 0,$$

sobre todas las submatrices centrales B de A. El lado izquierdo es un polinomio en varias variables cuyo conjunto de ceros tiene las propiedades mencionadas arriba.

Matrices de Fourier

En esta sección vamos a estudiar la pertenencia a la clase W para una familia de matrices muy importante en las aplicaciones.

Sea F_n la n-ésima matriz de Fourier, i.e. $F_n = \left[\frac{1}{\sqrt{n}} e^{2\pi jk/n}\right]_{j,k=0}^{n-1}$.

Estas matrices son unitarias y sus elementos son raíces de la unidad de orden n multiplicados por la constante $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Su importancia radica en que, vista como una transformación lineal, representa la transformada de Fourier en el grupo cíclico $\mathbb{Z}_n$. Podemos escribir $F_n x = \widehat{x}$ para $x \in \ell^2(\mathbb{Z}_n) = \mathbb{C}^n$.

En el caso de matrices de Fourier, se puede probar que la pertenencia a la clase W basta verificarla para submatrices centrales $\{A_J : 1 \in J\}$, o sea, submatrices que contengan al a_{11}, que en el caso de las matrices de Fourier es igual a $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Esta propiedad es fácil de probar sacando factores comunes de las filas y columnas de una submatriz central cualquiera que no contenga al elemento a_{11}.

Un teorema de Chebotarëv de 1926 afirma que si p es primo, entonces *toda* submatriz cuadrada de F_p es inversible. O sea que en el caso de p primo, F_p está en W. Esto dice que la base de Fourier (las columnas de F_p) está entrelazada con la base canónica de $\mathbb{C}^p$. Entonces, si reemplazamos algunas columnas de la matriz de Fourier por los vectores canónicos correspondientes, la matriz sigue siendo inversible. De aquí puede deducirse la siguiente propiedad: si p es primo, entonces todo $x \in \mathbb{C}^p$ puede reconstruirse a partir de cualquier entrelazado de las componentes de x y $\widehat{x}$.

Ahora nos preguntamos, ¿para qué valores de n, que no sean primos, F_n está en W? Se puede probar que si n tiene un cuadrado en su factorización, entonces F_n no está en W. ¿Será necesaria esta condición para la no pertenencia a W? O sea, si F_n no está en W, ¿necesariamente n tiene un cuadrado? No lo sabemos.

Otra pregunta que surge es la siguiente. Si p es primo, sabemos que F_p tiene la propiedad de que toda permutación de sus columnas sigue estando en W. Más aún, todas sus submatrices cuadradas son inversibles. De hecho, una matriz unitaria tiene todas sus permutaciones en W si y solo si todas sus submatrices cuadradas, no necesariamente centrales, están en W. ¿Serán las F_p con p primo las únicas matrices unitarias con esta propiedad?

El caso infinito dimensional

Este problema se extiende naturalmente al caso infinito dimensional. En particular, a espacios de Hilbert separables sobre los complejos. Aquí las cuestiones son más técnicas y quizás más difíciles. Notablemente muchas de las propiedades que se discutieron en las secciones anteriores siguen siendo válidas en este nuevo contexto, con las obvias modificaciones.

Veamos primero las definiciones. La extensión más natural de la noción de base a un espacio de Hilbert infinito dimensional $\mathcal{H}$ es la de *base de Riesz*. Hay otras nociones más generales que no vamos a considerar, como las bases de Schauder más apropiadas para los espacios de Banach, o la de marco (frame) que generaliza las bases en otra dirección. En todos estos casos la propiedad de entrelazamiento tiene sentido, y hay trabajos al respecto.

En esta nota nos concentraremos brevemente en el caso de bases de Riesz. Las bases de Riesz pueden verse como una generalización de las bases ortonormales de un espacio de Hilbert. En una base de Riesz cada vector se escribe como una serie con coeficientes únicos que converge incondicionalmente (o sea, sin importar el orden de los sumandos).

Sea I ahora un conjunto de índices numerable. Cada base de Riesz $\{v_k\}_{k\in I}$ tiene asociada una única base de Riesz $\{w_k\}_{k\in I}$ llamada **biortogonal**, que cumple que

$\langle v_k, w_j \rangle = \delta_{k,j}$. Para cada $v \in \mathcal{H}$ se tiene que

$$v = \sum_k \langle v, w_k \rangle \, v_k = \sum_k \langle v, v_k \rangle \, w_k.$$

Formalmente, decimos que una sucesión de vectores $\{v_k\}_{k \in I} \subset \mathcal{H}$ es una **base de Riesz** de $\mathcal{H}$ si existe un operador acotado y biyectivo de $\mathcal{H}$ en sí mismo, que manda una base ortonormal en los $\{v_k\}_{k \in I}$. O sea, las bases de Riesz son imágenes por isomorfismos de bases ortonormales. Si el isomorfismo no es isométrico, entonces se pierde la ortogonalidad. Equivalentemente, decimos que $\{v_k\}_{k \in I} \subset \mathcal{H}$ es una base de Riesz si es un conjunto *completo* en $\mathcal{H}$ tal que existen constantes $0 < A \leq B$ que satisfacen

$$A \sum_k |c_k|^2 \leq \left\| \sum_k c_k v_k \right\|_{\mathcal{H}}^2 \leq B \sum_k |c_k|^2,$$

para toda sucesión finita de escalares $\{c_k\}_k \subset \mathbb{C}$. Las constantes A y B se llaman constantes de la base.

Dos bases de Riesz $\{v_k\}_{k \in I}$ y $\{w_k\}_{k \in I}$ de $\mathcal{H}$, al igual que antes, se dicen **entrelazadas** si para cada $J \subset I$ el conjunto $\{v_k\}_{k \in J} \cup \{w_k\}_{k \in I \setminus J}$ sigue siendo base de Riesz.

En [1] se prueba el sorprendente resultado que si dos bases de Riesz están entrelazadas, entonces las constantes de Riesz de todos los entrelazamientos están uniformemente acotadas.

Veamos ahora algunos resultados de dimensión finita que se trasladan al caso infinito. Quizás el más importante sea el teorema de caracterización por matrices que vale con las siguientes modificaciones.

Dadas dos bases de Riesz $\{v_k\}_{k \in I}$ y $\{w_k\}_{k \in I}$ de $\mathcal{H}$, existe un operador acotado de **cambio de base**, $A\colon \ell^2(I) \to \ell^2(I)$, con $A = \{a_{i,j}\}$, tal que $w_i = \sum_j a_{j,i} v_j$, para $i = 1, \ldots, n$.

Si $J \subset I$, uno puede definir el operador representado por la matriz $A_J = \{a_{i,j}\}_{i,j \in J} : \ell^2(J) \to \ell^2(J)$. A estos operadores los llamamos **centrales** y están acotados para todo $J \subset I$.

Entonces vale el **teorema**: *dos bases de Riesz en $\mathcal{H}$ están entrelazadas si y solo si los operadores centrales del operador de cambio de base son inversibles y con cotas uniformes por arriba y por abajo, i.e.* $0 < c_1 \|v\| \leq \|A_J v\| \leq c_2 \|v\|$, *para todo v en* $\overline{span}\{e_j : j \in J\}$.

Luego se puede considerar nuevamente la clase W y estudiar las propiedades de estos operadores. Para terminar, una propiedad interesante es la siguiente.

Supongamos que tenemos un operador acotado $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ y una base ortonormal $\{e_j\}_{j \in I}$ de $\mathcal{H}$. Si $A = \{a_{i,j}\}$ con $Te_j = \sum_{s \in I} a_{s,j} e_s$, entonces si A está en W vale la siguiente propiedad: si $M = \overline{span}\{e_j : j \in J\}$ y $N = \overline{span}\{e_j : j \in I \setminus J\}$, cada $v \in \mathcal{H}$ puede ser recuperado a partir de $P_M v$ y $P_N T v$, para todo $J \subseteq I$, donde P_M y P_N son las proyecciones ortogonales sobre los correspondientes subespacios.

Nota: *Este artículo constituye una descripción abreviada y de carácter expositorio sobre un tema en el que he estado trabajando en colaboración con Ursula Molter y Felipe Negreira. No he incluido demostraciones ni muchos detalles técnicos para hacer más amena la lectura y llegar pronto a la comprensión del problema y sus particularidades. Los interesados en profundizar en el tema pueden consultar el artículo [2]. Agradezco a las autoridades de la Unión Matemática Argentina por darme la oportunidad de difundir este tema.*

Referencias

[1] T. Bemrose, P.G. Casazza, K. Gröchenig, M.C. Lammers, R.G. Lynch (2016). *Weaving frames.* Oper. matrices, 10, 1093–1116.
https://arxiv.org/pdf/1503.03947.pdf

[2] C. Cabrelli, U. Molter, F. Negreira (2024). *Weaving Riesz bases.*
https://arxiv.org/abs/2404.02229

[3] Frame (linear algebra). Wikipedia.
https://en.wikipedia.org/wiki/Frame_(linear_algebra).

Ir al índice general

NOTICIERO

ISSN 1514-9595 (web)

Educación Matemática

La enseñanza de la matemática. Perspectivas y desafíos

Betina Duarte

Unipe

Si bien nuestro interés es el de escribir acerca de la enseñanza de la matemática, consideramos necesario comenzar con algunas cuestiones acerca de la matemática como disciplina. En efecto, la enseñanza de la matemática enfrenta un desafío específico: la comprensión de objetos ideales por parte de los estudiantes. Ciertamente esta característica es compartida por otras disciplinas como la filosofía, aunque es notable que la enseñanza de la matemática se espera comience a muy corta edad, tal vez desde los cuatro años. El desafío de enfrentar a niños y niñas a procesos de abstracción, a entidades a las que no puede accederse a través de la percepción sensorial está en manos del proyecto educativo en relación con la matemática específicamente en muchos países.

Sumado a esto, los objetos de la matemática tienen otra característica distintiva, ahora incluso de la filosofía: obedecen a construcciones axiomáticas. Tal vez no sea necesario explicarle al público lector a qué nos referimos. No obstante, creemos oportuno reflexionar acerca de la centralidad de esta cuestión no solo para la producción de la disciplina sino también para su enseñanza y aprendizaje. Necesitamos retroceder en el tiempo hasta Euclides, quien se propuso ordenar aquello que él consideró eran las más importantes nociones de la geometría, para lo cual consideró necesario proponer ciertos puntos de partida “intuitivos” sin explicación. Esto nos señala hasta qué punto la axiomática es constitutiva de la matemática. A partir de estas intuiciones o axiomas ordenó todas las proposiciones existentes a su alcance, dando a la geometría una estructura axiomática, un ordenamiento que resistió a varios embates a lo largo de la historia [Levi, 1947]. Esta formalización fue varias veces desarrollada en diferentes subcampos de la matemática. La historia de la disciplina da cuenta de causas y consecuencias de estos procesos.

Esta visión y estructuración de la matemática seguramente ha influido en su enseñanza: elegir un corpus de ideas potentes del campo y explicar las nociones partiendo de lo más sencillo hacia lo más complejo, comunicar las nociones teóricas necesarias y también los procedimientos que ponen en funcionamiento estas nociones para resolver problemas, utilizar ejercicios de práctica como medio de comprensión y avance sobre las ideas transmitidas y de evaluación de los aprendizajes a través de la resolución de tareas similares a las ejercitadas, aquello que reconocemos como problemas tipo. En esta modelización de la enseñanza hay supuestos, implícitos e hipótesis. La caja negra de esta modelización es la comunicación o transmisión del conocimiento. Las buenas decisiones sobre la comunicación aseguran buenos aprendizajes. Se modeliza la *enseñanza como transmisión.*

La Didáctica de la Matemática asume la condición de ideal de los objetos de la disciplina, pero considera que la axiomática no resulta una forma buena de transmisión de las nociones de la disciplina [Brousseau, 2002, pp. 38]. También cuestiona a los aprendizajes en el paradigma de la transmisión. Es decir, para una amplia mayoría de marcos teóricos desarrollados para estudiar el problema de la enseñanza y del aprendizaje de la matemática, enseñar matemática requiere un proyecto que supere la transmisión de nociones construidas por la disciplina y aprender matemática no significa disponer de y reproducir el mapa conceptual de nociones matemáticas recibidas. Se critica al modelo de la transmisión que “confina al estudiante al papel de espectador y al profesor al de presentador del espectáculo”. [Brousseau, 2000, pp. 10]

Esta crítica dirigida al modelo de la *enseñanza como transmisión* no proviene exclusivamente de la didáctica. Desde la propia disciplina también hay posiciones de resistencia a la visión de una Matemática formalizada y axiomática para su enseñanza y aprendizaje. A lo largo del siglo XX, mientras surgía el fenómeno de la matemática moderna como una respuesta a la necesidad de mejorar los aprendizajes, las críticas a los modos de enseñanza y aprendizaje de la disciplina surgieron de la propia comunidad matemática.

Así, Imre Lakatos (1922-1974) nacido en Hungría y radicado en Reino Unido, defendió una visión de la matemática con foco en los procesos heurísticos, creativos, de formulación de procedimientos y de conjeturas por encima de los procesos de demostración rigurosa y formal como punto de partida. Para Lakatos esta matemática informal poseía un alto valor tanto para la propia matemática como para su aprendizaje [Lakatos, 1976, Lakatos, 1981].

De modo similar George Polya (1887-1985), también nacido en Hungría y radicado en EEUU (Princeton), propuso estimular la actividad de resolución de problemas dejando en segundo plano la transmisión de conceptos teóricos. El énfasis en la producción de conocimiento acerca de los modos de resolución de problemas o bien de heurísticas marcó un punto de inflexión no solo en la visión de la matemática como disciplina sino en su enseñanza.

Avanzando en el siglo XX, Morris Kline (1908-1992) matemático, docente investigador del Instituto Courant, ha sido un enérgico y carismático crítico de la enseñanza de la matemática de posguerra, sosteniendo que los problemas relativos a la formación de estudiantes universitarios abarcaban tanto al diseño de planes de estudio, a los textos utilizados como al accionar del propio profesorado [Kline, 1973]. Kline discutió con la comunidad matemática y con el sistema de enseñanza de EEUU desarrollando propuestas bajo esta perspectiva [Kline, 1967, Kline, 1985].

En nuestro país el matemático Luis Santaló (1911-2001) se involucró activamente en temas de educación matemática a través de la escritura de libros de textos, reflexiones dirigidas al profesorado, y la participación en espacios de formación y de decisión sobre la enseñanza[1]. Elegimos compartir un extracto de su libro sobre la educación matemática en el que precisa la necesidad de considerar una multiplicidad de aspectos de la disciplina para su enseñanza:

[1]Santaló fue presidente del Comité Interamericano de Educación Matemática en el período 1972-1979.

"Una matemática dirigida únicamente a las aplicaciones y a los cálculos necesarios para las mismas termina por estancarse y perder vitalidad. Una matemática dedicada solamente a las especulaciones teóricas, alejada de los problemas de la vida real, se transforma en pura filosofía o en un conjunto de virtuosismos del pensamiento, que se desvanecen por falta del alimento que suministran la naturaleza y sus fenómenos. La educación matemática debe ser un justo balance y un puente fluido entre el mundo de las ideas y el mundo de las acciones." [Santaló, 1986, pp. 8]

Finalmente, acercamos el señalamiento que Adrián Paenza – matemático argentino, periodista y reconocido divulgador de la matemática – realiza acerca de la necesidad de presentar problemas genuinos a los estudiantes para que la matemática pueda, de este modo, aparecer como un medio para resolverlos. Se cuestiona y nos interpela al preguntarse si entramos a la matemática por la puerta equivocada cuando ofrecemos respuestas a preguntas que los estudiantes no se han formulado[2].

A modo de síntesis señalamos algunos rasgos distintivos del modelo de enseñanza de la matemática como transmisión.

- Los docentes tienen la palabra, enuncian, transmiten el saber, explican ideas y procedimientos mientras que los estudiantes reciben la información, realizan ejercicios y problemas de aplicación.
- El conocimiento se "troquela" en partes pequeñas, para su mejor transmisión y asimilación, siguiendo una ruta de lo fácil hacia lo complejo.
- Resulta un modelo efectivo para la comunicación del saber ya que ofrece una economía del tiempo, de esfuerzos y de organización.

Ahora bien, este modelo de enseñanza genera algunos fenómenos didácticos que se señalan desde la crítica tales como, por un lado, una experiencia de ajenidad, con ello nos referimos al hecho que los estudiantes no entienden el proyecto de enseñanza, no comprenden el fin último de aquello que están aprendiendo y lo que les queda es adherir localmente a fragmentos del saber; por otro lado, aparece de forma recurrente la constatación de que los aprendizajes se olvidan rápidamente, un fenómeno que aparece a medida que se dejan de utilizar los conceptos y procedimientos de rigor y se pierden las prácticas adquiridas.

Una parte del cuestionamiento a este estilo de enseñanza se apoya en la distancia entre este modelo de transmisión y las formas que asume la producción del conocimiento matemático. Cuando se analiza la actividad de la comunidad matemática el escenario parece disponer de momentos característicos. En el primer momento existen problemas y preguntas acerca de alguna cuestión. Estos problemas con sus preguntas llevan al matemático a la exploración de distintas alternativas haciendo funcionar casos particulares, restringiendo algunas variables detectadas, ensayando condiciones. Es un segundo momento en el cual se despliegan ideas informales que dan lugar a la producción de conjeturas. Si el ensayo da sus frutos algunas conjeturas, podrán ser validadas generando un momento de formulación de conceptos seguramente todavía provisorios o locales, pero algo más despegados de la casuística. La comunicación de estos hallazgos suele contribuir a la mejor formulación de los mismos, conduciendo a un siguiente momento donde el

[2]Conferencia brindada en la Universidad Andrés Bello, bajo el título "¿Entramos a la matemática por la puerta equivocada?". Ver aquí.

matemático se entrega a la formalización de sus ideas y, a través de ello, a la generación de un tal vez nuevo conocimiento matemático.

La propuesta de la didáctica de la matemática para pensar la enseñanza toma de esta visión de la producción de conocimiento algunas marcas y se propone un aula con producción de matemática, para esto centra su intención didáctica en el rol productivo de los estudiantes [Charlot, 1991].

Las teorías en didáctica de la matemática son profusas y jóvenes, la razón de este número puede estar dado por su propia juventud, pero también porque la enseñanza de la matemática dialoga con aspectos culturales de cada sociedad [Artigue, 1999]. Estas teorías desarrollan sus propios conceptos, principios y métodos considerando la actividad de enseñanza y aprendizaje de un modo global. Los modelos construidos comprenden las dimensiones epistemológicas, sociales y cognitivas del proceso de enseñanza y aprendizaje y procuran tomar en cuenta la complejidad de las interacciones entre el saber, los alumnos y el profesor, dentro del contexto particular de la clase.

Sólo para iniciar por alguna mencionamos la Teoría de Situaciones de Guy Brousseau [Brousseau, 2002]. La **Teoría de Situaciones** (TS) estudia: la búsqueda y la invención de situaciones[3] características de los diversos conocimientos matemáticos propios de la educación elemental, el estudio y la clasificación de sus variantes, la determinación de sus efectos sobre las concepciones de los alumnos, la segmentación de las nociones y su organización en procesos de aprendizaje largos. La didáctica estudia así las condiciones en las que emergen y se enseñan las nociones matemáticas. Brousseau propone que las situaciones tomen el conocimiento a construir y lo hagan evolucionar. Para ello concibe:

- situaciones de acción donde el conocimiento se pone en funcionamiento;
- situaciones de formulación donde el conocimiento se explicita;
- situaciones de validación donde se busca dar cuenta del porqué del conocimiento producido;
- situaciones de institucionalización donde el saber que es el proyecto de enseñanza se enlaza al conocimiento producido en contexto. Existe en este momento una descontextualización de las nociones elaboradas y se les da nombre a las ideas producidas.

En la concepción de esta teoría, las situaciones de enseñanza elaboradas procurando que la actividad intelectual de los estudiantes circule a través de estos momentos permiten el aprendizaje de las nociones esperadas. Podemos considerar en este planteo un cierto vínculo con la escena de producción matemática antes descripta.

Los diversos enfoques de la enseñanza y del aprendizaje han evolucionado en los últimos 50 años de forma tal que, si bien hay algunas certezas, todavía son muchas las conjeturas. Podemos decir que hay muchas teorías en proceso. Nos interesa avanzar en próximas presentaciones en documentar y acercar los hallazgos más potentes. También podemos decir que ya hubo marchas y contramarchas y los errores de algunos enfoques se han señalado y revisado.

De cualquier modo, es necesario reconocer que el aprendizaje de la matemática requiere un modelo de enseñanza que podríamos decir todavía está en proceso, que provoque placer

[3] El concepto de situación tal como lo entiende la TS refiere a un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina un conocimiento dado, como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable.

en quienes la aprenden; precisamos trabajar para que aprender matemática constituya una experiencia posible, que la matemática resulte accesible. Esto no significa que creamos que la matemática tiene que ser un contenido fácil, previsible o sencillo. Confiamos en que el desafío de aprender matemática en un nivel de enseñanza obligatorio tiene que convocar vocaciones y no expulsar espíritus curiosos.

Referencias

[Artigue, 1999] Artigue, M. (1999). The teaching and the learning of Mathematics at the University Level. Crucial Questions for Contemporary Research in Education. *Notices of the American Mathematical Society.* Diciembre, pp. 1377-1385.

[Brousseau, 2000] Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de la matemática. *Revista de Educación Matemática.* Vol. 12. Nro. 1, pp. 5-38.

[Brousseau, 2002] Brousseau, G. (2002). *Theory of Didactical Situations in Mathematics.* Kluwer Academic Publishers.

[Charlot, 1991] Charlot, B. (1991). La epistemología implícita en las prácticas de enseñanza de las matemáticas. Traducción en versión mimeo de la conferencia dictada en Cannes en marzo de 1986 y publicada en Bkouche, R., Charlot, B. y Rouche, N. Faire des mathematiques: le plaisir du sens. París, Armand Colin. `https://isfd112-bue.infd.edu.ar/sitio/wp-content/uploads/2020/03/01-Articulo-de-Charlot-traducido.pdf`

[Kline, 1967] Kline, M. (1967). *Calculus: an intuitive and physical approach.* Segunda Edición. Dover Books.

[Kline, 1985] Kline, M. (1985). *Mathematics for the nonmathematicians.* Dover Books.

[Kline, 1980] Kline, M. (1980). *Matemáticas: la pérdida de la certidumbre.* Ed. Siglo XXI.

[Kline, 1973] Kline, M. (1973). *Why Johnny can't add: the failure of the new math.* St. Martin's Press.

[Lakatos, 1976] Lakatos, I. (1976). *Pruebas y Refutaciones.* La lógica del descubrimiento matemático. Alianza Editorial.

[Lakatos, 1981] Lakatos, I. (1981). *Matemáticas, ciencia y epistemología.* Madrid, Alianza.

[Levi, 1947] Levi, B. (1947). *Leyendo a Euclides.* Libros del Zorzal.

[Polya, 1945] Polya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton University Press.

[Santaló, 1986] Santaló, L. (1986). *La matemática en la educación.* Editorial docencia.

Ir al índice general

NOTICIERO

ISSN 1514-9595 (web)

Comunicación de la ciencia

La dignidad de tener códigos

Gustavo Cabaña

Universidad Nacional del Litoral

En los siguientes párrafos voy a intentar acercarte (o que nos acerquemos en compañía) a una de las herramientas matemáticas más usadas (quizás de forma involuntaria) por las personas: los códigos autocorrectores de errores. Básicamente, un código se encarga de que toda información que circule por un canal de comunicación pueda llegar de manera correcta a su destino. Vale la pena aclarar que, para poder implementar un código, necesitamos que el canal sea mediado por ciertas tecnologías.

Antes de adentrarnos en los códigos, es prudente decir algo sobre su prima hermana: la criptografía. Hoy en día, escuchamos la palabra 'criptografía' (o similares) en muchos contextos, como protección de transacciones monetarias o cifrado de extremo a extremo en conversaciones mediante ciertas aplicaciones. Su utilidad es permitir comunicaciones secretas, es decir, que solo accedan a la información personas autorizadas. Notemos que la diferencia con los códigos es que su uso permite que la información sea correcta, sin importarnos quién accede a ella.

Para entender un poco más el funcionamiento, pensemos que queremos enviar cierto mensaje por correo electrónico, mensajería instantánea o alguna plataforma de redes sociales. Redactamos el mensaje en el idioma que usamos, pero el dispositivo codifica el mensaje según su propio lenguaje. Ese mensaje codificado viaja a través de internet y llega a destino, potencialmente con errores. La tarea del código autocorrector es analizar el mensaje recibido, detectar posibles errores y corregirlos antes de que el dispositivo decodifique el mensaje en nuestro lenguaje.

Podemos suponer que un código es un diccionario de palabras posibles, el mensaje original que queremos enviar se transforma en una o varias palabras del diccionario. Luego de viajar por el canal, se chequea que todas las palabras sean parte del diccionario. Si alguna de las palabras transmitidas no está en el diccionario podemos concluir que ocurrieron errores. Según las propiedades del código podrán detectarse y corregirse una cierta cantidad máxima de errores.

Ese diccionario al cual nos estamos refiriendo se construye a partir de cierto alfabeto. Consideremos, por ejemplo, como alfabeto a $\mathcal{A} = \{0, 1\}$, es decir que las “letras” que podemos usar para formar palabras son 0 y 1. Puede ocurrir que todas las palabras del diccionario sean de la misma longitud, en este caso se dice que es un código de bloque.

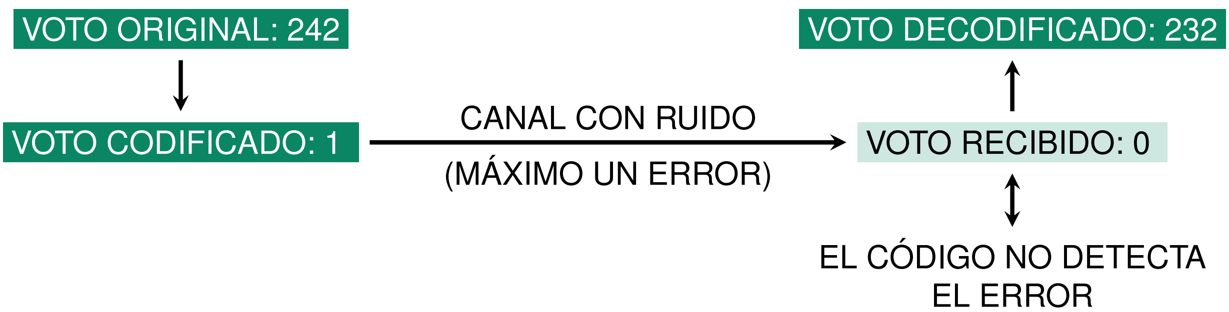
Para ver algunos casos sencillos de códigos vamos a situarnos en Springfield, donde se debe llevar a cabo una votación por la iniciativa “Las familias vienen primero”. Supongamos que la votación se realiza mediante voto electrónico y que se puede votar por la alternativa 242 (apoyando la iniciativa) o la 232 (contra la iniciativa). Además sabemos que al transmitir la información desde cada dispositivo de votación hacia el centro de cómputos se puede producir como máximo un error.

Analicemos diferentes códigos que podemos usar y cuáles son los escenarios que pueden aparecer en el voto puntual de Marge, que quiere votar a 242. Vamos a considerar tres códigos de bloque distintos con nuestro alfabeto $\mathcal{A} = \{0, 1\}$:

$$\mathcal{C}_1 = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right. , \qquad \mathcal{C}_2 = \left\{ \begin{array}{c} 00 \\ 11 \end{array} \right. \qquad \text{y} \qquad \mathcal{C}_3 = \left\{ \begin{array}{c} 000 \\ 111 \end{array} \right. ,$$

donde 0, 00 y 000 representan el voto a 232, mientras que 1, 11 y 111 representan el voto a 242.

Si usamos el código $\mathcal{C}_1$, el voto de Marge se codifica como 1 pero si ocurre un error en el canal, en el centro de cómputo se recibe 0, y como 0 es una palabra del diccionario se traducirá en un voto a 232, contrario a la voluntad de Marge.



Si usamos el código $\mathcal{C}_2$, el voto de Marge se codifica como 11 pero si ocurre un error en el canal, en el centro de cómputo se recibe, por ejemplo, 10. Como 10 no es una palabra del diccionario, se detecta que ha ocurrido un error. El problema es que no podemos corregirlo pues podría ser que el voto codificado sea 11 y el error estar en la segunda posición, o podría ser 00 y el error estar en la primera posición.

VOTO ORIGINAL: 242 → VOTO CODIFICADO: 11 → CANAL CON RUIDO (MÁXIMO UN ERROR) → VOTO RECIBIDO: 10 → VOTO DECODIFICADO: NULO

EL CÓDIGO DETECTA
EL ERROR PERO
NO PUEDE CORREGIR

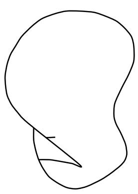
Si usamos el código $\mathcal{C}_3$, el voto de Marge se codifica como 111 pero, si ocurre un error en el canal, en el centro de cómputo se recibe, por ejemplo, 110, y como 110 no es una palabra del diccionario, se detecta que ocurrió un error. Como sabemos que puede ocurrir como máximo un error, la palabra 110 no puede provenir de 000, por lo que podemos corregir el error y el voto de Marge efectivamente es a 242.

VOTO ORIGINAL: 242 → VOTO CODIFICADO: 111 → CANAL CON RUIDO (MÁXIMO UN ERROR) → VOTO RECIBIDO: 110 → VOTO DECODIFICADO: 242

EL CÓDIGO DETECTA
Y CORRIGE EL ERROR

En particular, estos ejemplos se conocen como códigos de repetición y no representan la única manera de construir códigos. Existen muchas maneras y herramientas de diferentes áreas de la matemática que brindan distintas construcciones de códigos, cada una con bondades particulares, según lo que sea necesario. De todos modos, es indudable que la implementación de códigos le impone cierta dignidad al proceso que los usa.

Dignidad:

1. Cualidad de la cosa que merece respeto.
2. 

(Si no la reconoce, puede hacer clic acá.)

Ir al índice general

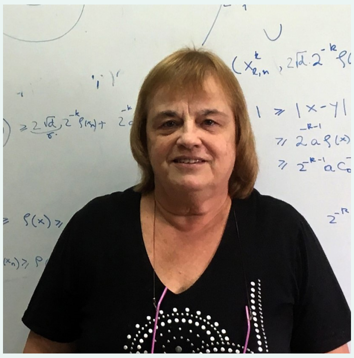
NOTICIERO

ISSN 1514-9595 (web)

Diálogos

Entrevistas a integrantes de la comunidad matemática

Entrevistada: Eleonor "Pola" Harboure



"Pola", apodo con el que se la reconoce en el ámbito académico nacional e internacional, nació el 15 de junio de 1948 en Buenos Aires. A los 22 años se recibió de Licenciada en Matemática en la Universidad de Buenos Aires y, en 1972, llegó como profesora a la joven Universidad Nacional de Río Cuarto. Obtuvo su doctorado en 1978 en menos de cuatro años en la Universidad de Minnesota, Estados Unidos.

En 1978 regresó al país, radicándose en la ciudad de Santa Fe. Allí, junto a su marido Néstor Aguilera, fueron los primeros investigadores del Programa Especial de Matemática Aplicada (PEMA), que luego se convertiría en el Instituto de Matemática Aplicada del Litoral (IMAL), dependiente del CONICET y de la Universidad Nacional del Litoral (UNL). Pola fue la primera directora del IMAL. Se desempeñó como Profesora Titular de la Facultad de Ingeniería Química de la UNL por más de tres décadas.

Se especializó en análisis armónico, consolidando el desarrollo de este campo con su gran capacidad, solidez y pasión. Fue una pionera en el desarrollo de la matemática argentina, siempre con la vocación de abrir espacios para impulsar a los más jóvenes. Fue la primera mujer, en el área Matemática, promovida a la máxima categoría de investigación en el CONICET, Investigadora Superior (2011), y la primera mujer Presidenta de la UMA. Fue nombrada miembro de la Academia Nacional de Ciencias Exactas y Naturales, y Académica de la Academia Nacional de Ciencias.

Nos dejó físicamente el 15 de enero de 2022. *"Su obra deja una huella imborrable en la Matemática que trasciende el presente y vivirá por siempre"* (palabras de su colega y amiga Beatriz "Nora" Viviani).

Encontraremos a continuación extractos de la entrevista a "Pola" Harboure por Antonio "Nino" Cafure, publicada el día 10 de enero de 2021 en su canal de YouTube Matemática Sentimental.

Hace cuarenta y dos años, vos y Néstor, una pareja de jóvenes treintañeros con dos hijos muy chicos, llegaban a Santa Fe a modificar el rumbo de la matemática santafesina. ¿Cómo es que eligieron ese destino?

Estábamos terminando la tesis en Minnesota cuando empezamos a plantear la disyuntiva de volver o no volver. Volvemos, dijimos. La siguiente cuestión fue ¿a dónde? Una de las opciones era Buenos Aires. Le habíamos escrito a Manuel Balanzat, nos respondió muy amablemente y nos contó sobre la posibilidad de dos cargos de profesor adjunto para nosotros. La segunda opción era la Universidad de Río Cuarto donde habíamos trabajado antes de partir para hacer el doctorado. La tercera opción surgió un poco de casualidad. En la universidad de Minnesota habíamos conocido algunos ingenieros que venían desde Santa Fe a hacer el doctorado en ingeniería química. También el vicedirector de lo que en ese entonces era el INTEC pasó una estancia de seis meses en Minnesota. Él nos planteó la posibilidad de venirnos a Santa Fe.

Y eligieron Santa Fe, nomás.

Sí, antes de doctorarnos ya estábamos decididos. Nos estaban esperando. El CONICET había creado el PEMA y había otorgado un subsidio para la compra de bibliografía. En Santa Fe había una carrera de ingeniería química y contaban con algunos textos de matemática, aunque no había revistas ni libros de Matemática más avanzados. Tengo una de esas imágenes que te quedan grabadas. Estábamos todavía en Minneapolis y ahí, con el bebé sentado (Gerardo Aguilera), Néstor (Aguilera) y yo elegíamos libros y revistas de catálogos que nos prestó la bibliotecaria. Hicimos una lista para mandar a Santa Fe, para la compra de ese material bibliográfico con el dinero que nos habían dado. Así que bueno, veníamos ya precedidos de algo de matemáticas alrededor.

Ustedes sabían que llegaban a un ámbito donde no había una tradición de investigación en matemática. ¿Tenían claro lo que iban a hacer o pensaban que se hace camino al andar?, ¿hablaban con Néstor al respecto?

No sabíamos muy bien con qué nos íbamos a encontrar. Llegábamos con ganas de hacer cosas y, también, con cierta inconsciencia típica de la juventud. Sabíamos que íbamos en soledad. En ese momento los dos trabajamos en los mismos temas, incluso tenemos trabajos conjuntos de esa época. Por lo menos ya éramos dos. Igualmente, éramos unos pichones, recién nos habíamos doctorado.

Al poco tiempo de llegar, el Doctor Cassano, el ingeniero director de INTEC en ese momento, nos dijo: “El año que viene tienen que tener dos becarios, un becario cada uno”. Apenas teníamos tela para nosotros y ya teníamos que pensar en formar otra gente [risas]. Tuvimos bastante suerte con los dos becarios que reclutamos: Hugo Aimar, de Río Cuarto (Río Cuarto siempre presente), y Ricardo Nochetto, de Rosario, afincado en Maryland hace muchos años.

¿Te acordás cuántas tesis dirigiste? Me imagino que con la primera, la de Hugo Aimar, estarías preocupada. Con el correr del tiempo tuviste más alumnos, ¿estabas más confiada o colaborar con la tesis del doctorado seguía siendo una preocupación?

Dirigí nueve tesis. Siempre me resultó estresante porque es la vida de otras personas. Si a vos no te sale el teorema, no te sale a vos y ya está; pero si son jóvenes a los que guiás y su carrera depende de tu dedicación, de cómo los orientás, de los problemas que le des... para mí siempre fue una situación un poco estresante. Es una responsabilidad, es la vida de otra gente. Por eso, siempre me ocupé mucho de eso.

Pola, ¿seguís pensando problemas de matemática?

Sigo pensando problemas de matemática. Un vicio del que todavía no pude despegarme del todo. Sigo trabajando con Nora Viviani y Oscar Salinas, colegas con los que hace muchos años que venimos trabajando juntos. Y también con Bruno Bongioanni y con Pablo Quijano, el último de mis alumnos. Durante la pandemia estuvimos dando un curso de posgrado sobre teoría de semigrupos. Me entretuve con eso. Fue un momento oportuno para aprender algo nuevo.

¿Cómo ves la comunidad matemática argentina? Me gustaría escuchar tus palabras al respecto.

Me alegra que la UMA siga siendo protagonista, que a lo largo de los años se hayan incorporando más actividades a las reuniones anuales. Las actividades de educación matemática están desde hace tiempo; después se incorporaron las actividades para estudiantes, el festival de matemáticas y, ahora, el festival de rock [risas]. Ver tanta gente joven entusiasmada trabajando para esta versión 2020 de la UMA virtual fue increíble. Sinceramente, me llenó de alegría y de orgullo pertenecer a esta sociedad tan abierta, tan pasional.

Pola, estamos llegando al final de esta hermosa charla, de este hermoso recorrido por cincuenta años de historia matemática. Sos libre de compartir la reflexión final que quieras.

A todos los que sientan pasión por la matemática les diría que es una buena vida ser matemático. Hay algunos disgustos como en todas las cosas. Por ejemplo, cuando no podés demostrar un teorema o, como suele pasar, cuando ya lo demostró otra persona antes [risas]. Igualmente poniendo mucho de sí se sale adelante. No me arrepiento para nada de mi vida como matemática. No disfruté de todas las cosas que hice (la gestión no es muy reconfortante) pero sí de la mayoría. Disfruté de la docencia, de los alumnos de doctorado. Ellos te mantienen conectados con las generaciones que vienen, te enseñan a ver cómo es el mundo. A pesar de la distancia generacional que, a esta altura, en mi caso es bastante amplia, siempre se pueden crear puentes entre distintas generaciones. En el fondo muchos de nosotros tenemos los mismos valores aunque se manifiesten en forma diferente. Así que bueno, al que le guste la matemática, adelante.

Ir al índice general

NOTICIERO

ISSN 1514-9595 (web)

Experiencias y herramientas

El objetivo de esta sección es compartir experiencias y herramientas pensadas especialmente para quienes están transitando sus pasos iniciales dentro de la comunidad matemática, ya sea como estudiantes de grado, doctorado o post-doctorado. Para realizar una contribución a esta sección, por favor escribir a `noticiero.editorial.uma@gmail.com`.

El final es en donde partí

Arantxa Zapico

Ethereum Foundation

De chica me encantaba la Matemática, o al menos eso creía, hoy me corrijo y en realidad, me gustaba hacer cuentas. En el secundario empecé a participar en las Olimpíadas de Matemática (OMA) y descubrí dos cosas: que podía estudiar una carrera llamada Licenciatura en Matemática, y que poco tenían que ver la OMA y esa carrera con las cuentas que a mí me gustaban.

Hoy trabajo como investigadora en el grupo de Criptografía de la Fundación Ethereum (FE). No programo (pero me vendría bien), leo muchos papers, escribo algunos, doy charlas, veo charlas, doy clases. Aprendo, todos los días, un montón de cosas nuevas. Entré a la FE por una pasantía que hice durante mi doctorado, y me gusta pensar que me las ingenié de alguna manera para investigar haciendo cuentas.

Siempre defino la Criptografía como el arte de comunicarse de manera segura a través de canales inseguros. ¿Cómo es eso? Poder enviar un mensaje que sea solo entendible para el receptor (y, por supuesto, para la emisora), pero no para las partes que puedan interceptarlo en el camino. ¿Cómo es eso? Bueno, la emisora tiene que deformar de alguna forma el mensaje, lograr que sea inentendible para cualquiera excepto el receptor, que tiene que contar con las herramientas para volver a darle forma.

¿Cómo probamos que lxs interceptorxs no pueden entender el mensaje? Bueno, asumimos que hay cosas que no pueden hacer. Hay suposiciones que consideramos más débiles, más confiables, por estar bien estudiadas y por implicar muchas otras (por ejemplo, nuestra interceptora no puede quebrar el problema de logaritmo discreto), y otras más fuertes, por menos estudiadas, por ser reducciones de otras, o por ser claramente peores (asumir, por ejemplo, que existe una tercera parte involucrada, en la que ambxs, emisora y receptor, confían ciegamente).

Naturalmente, mientras más fuerte es nuestro modelo, más eficientes son los sistemas que podemos construir. Y la criptografía se pregunta muchas veces: ¿Cuáles son los mejores trade-offs eficiencia-seguridad que podemos conseguir?¿Qué preferimos en cada situación?¿Cuál es la línea entre la seguridad ideal y la vida real? Pero también, la criptografía construye. Y ahí es donde vive la diversión. Manipular un sistema criptográfico, dentro de una estructura, para tratar de hacerlo más eficiente, más flexible, más útil, sin romper la seguridad. Hacer cuentas.

Poco después de que empecé la carrera, empezaron las dudas. Me costaba imaginarme cosas que no podía ver, me parecían tediosas las demostraciones, no me interesaban los por qué, yo quería hacer cuentas. Y parecía que era la única a mi alrededor, que todxs disfrutaban de ese mundo abstracto en el que yo no me hallaba. Me quedé por la curiosidad, porque a cada paso descubría algo nuevo. Había mucha, muchísima más Matemática que la que yo conocía, de la que iba a llegar a aprender. Y también porque intuía que algo de toda esa Matemática tenía que ser para mí. Y que bueno que fue así, porque hoy disfruto muchísimo lo que hago y no me imagino trabajando en ninguna otra cosa.

Creo que hay una falsa concepción de que las oportunidades llegan a aquellxs que hacen todo bien, a lxs mejores en términos académicos, a lxs que encajan desde el principio. También creo que eso asusta y aleja a mucha gente de la ciencia, estuvo muy cerca de alejarme a mí misma. Pero en los pocos años que llevo en este mundillo aprendí que las oportunidades son de quien las busca, pregunta, se anima, charla, se encarga de ser alguien con quien la gente quiera trabajar y compartir, contagia entusiasmo, ganas de aprender, cree en lo que hace, en su trabajo y en el de lxs otrxs. Una vez leí una frase que decía algo así como “todxs en la academia son inteligentes, diferenciate siendo amable”. Le agregaría “y auténticx”.

Me recibí, ¿y ahora qué?

Gastón Andrés García

Centro de Matemática de La Plata

Hay ciertos momentos cruciales en la vida de quienes se embarcan en la aventura de estudiar matemática en los cuales se deben tomar decisiones que repercutirán en los próximos años de su vida. Entre esos momentos están aquellos en los que se termina una etapa y se está por comenzar otra; por ejemplo, al finalizar el estudio de grado o el de posgrado.

La transición del grado al posgrado se puede entender como el paso de ser estudiante a comenzar a crear matemática con herramientas propias. Al finalizar el recorrido de esta segunda etapa, habiendo pasado por innumerables estadíos de ánimo, como frustraciones y ansiedad, se termina con cierta euforia y un hermoso sentimiento de deber cumplido. Luego de defender la tesis, o quizás desde un tiempo antes, se nos presenta una duda existencial: **¿y ahora qué?**

A pesar de los vaivenes de nuestra realidad argentina, las opciones siempre fueron principalmente dos:

- buscar trabajo en la industria, o
- apostar por la vida haciendo investigación.

No hay que temer en elegir alguna de estas dos opciones. Luego de años de estudio y perfeccionamiento se posee una formación específica (casi siempre excelente), y se tienen muchas herramientas que son requeridas tanto por la industria como por la academia. En esta nota me voy a detener a esbozar mi parecer en el caso de haber elegido el camino académico. Dejo para otras personas más capacitadas las sugerencias y consejos que se puedan ofrecer para dar los primeros pasos en la industria, que hoy en día ofrece múltiples salidas para aquellos que hayan estudiado matemática.

Para continuar con la formación científica, lo recomendable es realizar varias estadías posdoctorales, entre dos o tres. Como consejo principal resumiría la idea en el siguiente concepto:

Salir de la zona de confort

Al comenzar el posdoc se entra en una de las mejores etapas del quehacer científico: hay pocas obligaciones académicas y mucha libertad para investigar, asistir a congresos y realizar estadías cortas de investigación.

Con salir de la zona de confort me refiero a lo siguiente:

- **Buscar temas relacionados a los realizados en la tesis doctoral, pero no necesariamente que sean la continuación de lo realizado.**

  Si bien esto significa arriesgar un poco al tratar de hacer un cambio de tema, la ganancia de adquirir otro panorama en ideas es mucho mayor.

- **Cambiar de director/a y de lugar de trabajo.**

  Lo óptimo es visitar centros de investigación con mucho movimiento de congresos, profesores visitantes y estudiantes jóvenes. Es una etapa genial para conocer personas e intercambiar ideas con investigadores/as reconocidos/as y con pares. Es en esta etapa donde se forjan muchos lazos que perduran a través de los años.

- **Presentarse a varios llamados para tener más opciones.**

  Si bien hay mucha competencia internacional, los y las estudiantes argentinos/as cuentan con muchas posibilidades de realizar una estadía posdoctoral en el exterior. Existen organismos extranjeros que fomentan este tipo de becas. Entre otros, la Fundación Alexander von Humboldt, la Agencia de Intercambio Académico Alemana (DAAD), el CONICET a traves de las Becas Houssay, las becas Fullbright, etc. También varias universidades extranjeras ofrecen becas posdoctorales.

  En la mayoría de los casos es fundamental tener un contacto previo con el/la investigador/a con el que se pretende trabajar. Muchas veces eso facilita el acceso a la beca. Es aquí donde el/la director/a de la tesis doctoral puede ayudar de forma significativa, pues es la primera persona a la que le han de pedir referencias. Los contactos que pueda ofrecer o los lugares que conozca son cuestiones importantes a tener en cuenta.

No hay que tener miedo en visitar otros países que tengan otra cultura o hablen un idioma distinto al castellano. Si bien el idioma que usa la comunidad matemática para comunicarse es el inglés, es una excelente oportunidad para aprender a través de la inmersión cultural otros idiomas como inglés, francés, italiano, portugués o incluso alemán o ruso.

Por último, y quizás éste sea un punto fundamental, es muy importante que luego de las estadías posdoctorales, vuelvan al país a trabajar y compartir sus experiencias, visiones e ideas nuevas para fomentar el desarrollo de la matemática argentina. A través de estas experiencias posdoctorales podrán crecer tanto como matemáticos/as así como personas y serán recibidos/as con los brazos abiertos en cualquier centro de investigación del país a su regreso.

¿Participo del concurso de monografías?

Emilio Lauret

Universidad Nacional del Sur

Como actual coordinador del Concurso de Monografías de la UMA es mi intención ayudar a responder la pregunta enunciada en el título a cada estudiante con interés en participar pero también con muchas dudas. Probablemente también favorezca a gente decidida a hacerlo pero que está algo perdida, especialmente al comienzo con la elección del tema, el estilo, el formato, etc.

Conviene recordar que el concurso está destinado a **estudiantes de grado** (universitarios o de institutos de enseñanza superior) de **cualquier carrera**. De hecho, no veo motivos para no admitir a un/a estudiante de la escuela secundaria; sería cuestión de consultar y solicitar la autorización correspondiente. Por otro lado, la monografía debe tratar sobre algún **avance significativo de la Matemática**, en un contexto muy amplio.

Es importante aclarar que se trata de un **concurso**, por lo que el objetivo del jurado se limita a elegir los mejores trabajos. No se debe esperar que alguien revise y chequee la veracidad de cada línea como si fuese la corrección de un examen o un referato de un artículo científico. De la misma manera, el jurado no está obligado a producir un reporte sobre cada monografía, aunque lo ha realizado voluntariamente en los últimos años.

A continuación responderé, siguiendo mi opinión personal, algunas preguntas frecuentes. Vale mencionar que yo no formo parte del jurado, por lo que nada de lo que sigue es una verdad absoluta. De hecho, los criterios de evaluación se renuevan (junto con los jurados) año a año, ya que éstos dependen mucho de los gustos e intereses personales de cada miembro.

¿Cómo saber si un tema es adecuado?

No es fácil. Debe ser algo lo suficientemente avanzado que no sea parte de las materias de la Licenciatura en Matemática de la mayoría de las universidades argentinas, pero tampoco demasiado avanzado al punto que no se puedan proveer detalles. Mi sugerencia es consultar con algún miembro de la comunidad matemática o directamente con la persona coordinadora del concurso.

¿Cómo debe ser el aspecto de la monografía? ¿Hay una fuente y tamaño predeterminado? ¿Hay una cantidad máxima o mínima de páginas?

No hay ninguna reglamentación al respecto. El formato estético es totalmente libre, y de hecho forma parte de las cosas a ser evaluadas. Con respecto al número de páginas, se sugiere que la monografía no sea demasiado corta (digamos al menos 15 páginas) ni demasiado larga (a lo sumo 50 o 60 páginas) aunque, por supuesto, hay buenas excepciones. Por ejemplo, la cantidad de páginas de las 4 monografías premiadas en el 2022 fueron 25, 36, 38, 42, lo cual me parece óptimo. En el 2023 fueron algo más extensas: 50, 52, 54, 63, 72 páginas.

¿Qué debe contener la tapa?

No puede faltar el título de la monografía y el nombre de cada autor/a con sus correspondientes filiaciones (con la Universidad o institución es suficiente, pero se puede agregar facultad o departamento). También queda bien alguna frase que haga referencia al concurso como "Concurso de Monografías // Unión Matemática Argentina // Edición 2024" (las barras // significan un salto de línea), y quizás el logo de la UMA. Una imagen que haga referencia al tema de la monografía suele quedar muy elegante.

¿Una monografía debe contener necesariamente demostraciones?

No necesariamente. Los contenidos y enfoques posibles son totalmente libres y, en este caso, son un aspecto fundamental en la evaluación. Depende mucho del jurado si buscará que las monografías ganadoras sean rigurosas y contengan demostraciones con cierta dificultad o, por el contrario, buscará textos fáciles de leer para una audiencia grande. En mi opinión personal, a la mayor parte de la comunidad matemática argentina le gustan bastante las demostraciones, pero no es difícil encontrar contraejemplos entre las monografías ganadoras de años anteriores.

¿Una monografía debe contener necesariamente citas bibliográficas?

Aunque la respuesta oficial debería ser nuevamente "no necesariamente", en este caso me inclino a sugerir fuertemente que las monografías tengan un buen sistema de referencias. Se debe citar a los artículos en donde los resultados hayan sido obtenidos, como así también a los libros clásicos (o no) en los que se hayan basado para escribir ciertas secciones o capítulos. Para el listado bibliográfico que se ubica usualmente como capítulo final, se debe escoger un formato y ser consistente con él.

¿Se puede participar si ya estoy recibido?

Las bases de la edición 2024, al igual que en varios años anteriores, no permiten participar a gente que se haya recibido hasta el 31 de marzo del año en curso. La intención de esta regla es que no participe gente que posea una beca de CONICET.

En caso que alguien no satisfaga ésta o cualquier otra condición dentro de las bases, se sugiere consultar a la coordinación del concurso. Hay casos en que se puede pedir una excepción a la Comisión Directiva de la UMA. En 2022 la CD fue inflexible en este sentido, pero en 2023 hubo algunas excepciones.

Espero que este artículo ayude a una gran cantidad de estudiantes a responder la pregunta del título, ¡especialmente si la respuesta es afirmativa! Por cuestiones reglamentarias, se sugiere ver la página web oficial del concurso. Por consultas, escribir a `concursomonografiasuma@gmail.com`.

Aprovecho este espacio para agradecer a todos los profesores y profesoras universitarias que han sugerido y motivado a sus estudiantes participar de dicho concurso en los años anteriores. ¡Sigan así!

▶ Ir al índice general

NOTICIERO

ISSN 1514-9595 (web)

Semblanzas

Mischa Cotlar: la ética en un matemático que nunca traicionó sus ideales

Verónica Dimant
Universidad de San Andrés - CONICET

"La ética se basa en que la existencia de uno y alguien diferente es una ilusión. Hay una sola vida. Todo lo que uno hace para otro lo está haciendo para sí mismo."
Mischa Cotlar, *Ética y Ciencia*, Universidad Central de Venezuela, 19/1/2004.

Mischa Cotlar fue una persona que mantuvo a lo largo de su vida una inalterable coherencia con sus principios. Este matemático autodidacta y de mente brillante, se destacaba por su extrema humildad y por la profunda sensibilidad que demostraba hacia el prójimo.

Cotlar nació en 1913 y vivió hasta los 16 años en Ucrania, su país natal, en el seno de una familia judía. Asistió un solo año a la escuela primaria, pero adquirió su formación básica de la importante biblioteca de su padre, quien lo incentivó por el amor que le transmitió hacia la música y la matemática. En 1928 emigró con su familia a Uruguay ("mi padre tuvo la intuición de que algo iba a pasar" con el ascenso político de Adolf Hitler, contó en una entrevista con Adrián Paenza). En Montevideo, debido a la complicada situación económica familiar, trabajó como pianista en bares nocturnos situados en la zona del puerto. Su padre, que era un hábil ajedrecista -aunque trabajaba vendiendo diarios en una esquina- ganó un torneo de la Sociedad Uruguaya de Ajedrez. Así fue como conoció al matemático, y también ajedrecista amateur, Rafael Laguardia, a quien le presentó a su hijo. Laguardia, impactado por los resultados que había logrado Mischa en el área de Teoría de Números, lo invitó a participar de su seminario de estudio y, tiempo después, le ofreció el dictado de un curso de esa temática en la Facultad de Ingeniería pese a que Cotlar no tenía título universitario (tampoco secundario y primario).

Tras los pasos del célebre matemático español Julio Rey Pastor, Mischa se mudó a Buenos Aires en 1935. Ahí conoció a una estudiante rusa, Yanny Frenkel, con la que se casó en 1938 y que fue su compañera inseparable desde entonces. Ya dedicado al Análisis Armónico y el Análisis Funcional, comenzó a publicar sus resultados e instalarse como un referente en la comunidad matemática argentina. Sin embargo, la falta de un título le impedía la obtención de cargos académicos.

En 1950, viajó a Estados Unidos luego de recibir una beca Guggenheim que le gestionaron prestigiosos académicos siendo admitido como alumno doctoral en la Universidad de Chicago. Tres años después, y con casi 30 artículos publicados, obtuvo a los 40 años su primer diploma: Ph. D. in Mathematics. Su tesis, titulada *On the theory of Hilbert transforms,* la realizó bajo la dirección de Antoni Zygmund. De regreso al país fue profesor en la Universidad de Cuyo y años después se incorporó a la Universidad de Buenos Aires (UBA) durante la conocida época de oro de la institución. Allí permaneció hasta que en 1966, tras La Noche de los Bastones Largos, renunció y tuvo que emigrar. Luego de desempeñarse en numerosas universidades de distintos países, a partir de 1974 se estableció en la Universidad Central de Venezuela, donde desarrolló una importante tarea en la formación de investigadores científicos. Sin embargo, periódicamente, y siempre que las condiciones políticas fueran propicias, regresaba a la Argentina (generalmente invitado por el Instituto Argentino de Matemática) porque consideraba al país como su hogar. "Toda la gente que encontré en el país me trataba de ayudar", destacaba. Sus últimos años los pasó en Buenos Aires, donde murió el 16 de enero de 2007.

En su carrera se transformó en un activo promotor de la responsabilidad social de los científicos. En 1961, fue uno de los fundadores de la Sociedad Argentina por la Responsabilidad Social de la Ciencia. Durante el Congreso Internacional de Matemática de Estocolmo, en 1962, leyó una carta enviada por Bertrand Russell en la que instaba a los matemáticos a no cooperar con la industria bélica. Fue uno de los editores de Columna 10, una revista dedicada al análisis del impacto de la ciencia y la tecnología en la política internacional. En 1988, participó en la redacción del Juramento de Buenos Aires, un compromiso ético para el uso de la ciencia en favor de la paz y al que adhieren la mayoría de los egresados de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (UBA) cuando juran al graduarse. En sus últimos años de vida se abocó al Proyecto para la Preservación de la Unidad Ciencia-Ética, que depende de la Universidad de Córdoba.

Sus trascendentes investigaciones matemáticas le valieron importantes reconocimientos: Premio de la Academia de Ciencias de España (1950), Premio Waissman (CONICET, 1964), Premio Nacional de Ciencias de Venezuela (1984), Miembro de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Argentina (1987), Doctorado Honoris Causa de la Universidad de Buenos Aires (2001), Premio Domingo Faustino Sarmiento del Senado de la Nación Argentina (2006), Premio Konex (2013 – post mortem).

La justicia, como principio moral que establece igualdad de oportunidades, derechos y obligaciones, guiaba no sólo su prédica habitual sino también su accionar cotidiano. Era vegetariano, incapaz de pisar una hormiga, donaba parte de su sueldo para becar estudiantes. También era humanista y pacifista.

Para él todos merecían aprender y eran capaces de hacerlo. Como docente, se entregaba con paciencia y dedicación; realmente disfrutaba transmitiendo su amor por la matemática. Podía tomarse el colectivo 37 a Ciudad Universitaria exclusivamente para, con 83 años, responder las consultas de un estudiante y terminar agradeciéndole tan efusivamente como si el consultante hubiera sido él.

Su pensamiento se basaba en la doctrina Pitagórico-Platónica, que propone que la abstracción de la Matemática es la manifestación de la Unidad de todos los campos del universo. Entendía que la ética y la ciencia tenían el mismo objetivo con aplicaciones a campos diferentes. Veía al otro como parte de uno mismo. Si bien respetaba la diversidad, se oponía fuertemente a la acumulación desmedida y a la violencia en cualquiera de sus formas. "Si uno necesita lujos y placeres excesivos es porque su interior está vacío aún". No es sólo una de las frases que incluyó en el discurso que pronunció al recibir el Premio Sarmiento en el Senado; vivía con esa premisa.

Esa idea de la Unidad también aparecía en sus clases y en la forma de abordar y aportar a la ciencia. Según palabras del célebre matemático Alberto Calderón, "el trabajo de Cotlar tiene características singulares. Una es su penetración, que hace aflorar las profundas raíces y motivaciones de teoremas y teorías. La otra es la visión, que descubre vínculos y relaciones insospechadas entre temas aparentemente desconectados".

Su hablar pausado, atento y paciente, su eterna sonrisa y la calidez de su mirada no disminuían en nada la firmeza de sus convicciones. Mischa Cotlar, el incansable militante de la ética en la ciencia, nos dejó un inestimable legado tanto científico como humano.

> *"Se supone que el científico ama su ciencia, si no, no puede salir nada bueno. Y si la ama tiene que entender que la alianza con intereses militares destruye la esencia de la ciencia, a la vez que pone en peligro la vida del planeta".* Mischa Cotlar, Página 12, 25/9/2005.

Referencias:

- Eduardo Lima de Sá y Lázaro Recht. *Mischa Cotlar – Notas Biográficas y Bibliografía*.
- Entrevista de Adrián Paenza a Mischa Cotlar en el programa "Laboratorio de Ideas", canal Encuentro. Ir a la entrevista.
- *Mischa Cotlar, in memoriam (1913–2007)*. Revista de la Unión Matemática Argentina, Vol 49, No. 1 (2008).
- *La destrucción de la ciencia*. Página 12, 25/9/2005. Ir a la nota.
- *Charla "Ética y Ciencia, con Mischa Cotlar" (Parte I)*. Universidad Central de Venezuela, 19/1/2004. Ir a la charla.
- *Mischa Cotlar*. Mac Tutor Biography. Ir al texto.

Una versión de este artículo fue publicada en +San Andrés-#Justicia, Año 7, No. 1 (2015). Publicación de la Universidad de San Andrés.

Ir al índice general

NOTICIERO

ISSN 1514-9595 (web)

Género UMA

Un camino hacia la equidad

Comisión de Género

Referentes de género

UNIÓN MATEMÁTICA ARGENTINA

Inicios

Durante la Reunión Anual de la UMA 2015 en Santa Fe, se llevó a cabo por primera vez una discusión sobre la participación de las mujeres en las matemáticas, organizada por Alicia Dickenstein (UBA) y Liliana Forzani (UNL). Este evento incluyó una disertación de Erica Hynes (UNL), la cual fue un gran éxito con una notable asistencia. Por su parte, Teresa Krick (UBA) propuso a la presidencia de la UMA la creación de la Comisión de Género como un paso hacia la equidad.

En 2017, Nicolás Andruskiewitsch, quien ocupaba la presidencia de la UMA en ese momento, retomó el tema motivado por la correspondencia que recibía de Teresa Krick (UBA) y Gabriela Ovando (UNR). En enero de 2018 muchas argentinas participaron en el Encuentro de Mujeres Matemáticas en América Latina, celebrado en Chile, donde quedó evidenciada la necesidad de establecer una red similar en nuestro país.

Finalmente, en mayo de ese año, se establecieron las comisiones especiales de la UMA, con el propósito de asesorar y apoyar a la comisión directiva. Entre estas comisiones se encontraba la Comisión de Género, cuya creación quedó registrada en el acta 233. La UMA encomendó a Gabriela Ovando la tarea de formar la comisión pionera, la cual estuvo bajo su coordinación e integrada por: Natalia Bordino (UNMDP), Silvina Campos (UNSa), Isolda Cardoso (UNR), Mariel Lovatto (UNL), Carolina Mosquera (UBA) y Marta Urciuolo (UNC). Gabriela lideró la comisión hasta septiembre de 2023, desempeñando un trabajo invaluable como guía.

Además, en ese período se estableció una red de referentes con representantes en diferentes puntos del país. En el año 2020 se modificó la dinámica de trabajo. Se creó la red de visibilidad, la cual brinda apoyo en la difusión, y se reestructuró la red de referentes dividiéndola en cuatro ejes principales: Visibilidad, Organización de Eventos, Aspectos Éticos y Estudios de Género. El esfuerzo continuo de esta red, año tras año, ha contribuido significativamente al impacto positivo que la Comisión de Género ha tenido en la comunidad matemática argentina.

Red de Referentes

La Comisión de Género se caracteriza por su organización horizontal, la cual se logra a través de reuniones mensuales que permiten definir el rumbo a seguir.

Eje de visibilidad. Este equipo se encarga de gestionar la presencia en línea de la Comisión a través de la página web, el canal de YouTube y las cuentas de Instagram y Facebook. Su labor incluye recordar efemérides, proporcionar información relevante y destacar el trabajo de destacadas matemáticas, tanto nacionales como internacionales. Desempeña un papel fundamental para mantener una comunicación efectiva con toda la comunidad matemática argentina. Los enlaces a todas las redes se encuentran disponibles en la página web oficial: `https://sites.google.com/view/genero-uma/`.

Integrantes de este eje: Andrea Antúnez (UNGS), Ana Gargantini (Uncuyo), Fiorela Rossi Bertone (UNS) y Noelia Juárez (UNSL).

Eje de eventos. Este grupo se dedica a la organización de eventos que promueven el encuentro de la comunidad con el fin de reflexionar y aprender desde una perspectiva de género. Sus actividades principales giran en torno a dos fechas clave: el 12 de mayo (Día de las Mujeres en Matemáticas) y la Reunión Anual de la UMA. A pesar de los desafíos impuestos por la pandemia, este equipo ha demostrado una notable capacidad de adaptación mediante la organización de eventos virtuales, híbridos y presenciales. Gracias a su arduo trabajo se ha logrado que destacadas figuras feministas del país dicten la conferencia de género de la UMA, incluyendo a Erica Hynes, Danila Suárez Tomé, Ana Franchi y Sara Isabel Pérez.

Asimismo, han coordinado diversos talleres, mesas redondas y conversatorios con una notable participación. El éxito de todos estos eventos se debe al compromiso y dedicación en la organización, cuidando meticulosamente cada detalle.

Integrantes de este eje: María Eugenia García (UNLP), Miguel Marcos (UNL), Carolina Mosquera (UBA), Adrián Pastine (UNSL) y Verónica Pastor (UBA).

Eje de aspectos éticos. Este equipo se encarga de llevar adelante reclamos, cartas e iniciativas destinadas a hacer de nuestra comunidad una entidad más inclusiva, en consonancia con el artículo 2, inciso 7 del estatuto de la UMA (incorporado en 2019): "Promover la equidad en relación a los derechos de las mujeres e identidades disidentes en todos los quehaceres matemáticos. Coordinar esfuerzos para alcanzar participaciones equitativas en todos los ámbitos relativos a la UMA (reuniones, comisiones, cargos de gestión, entre otros) y promover la eliminación de todo tipo de violencia y discriminación basadas en la identidad sexo-genérica."

El aporte más destacado de este eje fue la elaboración del **Código de Ética y Conducta de la UMA,** aprobado en la asamblea de la UMA de 2022, el cual se encuentra disponible en nuestra página web, así como en la web de la UMA. Además, se estableció la dirección de correo electrónico `consultas.generouma@gmail.com`, a través de la cual las personas pueden comunicar situaciones de acoso o realizar consultas relacionadas. Este correo es gestionado por las personas que integran este eje, quienes se comprometen a tratar toda comunicación con la más estricta confidencialidad.

Integrantes de este eje: Gabriela Ovando (UNR), Constanza Sanchéz de la Vega (UBA) y Analía Silva (UNSL).

Eje de estudios de género: Este equipo se dedica a realizar, entre otras cosas, un rescate histórico de mujeres y diversidades en el campo de las matemáticas, así como a llevar a cabo un relevamiento de los cargos docentes ocupados por mujeres en las distintas universidades del país.

Integrantes de este eje: Gabriela Ovando (UNR), Adrián Pastine (UNSL) y Sonia Vera (UNC).

Nueva Comisión

En la asamblea de la UMA del 2023 se modificó la composición de la Comisión de Género, pasando a estar coordinada por Analía Silva (UNSL), e integrada por: Constanza de la Vega (UBA), Miguel Marcos (UNL), Andrea Antúnez (UNGS) y Gabriela Ovando (UNR).

La nueva comisión, junto con la red de referentes, expresa su agradecimiento a la actual Comisión Directiva de la UMA y a toda la comunidad matemática por brindarles la oportunidad de seguir contribuyendo a la construcción de una matemática más inclusiva.

NOTICIERO

ISSN 1514-9595 (web)

Competencia Interuniversitaria de Matemática Argentina

Toda solución trae problemas, son los problemas los que nos llevan a la CIMA

Rocío Díaz Martín

Vanderbilt University, USA

Este breve fragmento pretende ser una invitación a la Competencia Interuniversitaria de Matemática Argentina: la CIMA. Les contaremos en pocas palabras su historia y su misión. De yapa, un problema y algunas soluciones.

La **CIMA**, como su nombre lo indica 😜, es la Competencia Interuniversitaria de Matemática Argentina. Desde el año 2013 ha tomado la posta de la **competencia Paenza**. Dicha competencia fue organizada por 25 años consecutivos, hasta el año 2011, por la Fundación Ernesto Paenza. Pero, ¿el matemático no se llama Adrián? Sí. Cuando muere el padre (Ernesto) del matemático (Adrián), su familia y amigos deciden rendirle homenaje. Dicho tributo fue muy original: se crea una fundación con su nombre desde la cual se organizó una competencia de resolución de problemas de matemática (*"la Paenza"*), con el propósito de llegar a todos los ámbitos universitarios del país en donde haya un departamento de matemática. Pasado un cuarto de siglo, cuando *"la Paenza"* llega a su fin, fue necesario darle continuidad al legado: allí se levanta la CIMA.

Un día en el año, generalmente en agosto, los delegados de las distintas sedes de la Argentina (y también de la república hermana del Uruguay), reciben al mismo tiempo las pruebas de la competencia. El sobre sellado, ha sido reemplazado por un email, pero el espíritu de transparencia es el mismo. Cada equipo participante, conformado por uno o dos estudiantes universitarios (no egresados previamente de alguna otra carrera), cuenta con 5 horas para pensar 6 problemas, desde las 9 de la mañana hasta las 2 de la tarde. En sus resoluciones no escriben sus nombres sino un código previamente asignado para que el jurado no los identifique y pueda tener algún sesgo. Las pruebas se escanean y, una vez corregidas, se eligen "ganadores": un podio con 5 escalones y cuantas menciones especiales considere apropiado otorgar el jurado. La premiación tiene lugar en la Reunión Anual de la UMA y toda la CIMA es hoy por hoy auspiciada por la UMA.

Este año realizaremos la 10ª edición. A modo de festejo hacemos extensiva la invitación a participar de la CIMA. El mayor regalo que nos podemos dar es el de consolidar la idea de que a la CIMA llegamos todos. No pretendemos ser sinónimo cumbre de un podio. Como describió el propio Adrián Paenza, “el objetivo no es ganar, sino el placer de tener problemas para pensar” (¡incluso una vez finalizado el tiempo de la prueba!). La idea es **disfrutar de la capacidad de pensar, de desafiarnos, solos o en equipos.** También Adrián Paenza comentó alguna vez que las frustraciones tienen su lugar en el juego, pero es eso, parte del juego como también lo son el poder darnos lugar a entrenarnos y el divertirnos buscando soluciones.

La CIMA se discontinuó durante los años 2020 y 2021 de pandemia, retomándose en 2022. En dicha edición, de modo excepcional y buscando suplir los años sin competencia, pudieron participar equipos con integrantes que se habían graduado en el período 2020–2022. Finalizamos esta nota con el primer problema de dicha prueba, que fue resuelto por la mayoría de los equipos que participaron. Los invitamos a pensar.

Problema

Consideremos un tetraedro en $\mathbb{R}^3$. Sobre cada cara se define un vector exterior ortogonal a ella, de magnitud igual a su área. Probar que la suma de los cuatros vectores es igual a 0.

Interpretación física. Brevemente, si pensamos en un gas dentro de un poliedro (en particular, dentro de un tetraedro) que está bajo presión constante, este ejerce en cada cara una fuerza que es es proporcional al área de la cara respectiva y perpendicular con dirección saliente/exterior. En ausencia de fuerzas externas, la suma de todas las fuerzas internas debe ser cero.

Soluciones de distintos equipos participantes en la CIMA

Por Julieta Améndola y Santiago Federico Giordani (UNICEN, Tandil).

Sean v_1, v_2, v_3, v_4 los vectores ortogonales a las caras C_1, C_2, C_3, C_4 del tetraedro (respectivamente) y sean e_1, e_2, e_3 los vectores canónicos de $\mathbb{R}^3$. Entonces

$$\sum_{j=1}^{4} v_j = \sum_{k=1}^{3} \left(\sum_{j=1}^{4} \langle v_j, e_k \rangle \right) e_k,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno canónico en $\mathbb{R}^3$. Fijado $k \in \{1, 2, 3\}$, si se interpreta e_k como el campo vectorial contante $(x, y, z) \mapsto e_k$ en $\mathbb{R}^3$. Notamos que $\langle v_j, e_k \rangle$ es exactamente la integral de superficie del campo e_k sobre la cara C_j del tetraedro. Luego,

$$\sum_{j=1}^{4} v_j = \sum_{k=1}^{3} \left(\sum_{j=1}^{4} \int_{C_j} e_k \cdot d\mathbf{S} \right) e_k = \sum_{k=1}^{3} \left(\int_{C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4} e_k \cdot d\mathbf{S} \right) e_k.$$

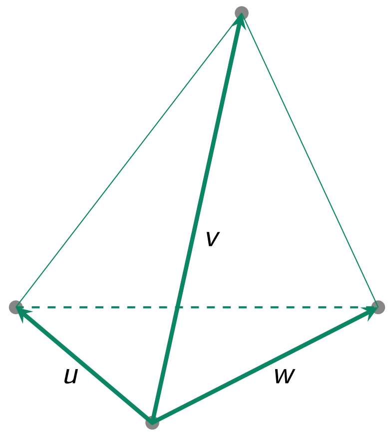
Usando el Teorema de la Divergencia se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{4} v_j &= \sum_{k=1}^{3} \left(\int_{C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4} e_k \cdot d\mathbf{S} \right) e_k = \sum_{k=1}^{3} \left(\int_{\text{Tetraedro}} \nabla \cdot e_k \, dV \right) e_k \\ &= \sum_{k=1}^{3} \left(\int_{\text{Tetraedro}} 0 \, dV \right) e_k = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3, \end{aligned}$$

donde $\nabla \cdot e_k = 0$ por ser e_k campo constante. De esta manera se prueba que $\sum_{j=1}^{4} v_j$ es el vector $(0, 0, 0)$.

Por los equipos Nicolás Agote y Sebastián Zaninovich (UBA), Mateo Alessi y Lian Choon Teo (UNCUYO), Benjamín Arias y Juan Ignacio Olazagoitia (UNR), Rocío Bernardini y Jerónimo Juan Misa (UBA), Mateo Carranza Vélez y Miguel Kalinowski (UNC), Sebastián Cherny y Carla Crucianelli (UBA), Mateo Chialvo y Mateo Marengo Cano (UNC), Franco De Rico y Gianni De Rico (UNR), Luigi Finetti y Bruno Giordano (UNC), Julián Garbulsky y Julia Zanette (UBA), Facundo García y Esteban Kuzmicich (UNR), Juan Ignacio Gargano y Franco Nicolás Rufolo (UBA), Enzo Giannotta y Francisco Valdez (UBA), Franco Iotti y Nicolás Antonio Martone (UBA), Leonardo Lanciano y Josefina Villar (UBA), Julián Masliah y Carlos Miguel Soto (UBA), Francesco Mozzatti y Matías Raimundez (UNR), Ivo Pajor y Gabriel Sac Himelfarb (UBA).

Se elige un vértice y se da nombre u, v, w a los tres vectores que tienen como punto de aplicación dicho vértice y que siguen tres aristas del tetraedro como muestra la figura.



Siguiendo la regla de la mano derecha, un vector ortogonal a la cara que contiene a u y a v está dado por el producto vectorial o "cruz" $v \times u$, el cual, por el orden elegido, apunta hacia afuera del tetraedro). Notando ahora que el área de la cara dada por v y u es la mitad del área del paralelogramo que generan dichos vectores, cuya área es $\|v \times u\|$, se tiene que la norma del vector perpendicular a esta cara que debemos considerar es $\frac{1}{2}\|v \times u\|$. Luego, el vector normal exterior es $\frac{1}{2}(v \times u)$.

De manera análoga, los vectores normales exteriores a las caras determinadas por v y w, u y w, y $v-u$ y $w-u$ son, respectivamente, $\frac{1}{2}w \times v$, $\frac{1}{2}u \times w$ y $\frac{1}{2}(v-u) \times (w-u)$. Finalmente, su suma es

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left[v \times u + w \times v + u \times w + (v-u) \times (w-u)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[v \times u + w \times v + u \times w + \underbrace{v \times w}_{-w \times v} - v \times u - u \times w + \underbrace{u \times u}_{0}\right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por los equipos Gabriel Ignacio Bernal Ribotta y Eros Pablo Girardi (UNL), Francisco Cirelli y Joaquín Fernandez (UBA), Dania Constanza Perez Vosahlo y Vicente Rafael Schkolnik Rivas (UNC).

La estrategia es similar a la de la solución anterior pero eligiendo un sistema de coordenadas para dar referencia a los cuatro vértices del tetraedro que muestra la Figura 1.

Usando propiedades del producto cruz se tiene que los cuatro vectores normales exteriores a cada una de las caras con magnitud igual al área de la cara respectiva están dados por:

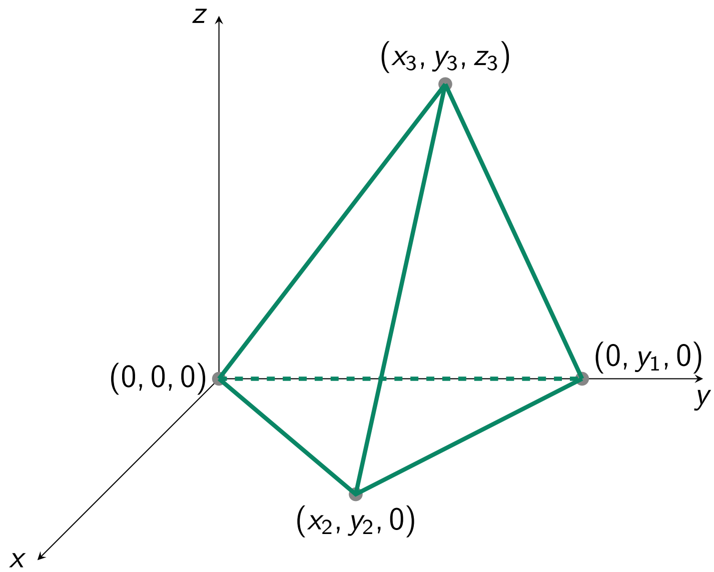


Figura 1: Tetraedro en un sistema de coordenadas.

- $\frac{1}{2}(x_2, y_2, 0) \times (x_3, y_3, z_3) = \frac{1}{2}(y_2 z_3, -x_2 z_3, x_2 y_3 - x_3 y_2)$
- $\frac{1}{2}(x_2, y_3 - y_1, z_3) \times (x_2, y_2 - y_1, 0) = \frac{1}{2}(z_3 y_1 - z_3 y_2, x_2 z_3, x_3 y_2 - x_3 y_1 - x_2 y_3 + x_2 y_1)$
- $\frac{1}{2}(0, y_1, 0) \times (x_2, y_2, 0) = \frac{1}{2}(0, 0, -x_2 y_1)$
- $\frac{1}{2}(x_3, y_3, z_3) \times (0, y_1, 0) = \frac{1}{2}(-z_3 y_1, 0, x_3 y_1)$

Sumando estos cuatro vectores obtenemos el vector nulo $(0, 0, 0)$.

Agradecimientos. Un gran agradecimiento a mis compañeros del jurado, Carlos Di Fiore, Luis Ferroni, Martín Mereb, Juan Pablo Rossetti (¡jurado desde la primera CIMA!) y Mauro Subils. También, y muy especialmente, a Diego Sulca. A todos quienes envían problemas a `problemas.cima@gmail.com`. Por último, pero no por menos importante, a quienes hacen posible el funcionamiento interno de la CIMA, a nuestras secretarias María Inés López Pujato y Lara Fernández.

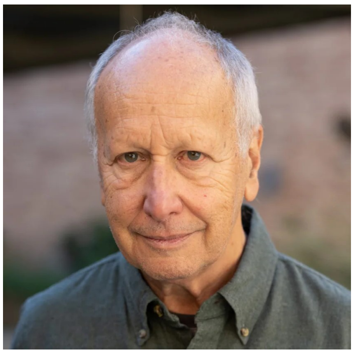
Ir al índice general

NOTICIERO

ISSN 1514-9595 (web)

Distinciones y premios

Luis Caffarelli



El Dr. Luis Caffarelli es Catedrático en la Universidad de Texas en Austin, Doctor honoris causa de la Universidad de Buenos Aires y socio honorario de la Unión Matemática Argentina.

- Fue galardonado con el prestigioso Premio Abel 2023, otorgado por la Academia Noruega de Ciencias y Letras, por su contribución a la Teoría de la regularidad de las ecuaciones diferenciales parciales no lineales (mayo 2023).

Alicia Dickenstein

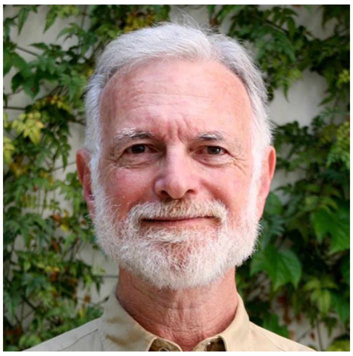
La Dra. Alicia Dickenstein es investigadora especialista en Geometría Algebraica. Actualmente es Profesora Emérita de la Universidad de Buenos Aires e Investigadora Superior del CONICET.

- La Universidad Nacional del Litoral le otorgó el título de Doctora honoris causa (abril 2023).
- Fue distinguida con el Premio Konex de Platino de Ciencia y Tecnología, área Matemática (mayo 2023).
- Fue designada presidenta de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (marzo 2024). Es la primera mujer en ocupar este cargo.

Jorge Lauret

El Dr. Jorge Lauret es investigador especialista en Geometría. Actualmente es Profesor Titular de la Universidad Nacional de Córdoba, Investigador Superior del CONICET y director del instituto CIEM-CONICET.

- Fue incorporado como Académico a la Academia Nacional de Ciencias (abril 2023).
- Fue distinguido por la Fundación Konex en Ciencia y Tecnología, área Matemática (mayo 2023).



Ricardo Maronna

El Dr. Ricardo Maronna es Profesor Consulto de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de La Plata.

Fue distinguido por la Fundación Konex en Ciencia y Tecnología, área Matemática (mayo 2023).

Julio Rossi

El Dr. Julio Rossi es investigador especialista en Ecuaciones Diferenciales. Actualmente es Profesor Titular de la Universidad de Buenos Aires.

Fue distinguido por la Fundación Konex en Ciencia y Tecnología, área Matemática (mayo 2023).

Andrea Rotnitzky

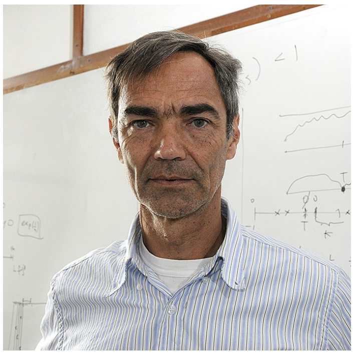
La Dra. Andrea Rotnitzky es investigadora especialista en Bioestadística. Actualmente es Profesora Titular de la Universidad de Washington e investigadora principal del CONICET.

Fue distinguida por la Fundación Konex en Ciencia y Tecnología, área Matemática (mayo 2023).

Ursula Molter

La Dra. Ursula Molter es investigadora especialista en Análisis Armónico y Teoría Geometría de la Medida. Actualmente es Profesora Emérita de la Universidad de Buenos Aires, Investigadora Superior del CONICET y Presidente de la Unión Matemática Argentina.

Fue incorporada como Académica Titular a la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (julio 2023).



Pablo Ferrari

El Dr. Pablo Ferrari es investigador especialista en Probabilidades y Procesos Estocásticos. Actualmente es Profesor Emérito de la Universidad de Buenos Aires e Investigador Superior del CONICET.

Fue incorporado como Académico Titular a la Academia Nacional de Ciencias (agosto 2023).

En la ceremonia recibió el Premio Consagración "Eugenia Sacerdote de Luistig" otorgado por la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales en el área de Matemática, Física y Astronomía en 2021.

Liliana Forzani

La Dra. Liliana Forzani es investigadora especialista en Estadística y Análisis Armónico. Actualmente es Profesora de la Universidad del Litoral, Investigadora Principal del CONICET y Presidenta de la Unión Matemática de América Latina y Caribe.

Recibió el premio franco-argentino, Científicas que Cuentan, por su aporte a la cultura científica desde la comunicación de la ciencia con perspectiva de género y diversidad (septiembre 2023).

Andrea Solotar

La Dra. Andrea Solotar es investigadora especialista en Álgebra, Geometría y Topología. Actualmente es Profesora Titular de la Universidad de Buenos Aires, Investigadora Superior del CONICET y Secretaria de la Unión Matemática Argentina.

Recibió el premio Consagración en el área Matemática otorgado por la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (octubre 2023).

Victoria Paternostro

La Dra. Victoria Paternostro es investigadora especialista en Análisis Armónico. Actualmente es Profesora Adjunta de la Universidad de Buenos Aires, Investigadora Adjunta del CONICET y Directora de Publicaciones de la Unión Matemática Argentina.

Recibió el premio Estímulo en el área Matemática otorgado por la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (octubre 2023).

Sonia Trepode

La Dra. Sonia Trepode es investigadora especialista en Representaciones de Álgebras. Actualmente es Profesora Titular de la Universidad Nacional de Mar del Plata, Vicedecana de la Facultad de Cs. Exactas y Naturales de dicha Casa, Directora del Centro Marplatense de Investigaciones Matemáticas, Investigadora Principal del CONICET y Vicepresidenta de la Unión Matemática Argentina.

- Fue incorporada como Académica Correspondiente en la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (octubre 2023).

Carlos Kenig

El Dr. Carlos Kenig es investigador especialista en Ecuaciones Diferenciales y Análisis Armónico. Actualmente es Louis Block Distinguished Service Professor de la Universidad de Chicago y miembro del Executive Committee de la International Mathematical Union.

- Fue incorporado como Académico Titular a la Academia Nacional de Ciencias (octubre 2023).
- Recibió la Medalla Solomon-Lefschetz que le fue otorgada (en 2021) en reconocimiento a su excelencia en investigación y su contribución al desarrollo de la matemática en las Américas (octubre 2023).

Iván Angiono

El Dr. Iván Angiono es investigador especialista en Álgebra. Actualmente es Profesor Asociado de la Universidad Nacional de Córdoba e Investigador Independiente del CONICET.

- Recibió el premio Bernardo Houssay en el área de Física, Matemática, Ciencias de la Computación y Astronomía, otorgado por el Ministerio de Ciencia, Tecnología e Innovación (MINCyT) (noviembre 2023).
- Fue distinguido con un Diploma de Honor del Senado de la Nación (abril 2024).

Miguel Walsh

El Dr. Miguel Walsh es investigador especialista en Teoría de Números y Teoría Ergódica. Actualmente es Profesor Titular de la Universidad de Buenos Aires, fellow del Merton College en la Universidad de Oxford e Investigador Principal del CONICET.

Obtuvo el Latin American Mathematics Research Prize, otorgado por el Institute of the Mathematical Sciences of the Americas (IMSA) para jóvenes matemáticos/as de América Latina y del Caribe con contribuciones significativas (enero 2024).

Premio al mejor artículo de la RevUMA

En septiembre de 2023 se otorgó el Premio al mejor artículo de la RevUMA al artículo *“Stability conditions and maximal green sequences in abelian categories”*, escrito por **Thomas Brüstle, David Smith** e **Hipolito Treffinger.**

Nuevos socios honorarios de la UMA

En la Asamblea General Ordinaria de la UMA de 2023 fueron nombrados como socios honorarios:

- **Ilda Hernández**
- **Carlos Kenig**
- **Alejandro Neme**
- **Mónica Villarreal**

CIMA 2023

Primer puesto

- Julián Masliah y Carlos Miguel Soto (Universidad de Buenos Aires).

Segundo puesto

- Bruno Martín Ziger y Nicolás Ricci (Universidad de Buenos Aires).

Tercer puesto

- Lucas Sandleris y Lorenzo Ruiz Díaz (Universidad de Buenos Aires).

Cuarto puesto

- Francesco Mozzatti y Matías Raimundez (Universidad Nacional de Rosario).

Quinto puesto (compartido)

- Franco Iotti y Nicolás Martone (Instituto Tecnológico de Buenos Aires).
- Ernesto Salinas Olalla y Jeremías Broin Luque (Universidad Nacional de Córdoba).

Menciones de Honor

- Rocío Bernardini y Zoe Zaidan (Universidad de Buenos Aires).
- Maria Agustina Cagliero y Diego Rubén Flandin (Universidad Nacional de Córdoba).
- Joaquín Fernández y Francisco Cirelli (Universidad de Buenos Aires).

Concurso de monografías 2023

Primer puesto

- *"La última noche de Galois"*, por Bruno Giordano (Universidad Nacional de Córdoba).

Segundo puesto

- *"El problema de la palabra para grupos"*, por Lautaro Ludueña y Vicente Schkolnik (Universidad Nacional de Córdoba).

Tercer puesto

- *"El área, de Euclides a Lebesgue"*, por Elio Neri Carranzo (Universidad Nacional de Tucumán).

Distinciones

- *"Inversas generalizadas y ecuaciones de rangos"*, por María Luz Llanes (Universidad Nacional de Río Cuarto).
- *"Sigue girando: Teoría Espectral de operadores de Toeplitz"*, por Michael Janou Glaeser (Universidad de Buenos Aires).

▶ Ir al índice general

Noticiero de la Unión Matemática Argentina
http://www.union-matematica.org.ar/noticiero/
ISSN 1514-9595 (en línea)
Volumen 59, Número 1, 2024
noticiero@union-matematica.org.ar