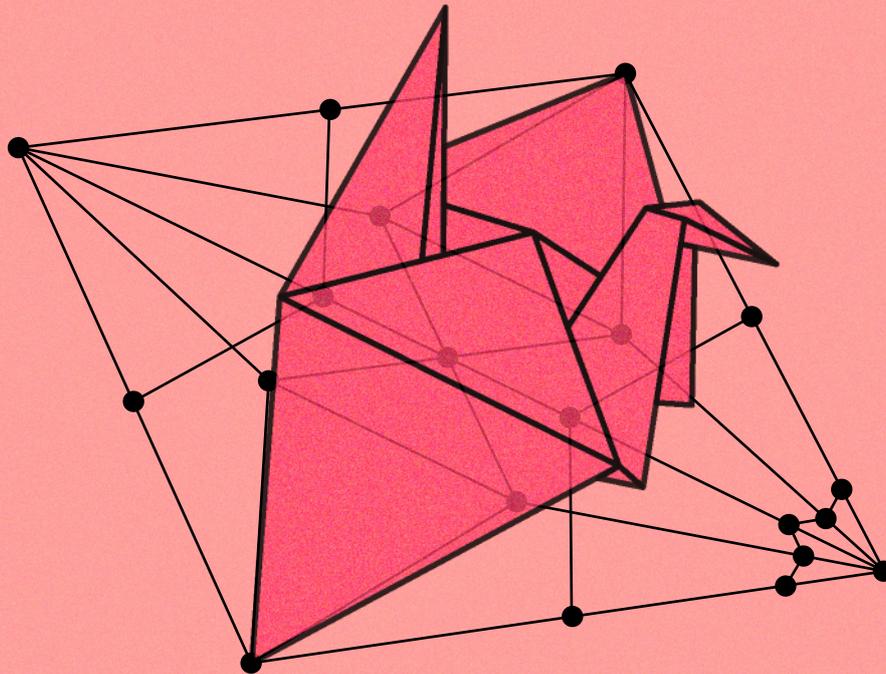


desdoblar una grulla de papel y descubrir con sorpresa que tiene un esqueleto



(notas introductorias al origami, a los linkages y
un breve comentario sobre el puente que los une)

Mateo Chialvo y Mateo Marengo Cano

Universidad Nacional de Córdoba
2020

Prólogo

Cuando comenzamos este trabajo, el objetivo era sencillo y, en algún sentido, cómodo: hacer una sólida introducción a los linkages y presentar con holgura los resultados relacionados que considerásemos más importantes. Unas horas después, mientras nos armábamos de bibliografía, nos encontramos con el origami. Ese fue el recorrido, linkages, un extraño intermedio del cual debíamos hacernos cargo, y el origami. Ahí el objetivo mutó peligrosamente hasta hacerse más ambicioso, más difícil, menos evidente, pero notablemente más convocante. Así, sin tener en claro el destino de la incipiente monografía que se había partido prematuramente en dos pedazos que teníamos la obligación de unir con un hilo de matemática, nos entregamos a la tarea de seguir hasta donde pudiésemos y enterarnos, ipso facto, cuál era aquel destino. Pero no sólo que aún no teníamos en nuestro poder esos bloques de monografía quebrada, sino que además entre nosotros quienes debíamos primero dar con ellos y luego unirlos, había también una laguna de aislamiento social obligatorio.

Sin mates, entonces, a kilómetros de distancia sus autores, la vía telefónica que no lograba incorporar materia alguna, sin propiedades adhesivas; sin texto intermedio los dos temas de la -aún- di(s)grafía separados por ¿qué matemático definió la medida entre pedazos aislados de matemática? Y bien, el objetivo: hacer tender esa medida a cero, y si no se puede, trazar ahí un enlace que sirva para hacer uno de dos. ‘Enlace’, habíamos pensado, ‘unión’ ¿no era esa la traducción al español de ‘linkage’?

Esta es una monografía de cuarentena, hecha de dos pedazos que, aunque pegados, llevan la marca de su separación, y nos exigen reconocerla, nombrarla. Pues bien, este prólogo es nuestro homenaje al pegamento.

Agradecimientos

Al profesor Marcos Salvai, a quién acudimos con dudas sobre la Hopf-fibration, y nos distrajo con linkages (hace dos años ya).

A Ramiro Ríos, devenido nuestro primer lector; que se encargó no solamente de diseñar a pedido todas las imágenes que aparecen en la monografía, sino que diseñó también una carátula extraordinaria.

A Pedro, que traspuso nuestro conjunto delirante de signos en otro, que llamamos poema, y que nos alegra hacer funcionar como punto final de esta monografía

A Kourganoff (a quien nos hemos referido en privado como Kurga, para las muchas veces que necesitamos invocar su nombre) quien muy amablemente nos resolvió una duda que teníamos sobre uno de sus teoremas.

A Thomas Hull, quien recibió a su casilla un mail cuyo asunto rezaba: “A strange request” (un extraño pedido), y que respondió notablemente con las bellas palabras que aparecen introduciendo el capítulo sobre origami

A Benjamín, que tradujo ese extraño pedido al inglés y el prólogo de esta monografía, lo que nos permitió tramar ese rico intercambio con Thomas Hull.

Índice general

1. Introducción	5
2. Linkages	7
2.1. Definiciones básicas	7
2.2. Linkages funcionales y suma conexa	12
2.3. Linkages elementales	14
2.4. Variedades	23
2.5. Algunas generalizaciones	25
2.6. Una breve mirada mecánica	27
3. Origami	33
3.1. Un poco de historia	33
3.2. Formalidades del origami plano	34
3.3. Algunas generalizaciones	38
3.4. Origami y pedagogía	42
4. Abriendo la grulla	44
4.1. Aclaraciones preliminares	44
4.2. Haciendo Uno	44
4.3. Un último exceso	49
A. Algunos resultados y definiciones útiles	51

Capítulo 1

Introducción

Este trabajo está dividido en tres partes. La primera es sobre la noción de linkages, que son, rápidamente, un conjunto de varillas rígidas unidas por bisagras, que será tomado por un grafo con una cierta estructura adicional (una longitud, en particular). Se verán entonces las definiciones elementales y luego se verá una manera de operar con esas definiciones. Como se notará, muchos de los resultados no son indispensables para entender las partes siguientes, no obstante sí resultan necesarios para tener una idea más aproximada del objeto matemático con el que se trabaja; además de que no constituye un costo excesivo atendiendo al interés que reportan por sí mismos. Se verán algunas construcciones de linkages notables, algunos ejemplos de espacios de configuraciones para linkages, y se brindará un acercamiento a las generalizaciones que sí son indispensables para el entendimiento global del trabajo, junto con la mirada mecánica que es la que está de fondo al grueso del trabajo existente sobre linkages. La segunda parte consiste en una presentación del origami en matemáticas, sus definiciones y los resultados importantes más inmediatos en torno al tema; como un aporte significativo a la sustancialidad de esta monografía se hará un breve repaso de la incidencia que tiene el origami en la enseñanza de la matemática. Por último, se sugerirá en qué consiste la unión entre las partes precedentes. Allí mismo se dará una justificación de la pertinencia como tema de sumo interés, aún cuando el desarrollo de las partes anteriores no permita llevar esa zona de unión a un nivel más avanzado; tal nivel no es objetivo de este trabajo. Se considera que los puentes que se tienden a veces insospechados entre diversas ramas constituyen un enorme enriquecimiento del corpus de la matemática, si se permite la expresión, y es un poco esa idea la que se quiere resaltar en este trabajo.

Ambos temas tienen la característica de alcanzar una amplitud de relaciones notables con distintos lugares, por sus aplicaciones, pero también por su misma matemática. En ambos casos se ven implicados los grafos, distintas ramas dentro de la geometría, e incluso (aunque no se verá demasiado aquí) el origami inspiró un trabajo más puramente algebraico -curiosamente hay un trabajo sobre los 'origami rings'-. El caso de los linkages es doblemente notable puesto que es un tema de una actualidad inobjetable.

La conexión entre ambos temas es ciertamente lejana, y esto es quizás lo más interesante. Es justamente la dualidad que reina en la monografía la que, a riesgo de perder un poco de formalidad, no sólo resalta el fenómeno por el cual 'dos matemáticas' aparentemente separadas se ligan, sino además emite, por su amplitud, radiaciones sobre temas que -y aquí se aprovecha el último párrafo para decir en voz alta un pensamiento- tienen una importancia a veces descuidada. En ese sentido, el compromiso con introducir en una monografía sobre linkages al origami no es casual (como sí lo fue la aparición del tema), sino que es el intento, inocente y lúdico en

buena medida, de dejar colocada una espina, algo que detenga la marcha automática y quizás en ese momento poder pensar un poco en esto que tanto nos gusta, que es la matemática, sin el certificado de lo útil, pues sabemos que la complejidad no acaba allí: hay historia, hay filosofía; y estamos nosotros, que enseñamos y aprendemos matemática todo el tiempo. Dicho así, con la limitación del tiempo y del espacio, si algo queda, ya no suena a pérdida.

Capítulo 2

Linkages

Los linkages, como objeto mecánico, tienen una historia muy extensa aunque a veces no sean los protagonistas de alguna de sus partes. Arquímedes mismo en una *machine theory* primitiva (en el estudio de la palanca) se encontró con los linkages, que reaparecerían muy precisamente con Leonardo da Vinci en su estudio de máquinas y mecanismos.

En el 1700, James Watt, también en la búsqueda de resolver un problema material terminó por inventar el linkage de Watt; suerte que corrió más adelante Peaucellier, de quien veremos algo en lo que sigue. Estas son algunas de las apariciones en materia de linkages más importantes, junto con la de Kempe que estudió su ensamble para la multiplicación y la suma, en un sistema que permite trazar una curva algebraica (resultado que abrió las compuertas para un terreno común entre la geometría y las ciencias de la computación). En geometría descriptiva se realizaron estudios para la creación de linkages sentando las bases para que un conocido Chebyshev reintroduzca su estudio, ahora con la óptica del análisis matemático.

Si bien esta es una historia narrada a modo de curiosidad, es notorio que hay todo un desarrollo fundamentalmente mecánico del linkage que fue complejizándose y tomando distintos recorridos, que aunque nunca dejaron de lado la dimensión utilitaria del linkage (en robótica fundamentalmente, pero también en biología, para el estudio de estructuras de proteínas) fueron montando una matemática variada que llega, con escalas, hasta la geometría algebraica.

En este capítulo se introducirán las definiciones elementales necesarias para entender qué es un linkage, se mostrarán algunos mecanismos de construcción que habilitan resultados muy potentes. No será objeto de este pasaje desarrollar todas las formalidades requeridas para las pruebas más complejas, puesto que el objetivo es introducir al funcionamiento de los linkages y a cierta manera de trabajar con ellos.

Luego se darán algunos ejemplos de espacios de configuraciones interesantes, como la esfera, o el toro; es esta una de las bellezas que tienen los linkages y es que permiten visualizar estructuras complejas mediante, ya se verá, ‘palitos unidos por los extremos’. Por último, se darán algunas generalizaciones y un breve desarrollo de la mirada mecánica.

2.1. Definiciones básicas

Definición 1. Un grafo $L = (V, E)$ es un conjunto de vértices V (que consideraremos finito) y un conjunto de aristas $E \subset \{\{p, q\} | p \neq q, p, q \in V\}$.

Definición 2. Un linkage $\mathcal{L} = (L, l, W)$ es un grafo L junto a:

1. Una función $l : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ (que indica la longitud de cada arista);
2. Un subconjunto $W \subset V$ de vértices marcados.

Definición 3. Una realización plana de un linkage es una función $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ donde $|\phi(v) - \phi(w)| = l(\{v, w\}) \forall \{v, w\} \in E$. Podemos pensar esto como una forma de dibujar el linkage en el plano respetando las longitudes de las aristas.

Ejemplo 1. El brazo robótico es un linkage \mathcal{R}_n cuyo grafo es un camino (todos los vértices son de grado 2 salvo los extremos) con un extremo fijo y n aristas de largo, l_1, \dots, l_n .

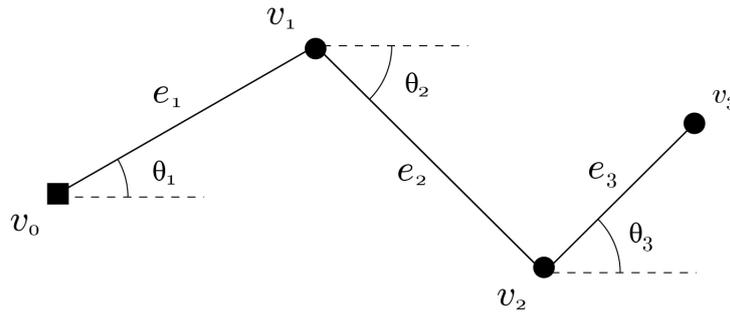


Figura 2.1: \mathcal{R}_3 .

Notación. En el ejemplo anterior, los vértices marcados con cuadrados representan vértices fijos y los marcados con círculos representan vértices libres. Esta notación será mantenida para todos los linkages.

Ejemplo 2. Los polígonos son linkages sin vértices fijos cuyo grafo es un ciclo. En general estos linkages se trabajan fijando dos vértices adyacentes, y entonces así podemos verlo como un brazo robótico con los dos extremos fijos ya que la arista que une a esos dos vértices deja de ser relevante.

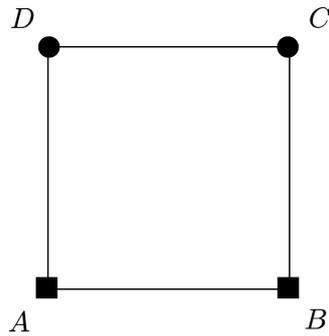


Figura 2.2: Polígono de 4 lados.

Ejemplo 3. El linkage araña de n patas está formado por un vértice central a donde están unidas las n patas (cada una es un \mathcal{R}_2), y el extremo de cada una está fijado en algún lugar del plano.

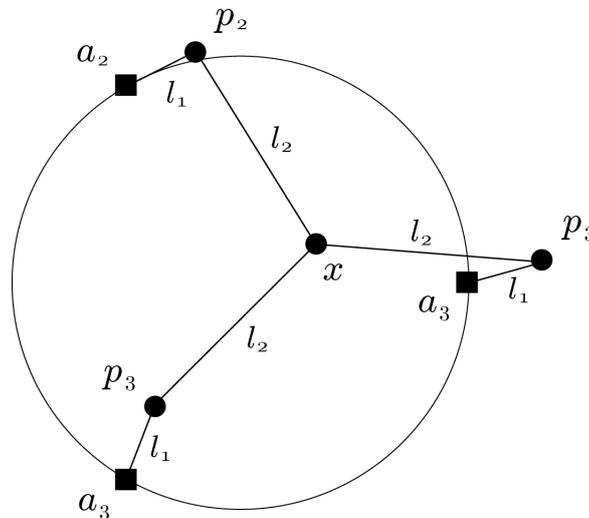


Figura 2.3: Araña de 3 patas.

Definición 4. El espacio de configuraciones de un linkage \mathcal{L} es el conjunto de todas las realizaciones de \mathcal{L} y es denotado por $C(\mathcal{L})$. Este espacio hereda la topología de $\mathbb{R}^{2|V|}$ puesto que cada realización se puede escribir como $\phi = (\phi(v_1), \dots, \phi(v_n)) \in \mathbb{R}^{2|V|}$.

Definición 5. Si $\mathcal{L} = (L, l, W)$ es un linkage y $Z : W \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una función que especifica la imagen de cada vértice marcado, entonces, el espacio de configuración relativa de \mathcal{L} respecto a Z , denotado por $C(\mathcal{L}, Z)$ será el conjunto de todas las realizaciones ϕ donde $\phi(v) = Z(v)$ para todo $v \in W$.

En general podemos pensar a W como el conjunto de vértices que están fijos y a Z como la función que nos indica en que parte del plano está fijado cada uno de ellos.

Ejemplo 4. Consideremos el el linkage cuadrado del ejemplo 2, es decir que tenemos: $\mathcal{L} = (\{A, B, C, D\}, \{\{A, B\}, \{B, C\}, \{C, D\}, \{D, A\}\})$ con $l(e) = 1 \forall e \in E(\mathcal{L})$. Además podemos tomar $W = \{A, B\}$, $Z(A) = (0, 0)$ y $Z(B) = (1, 0)$.

Entonces la figura 2.2 representa una realización ϕ_0 de (L, l, W) .

Además podemos encontrar algunas realizaciones degeneradas como las siguientes:

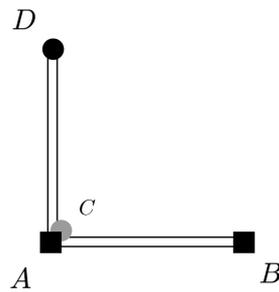


Figura 2.4: ϕ_1 .

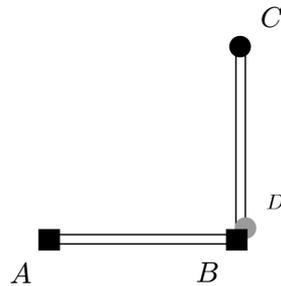


Figura 2.5: ϕ_2 .

Y también podemos ver otras que totalmente contenidas en el eje x :

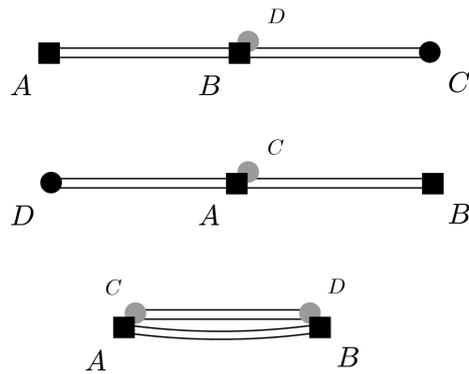


Figura 2.6: ϕ_3, ϕ_4 y ϕ_5 .

Notemos que tanto la configuración ϕ_0 como las dos de tipo degenerado ϕ_1 y ϕ_2 permiten un movimiento de tipo circular. Además hay dos posiciones para cada uno de estos movimientos circulares donde toda la realización vive en el eje x lo que nos permite pasar de una a la otra. Entonces el espacio de configuraciones son tres círculos unidos que podemos pensar de la siguiente manera:

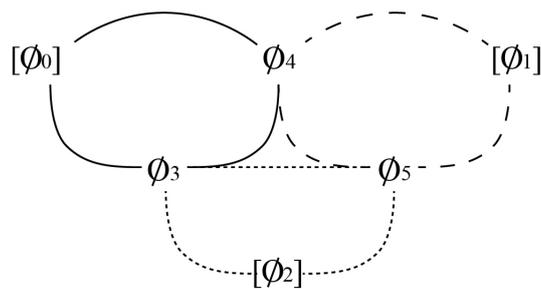
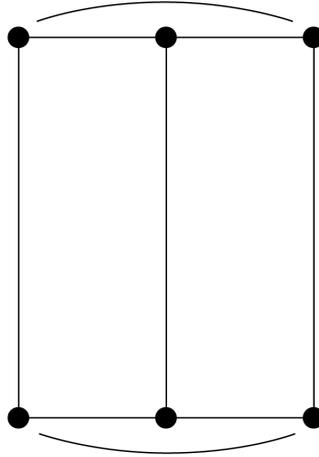


Figura 2.7: Espacio de configuraciones del linkage cuadrado, $C(\mathcal{L}, Z)$.

Ejemplo 5. Las formas degeneradas del ejemplo anterior y las singularidades que introducen (en el ejemplo las tres configuraciones contenidas en el eje x) complican los intentos de crear linkages cuyos espacios de configuraciones sean variedades. Sin embargo podemos eliminar esas singularidades “haciendo rígido” el paralelogramo usando triángulos degenerados:



2.2. Linkages funcionales y suma conexa

Podemos tratar a los linkages como linkages funcionales designando algunos vértices como vértices de entrada y otros de salida, siempre y cuando fijando una realización de los vértices de entrada quede determinada la posición de los vértices de salida. Esto nos permitirá hablar de linkage funcional para una función. Además podremos crear linkages para la composición de funciones gracias a la suma conexa que es una manera de identificar vértices de dos linkages para crear uno nuevo. Elegimos nombrar, licenciosamente, como suma conexa puesto que no encontramos mejor traducción a las distintas opciones que aparecen según la bibliografía (fiber sum, union, product), que dependen quizás de sutilezas que se escapan a este trabajo.

Definición 6. Si \mathcal{L} es un linkage y $S \subset V$, dos realizaciones ϕ_1, ϕ_2 se dicen equivalentes respecto a S si $\phi_1(s) = \phi_2(s) \forall s \in S$. Y se denota $\phi_1 \sim_S \phi_2$.

Es trivialmente una relación de equivalencia.

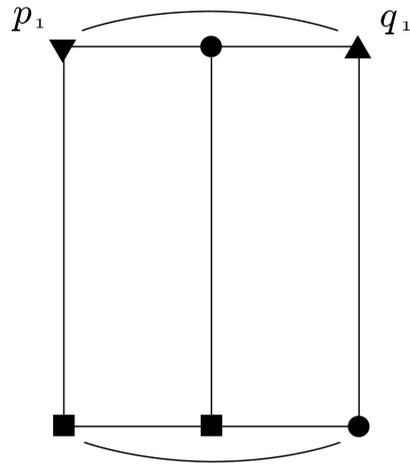
Definición 7. Un linkage funcional es un linkage con un conjunto designado de vértices entrada $P \subset V$ y otro conjunto designado de vértices salida $Q \subset V$ tal que: $\phi_1 \sim_P \phi_2 \Rightarrow \phi_1 \sim_Q \phi_2 \forall \phi_1, \phi_2 \in C(\mathcal{L}, Z)$. Esto nos permite asociar una función al linkage \mathcal{L} , $F : O \rightarrow \mathbb{R}^{2|Q|}$ donde el dominio O está dado por $O = \{(\phi(p_1), \dots, \phi(p_n)) \in \mathbb{R}^{2|P|} | \phi \in C(\mathcal{L}, Z)\}$.

Dos realizaciones son equivalentes con respecto a S si mandan al mismo lugar a cada elemento de S . Luego, dados dos subconjuntos de vértices P y Q , el linkage será funcional si cualesquiera dos realizaciones equivalentes en P son también equivalentes en Q . Esto quiere decir que una vez que fijamos los elementos de P , los elementos de Q se fijan automáticamente. Esto es lo que permite definir a la función F pues a cada disposición de los elementos de P le corresponde una única disposición de los elementos de Q . La función para la cual el linkage es funcional va del conjunto de realizaciones para P (que está inmerso en las del linkage, es decir que se extienden a una realización de \mathcal{L}) al conjunto de realizaciones para Q .

Por ello, hablaremos de linkage funcional para cierta función. Notar que, por lo anterior, podríamos haber definido un linkage funcional primero definiendo una función input-output

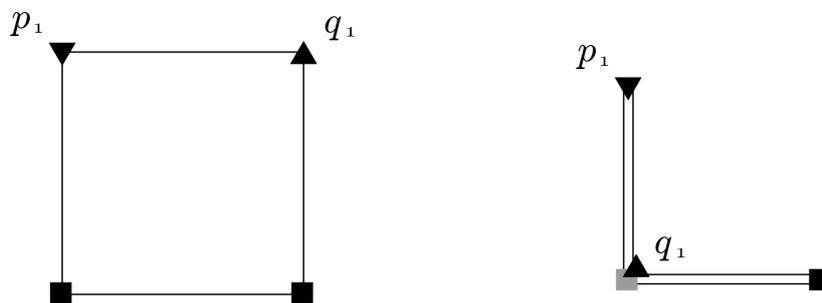
para la cual el linkage cumpla ciertas condiciones. Tal definición resultaría equivalente. Notar, por último, que el dominio O no son más que las posiciones que pueden tomar los vértices de entrada.

Ejemplo 6. El siguiente paralelogramo rígido es un linkage funcional:



Notación. En este caso, hay vértices marcados con triángulos hacia abajo que representan vértices de entrada. Los triángulos hacia arriba representarán a los vértices de salida.

Ejemplo 7. Pero el siguiente linkage cuadrado no rígido, no es funcional pues la posición de p_1 no determina unívocamente la posición de q_1 :



Definición 8. Dados dos linkages $\mathcal{L}' = (L', l', W')$ y $\mathcal{L}'' = (L'', l'', W'')$ con funciones asociadas Z' y Z'' respectivamente, un mapa $\beta : S' \subset V' \rightarrow V''$ es compatible si: $Z'(w') = Z''(\beta(w'))$

$\forall w' \in W' \cap S'$ y para todo $(v, u) \in (S' \times S')$ con $\{v, u\} \in E'$, $\{\beta(v), \beta(u)\} \in E'' \Rightarrow l'(\{v, u\}) = l''(\{\beta(v), \beta(u)\})$.

Definición 9. Dados dos linkages \mathcal{L}' , \mathcal{L}'' con funciones asociadas Z' y Z'' respectivamente y un mapa compatible β , la suma conexa de \mathcal{L}' y \mathcal{L}'' con respecto a β , $\mathcal{L}' *_\beta \mathcal{L}''$, es un linkage $\mathcal{L} = (L, l, W)$ tal que:

$$L = (L' \sqcup L'') / (\beta(v) = v)$$

$$W = (W' \sqcup W'') / (\beta(v) = v)$$

$$Z(w) = \begin{cases} Z'(w) & w \in W' \\ Z''(w) & w \in W'' \end{cases}$$

$$l(\{v, w\}) = \begin{cases} l'(\{v, w\}) & \{v, w\} \in E' \\ l''(\{v, w\}) & \{v, w\} \in E'' \end{cases}$$

Notemos que β debe ser compatible para que \mathcal{L} esté bien definido.

Esta definición involucra la idea de cociente, lo cual puede parecer forzado al principio. Elegimos esta notación compacta en lugar de una más desarrollada (pero no por ello menos compleja) porque teniendo en mente la relación de equivalencia definida, pensar el cociente resulta más intuitivo una vez que se lo ha pensado un tiempo. Esencialmente, lo que se hace es reunir los puntos equivalentes en un sólo punto del que ahora salen todas las aristas que tenían los puntos. Para entender el nuevo linkage hay que desglosar cada una de sus partes según las reglas propuestas en la definición, así, tendremos un nuevo conjunto de vértices compuesto por los vértices de los dos grafos pero identificando algunos vértices de V' vía la función β , sin remover ninguna arista. Para definir extensivamente el conjunto de aristas basta con escribir por casos según los vértices estén o no en el dominio de la función de compatibilidad (por ejemplo, es claro que estarán todas las aristas de \mathcal{L}' cuyos vértices no estén en el dominio de β , pero habrá que redefinir una arista $\{v_1, v_2\}$ por $\{v_1, \beta(v_2)\}$ si está en el dominio de β , y así con el resto de los casos). Una vez entendido ese procedimiento de cocientar, el resto de las definiciones son sencillas y mucho más intuitivas y útiles a los objetivos de este trabajo que definir las en extensión.

2.3. Linkages elementales

Habiendo comprendido la base de los linkages funcionales y cómo componerlos, veremos ahora la construcción de algunos linkages para ciertas funciones. Estas construcciones no deben descuidarse puesto que son la materia de la demostración de teoremas de gran importancia. Para alcanzar a vislumbrar la esencia de esta sección hay que tener presente dos cosas. La primera, que estaremos operando con linkages funcionales lo cual no es en ninguna medida trivial, ni sencillo. La segunda, no hay que perder de vista la importancia que tienen las funciones en todo esto; por esto, mientras que estamos construyendo linkages estamos también queriendo construir, en particular, polinomios, y ya veremos para qué. En el anexo podrán consultarse algunas definiciones como la de conjunto algebraico y conjunto semialgebraico que servirán tanto para esta como para las secciones siguientes.

Construcción 1. El primer linkage funcional que construiremos para una función muy sencilla será el trasladador, que está formado por dos paralelogramos como se ve en el esquema, que toma como valor de entrada $\phi(p_1)$ en el dominio $O = \{(x, y) \mid |(x, y) - Z(w_1)| \leq l(e_1) + l(e_2)\}$ y

devuelve como valor de salida $\phi(q_1) = \phi(p_1) + l(e_3)$. $Z(w_1)$ lo podemos considerar como el origen y ajustando el largo de las aristas e_1, e_2, e_3 podemos obtener un trasladador con un dominio “más chico” o “más grande” según deseemos y con la distancia de traslación deseada. Además, cambiando los roles de p_1 y q_1 obtenemos una resta.

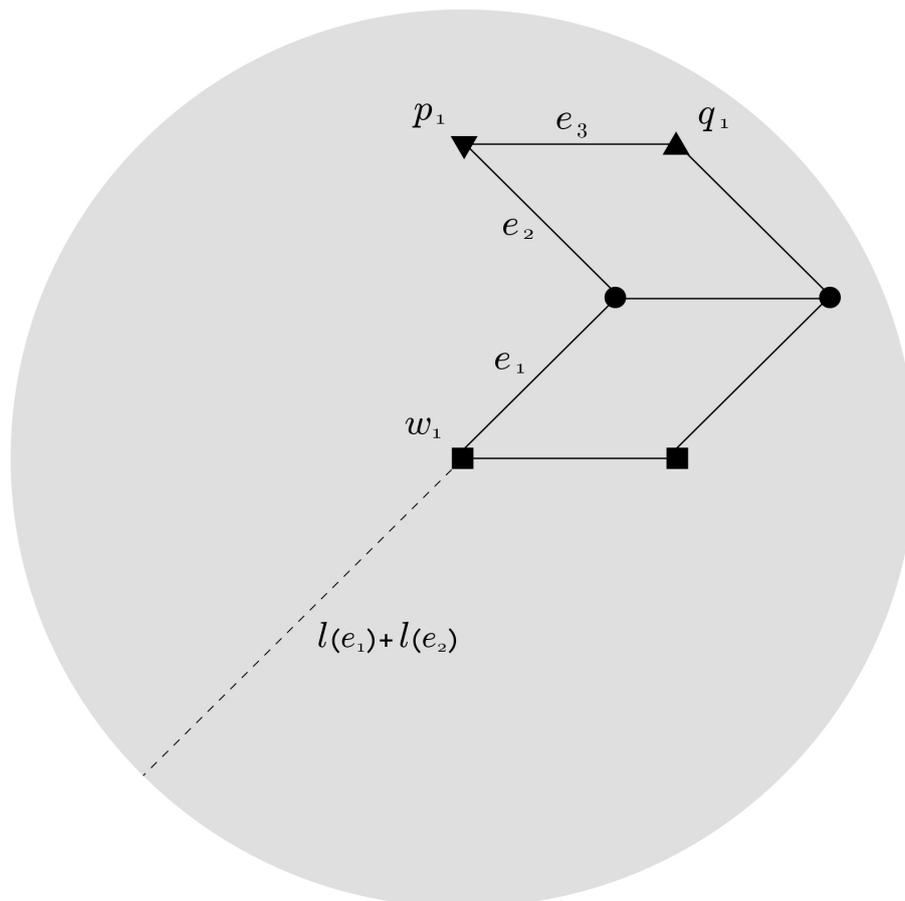


Figura 2.8: Traslador.

Notación. El círculo en gris es una representación del dominio del linkage funcional, es decir, el espacio por el cual puede moverse p_1 .

Construcción 2. Uno de los linkages más importantes de esta sección es el pantógrafo, construido como en la figura, que nos servirá para realizar diversas operaciones según fijemos algunos vértices y ajustemos algunas aristas.

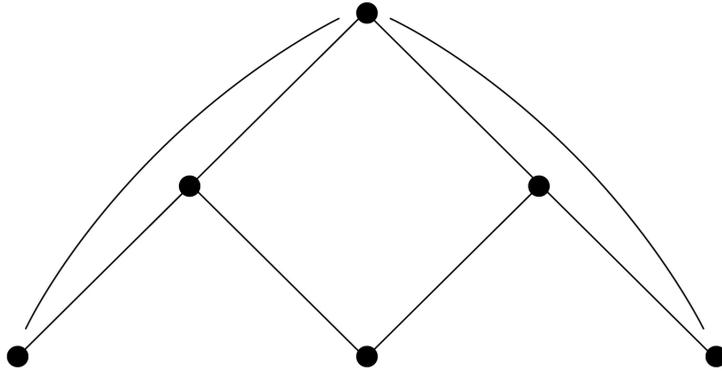
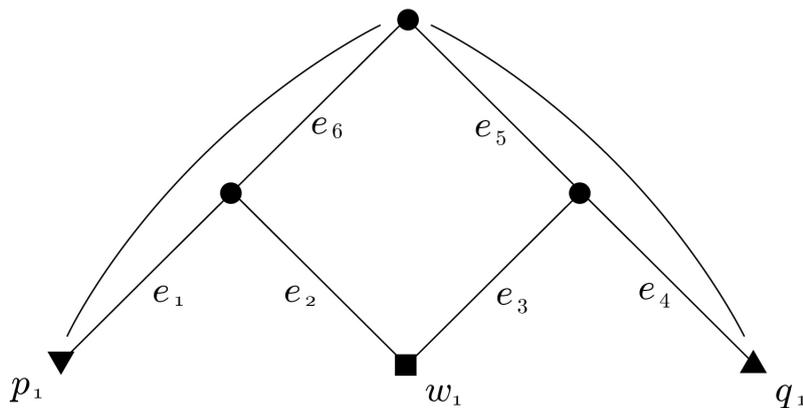


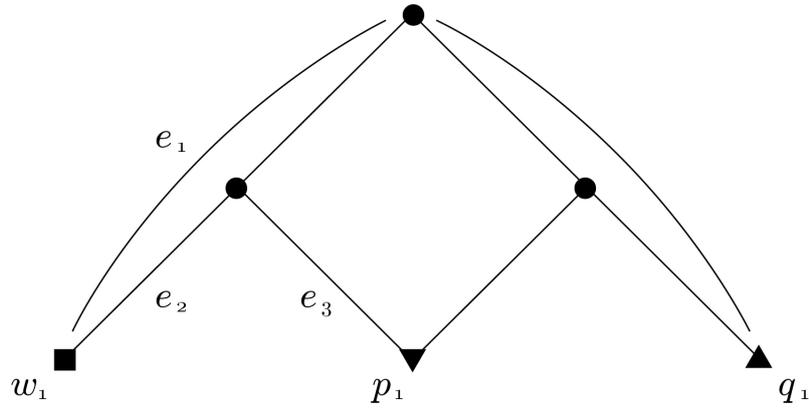
Figura 2.9: Pantógrafo.

A continuación se enumeran:

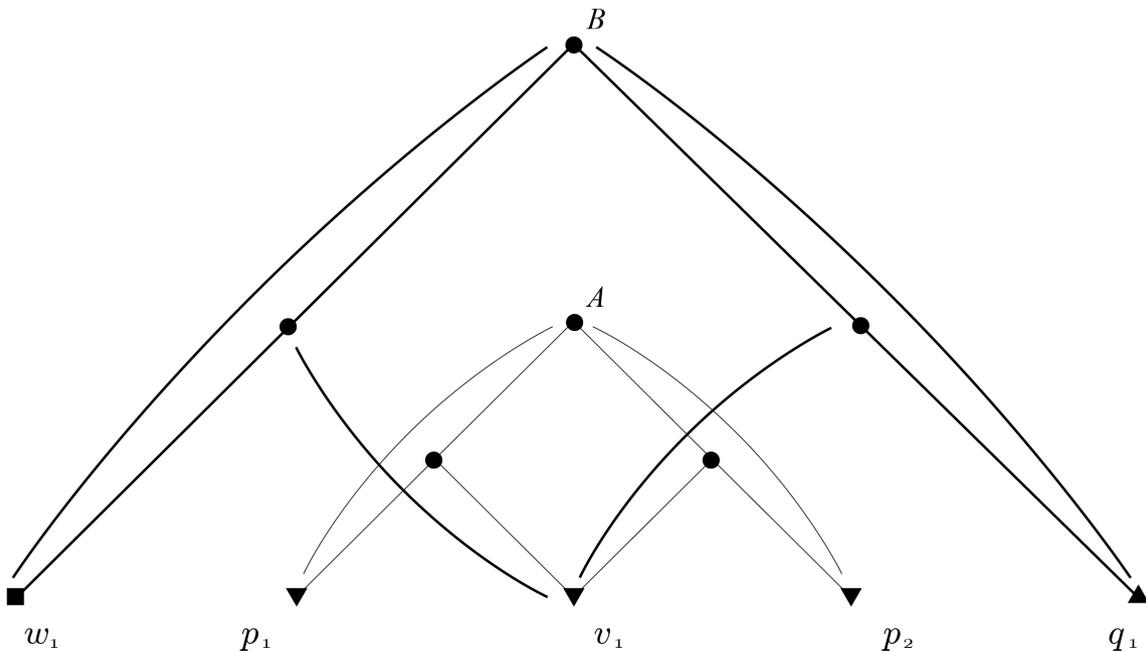
1. Negación: Podemos usar el pantógrafo para rotar alrededor del origen $Z(w_1) = (0, 0)$. Lo podemos hacer tomando $l(e_1) = \dots = l(e_6)$ y considerando $\phi(p_1), \phi(q_1) \in \mathbb{C}$. Obtenemos $\phi(p_1) = -\phi(q_1)$. El dominio de entrada para este caso es $\mathcal{O} = \{(x, y) \mid |(x, y)| \leq 2l(e_1)\}$, el cuál nuevamente podemos ajustar a algo conveniente modificando $l(e_1)$.



2. Multiplicación por escalar: El pantógrafo con entrada $\phi(p_1)$ y $Z(w_1) = (0, 0)$ como en el esquema devuelve $\phi(q_1) = \frac{l(e_1)}{l(e_2)}\phi(p_1)$. Ajustando las longitudes de e_1, e_2, e_3 (siempre asumiendo que el pantógrafo es simétrico) podemos usar este linkage para multiplicar por $\lambda > 1$. Con dominio $\mathcal{O} = \{(x, y) \mid |l(e_3) - l(e_2)| \leq |(x, y) - Z(w_1)| \leq l(e_2) + l(e_3)\}$. Y cambiando los roles de p_1 y q_1 tenemos multiplicación por un escalar $\frac{1}{\lambda} < 1$.



3. Suma: Para este caso necesitamos la suma conexas de 2 pantógrafos, llamémoslos A y B. Es un linkage funcional que toma valores de entrada $\phi(p_1), \phi(p_2)$ y devuelve $\phi(q_1) = \phi(p_1) + \phi(p_2)$. El pantógrafo A toma valores $\phi(p_1), \phi(p_2)$ y devuelve $\phi(v_1) = \frac{\phi(p_1) + \phi(p_2)}{2}$; y B tiene fijado $Z(w_1) = (0, 0)$ y toma $\phi(v_1)$ y devuelve $\phi(q_1) = 2\phi(v_1)$ (como en el ejemplo anterior). Para este caso, cabría tomar una pausa e intentar identificar claramente los componentes de la mencionada suma conexas.



Construcción 3. Uno de los linkages más famosos es el inversor de Peaucellier, descubierto en 1864 por Charles-Nicolas Peaucellier que era en realidad capitán en la armada francesa. Se

dice que las investigaciones de Kempe en torno a este linkage le inspiraron un teorema cuya demostración no resultaría al final de esta sección tan extraña, que, a modo de broma, puede enunciarse así:

Hay un linkage que escribe tu nombre.

Donde tu nombre vendría a ser, en principio, un pedazo acotado de una curva algebraica.

El inversor de Peaucellier se puede describir tomando $Z(w_1) = (0, 0)$, $l(e_1) = l(e_3) < l(e_2)$ y con simetría respecto al eje que podemos trazar pasando por w_1 , p_1 y q_1 . Toma como entrada a $\phi(p_1)$ y nos devuelve $\phi(q_1) = \frac{l(e_2)^2 - l(e_1)^2}{\phi(p_1)}$. Donde $\overline{\phi(p_1)}$ es el conjugado complejo de $\phi(p_1)$.

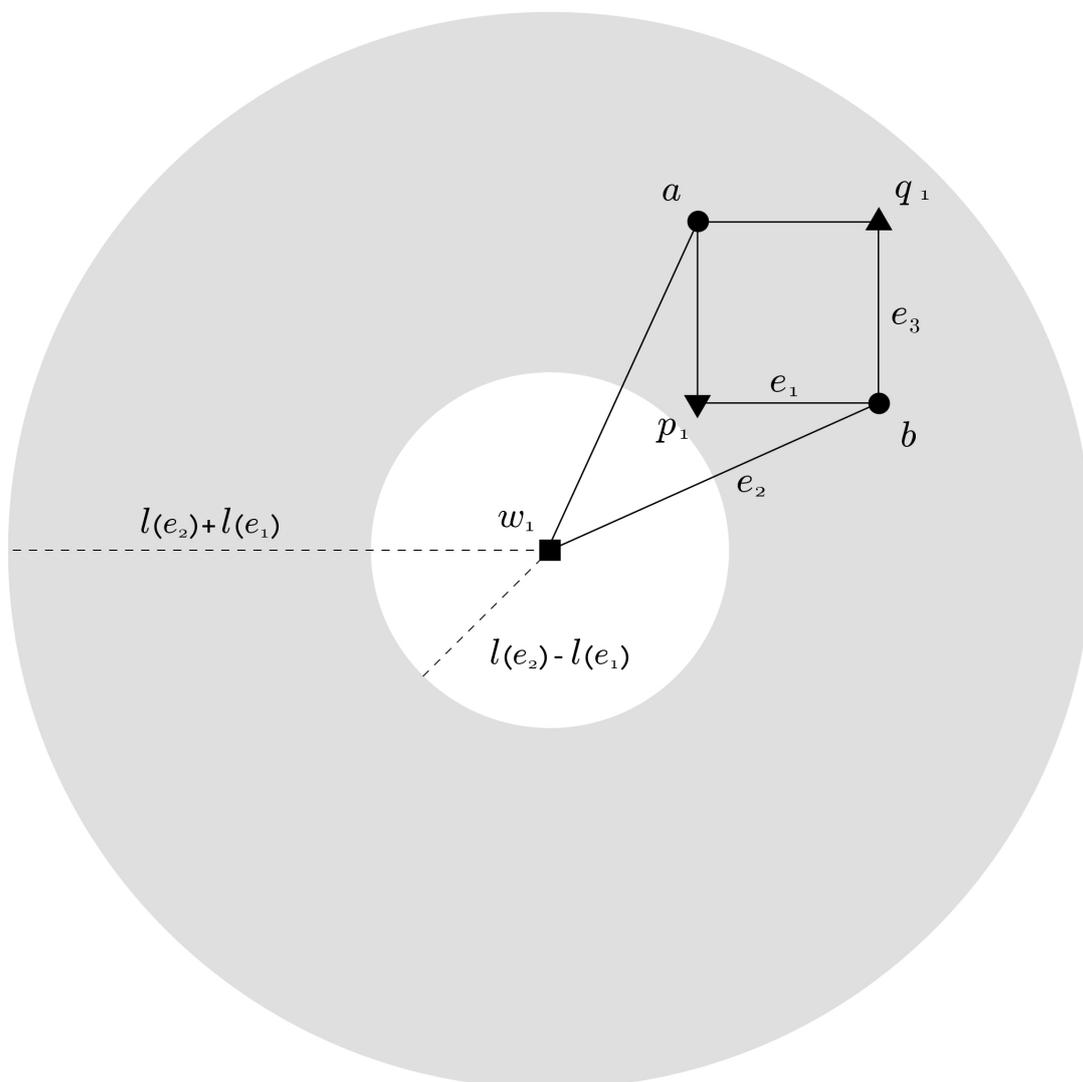
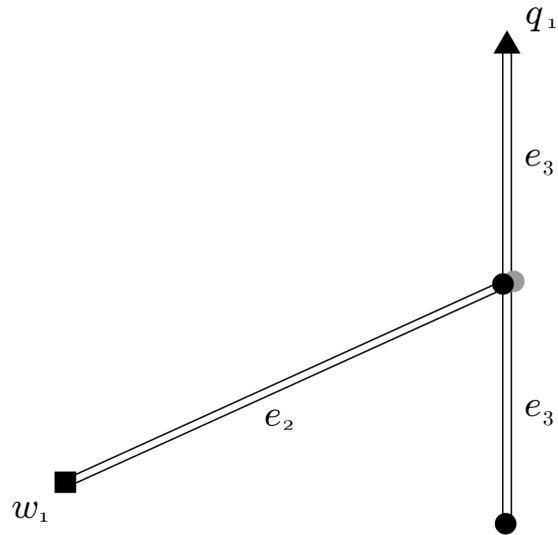
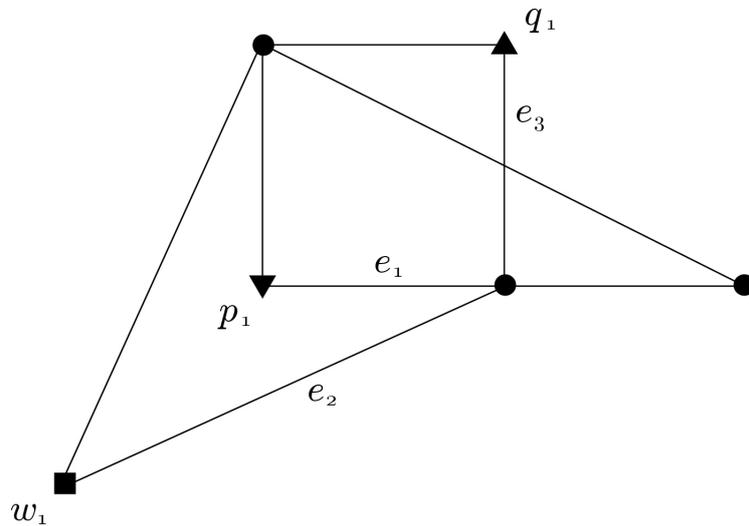


Figura 2.10: Inversor de Peaucellier.

Esta construcción permite configuraciones degeneradas como la siguiente:



Por eso en general se sugiere agregar un “gancho” para eliminar este problema.



Ajustando la longitudes de e_1, e_2 y el tamaño del gancho, podemos hacer un inversor con un dominio que sea un anillo tan grande como queramos alrededor del origen.

Proposición 1. Para cualquier configuración del inversor de Peaucellier los puntos $\phi(w_1), \phi(p_1)$ y $\phi(q_1)$ están alineados y $|\phi(p_1)||\phi(q_1)| = l(e_2)^2 - l(e_1)^2$. En otras palabras, $\phi(q_1)$ es la imagen de $\phi(p_1)$ vía una inversión con respecto al círculo de centro $(0,0)$ y radio $\sqrt{l(e_2)^2 - l(e_1)^2}$.

Demostración. Cada uno de los puntos $\phi(w_1), \phi(p_1)$ y $\phi(q_1)$ es equidistante a $\phi(a)$ y $\phi(b)$ y por lo tanto están alineados.

Por otra parte, si llamamos h al punto de intersección de los segmentos que unen a $\phi(a)$ y $\phi(b)$ y a $\phi(p_1)$ y $\phi(q_1)$, por Pitágoras tenemos que $|\phi(b) - h|^2 = l(e_1)^2 - |\phi(p_1) - h|^2 = l(e_2)^2 - |h|^2$ y entonces $|h|^2 - |\phi(p_1) - h|^2 = l(e_2)^2 - l(e_1)^2$. Por lo tanto $|\phi(p_1)||\phi(q_1)| = l(e_2)^2 - l(e_1)^2$. \square

Construcción 4. Para obtener un linkage funcional para la multiplicación de dos números complejos es necesario conectar los valores de salida de algunos linkages a los de entrada de otros para poder obtener composiciones de funciones como vimos para el caso de la suma. A continuación mostramos un esquema de como se podría crear un linkage para elevar un número complejo al cuadrado utilizando los linkages que vimos anteriormente (Traslador \mathcal{T} , linkage para la negación \mathcal{N} , inversor de Peaucellier \mathcal{I} , linkage para la multiplicación por escalar \mathcal{M} y linkage para la suma \mathcal{S}):

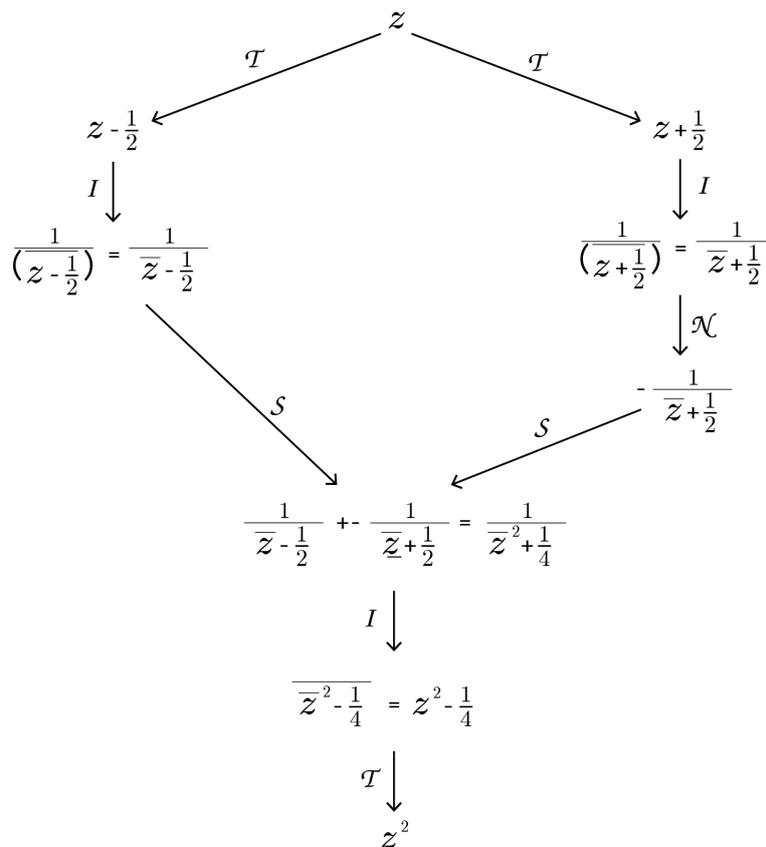


Figura 2.11: Linkage para elevar un número complejo z al cuadrado (\mathcal{Q}).

Y a continuación vemos uno para la multiplicación:

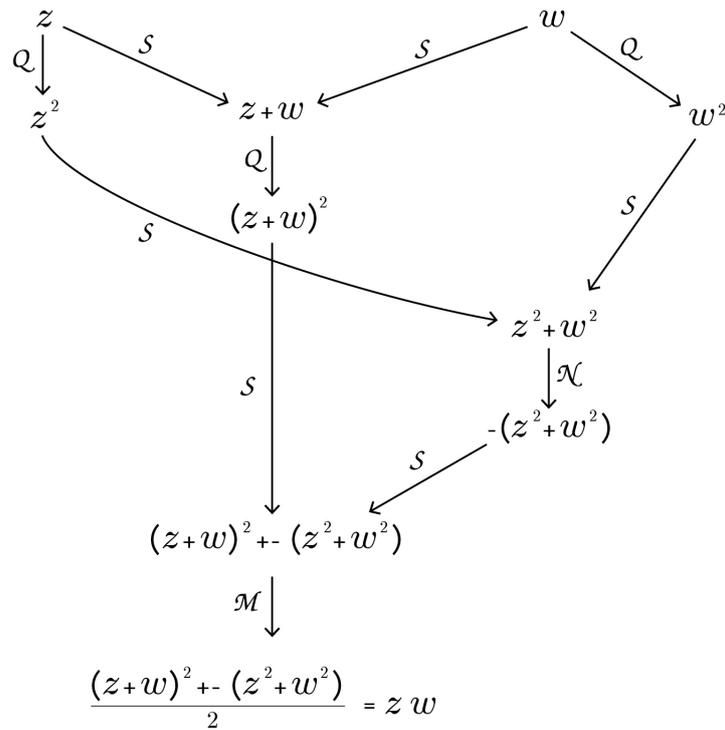


Figura 2.12: Linkage para multiplicar dos número complejos z y w .

El dominio de entrada del linkage para la multiplicación está restringido por los dominios de cada una de sus partes. Los dominios de \mathcal{T} , \mathcal{N} , \mathcal{M} y \mathcal{S} son regiones arbitrariamente grandes alrededor del cero y el dominio de \mathcal{I} puede ser un anillo alrededor del cero tan grande como queramos. Además notemos que las imágenes de estas funciones de conjuntos abiertos contienen conjuntos abiertos. Entonces el dominio del linkage para la multiplicación contiene un conjunto abierto pues contiene intersecciones de abiertos arbitrariamente grandes.

Construcción 5. Otro linkage muy importante es el de movimiento rectilíneo de Peaucellier, que es muy similar al de inversión, de hecho se obtiene agregándole un vértice fijo y una arista.

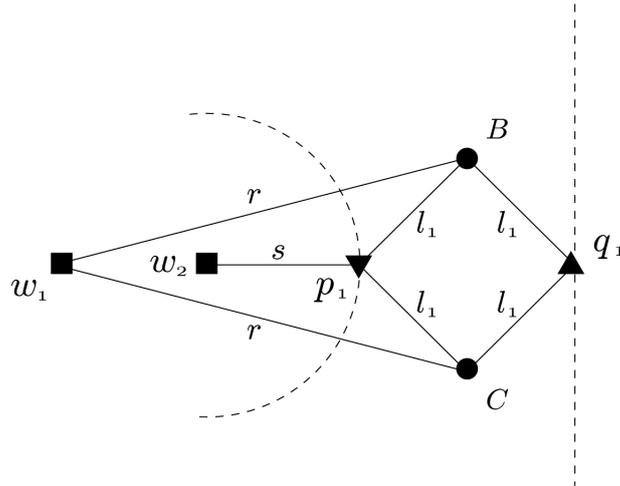


Figura 2.13: Linkage de movimiento rectilíneo de Peaucellier.

Este linkage es famoso por transformar un movimiento circular (el de p_1) en un movimiento rectilíneo (el de q_1). Aunque esto es parcialmente cierto dado que el recorrido de p_1 sólo puede ir y venir sobre un pedazo de arco de circunferencia.

Teorema 1. Se pueden crear linkages funcionales para cualquier polinomio complejo. Además, usando el linkage de movimiento rectilíneo podemos crear linkages para cualquier polinomio real restringiendo las entradas al eje real.

La prueba se sigue de manera constructiva componiendo los linkages que hemos construido para traslación, multiplicación por escalares, suma, negación y multiplicación.

Observación 1. Expansión del dominio: Cuando componemos linkages con la suma conexa debemos ser cuidadosos con los dominios e imágenes. Supongamos que queremos componer los linkages \mathcal{L} y \mathcal{M} con dominios $O_{\mathcal{L}}$ y $O_{\mathcal{M}}$, entonces, para que tenga sentido la composición es necesario que $F_{\mathcal{L}}(O_{\mathcal{L}}) \subset O_{\mathcal{M}}$, donde $F_{\mathcal{L}}$ es la función asociada a \mathcal{L} .

Asumiendo que $O_{\mathcal{M}}$ contiene una región alrededor del origen y que \mathcal{M} es funcional a un polinomio homogéneo de grado n , podemos expandir el dominio de \mathcal{M} usando un factor $\lambda \in \mathbb{R}$ usando la composición $\mathcal{S}_{\lambda^n} \circ \mathcal{M} \circ \mathcal{S}_{\lambda^{-1}}$ donde \mathcal{S}_{λ^n} y $\mathcal{S}_{\lambda^{-1}}$ son linkages funcionales para la multiplicación por escalares (por λ^n y λ^{-1} respectivamente) con dominios arbitrariamente grandes.

Además, todos los polinomios son sumas de polinomios homogéneos y podemos hacer linkages para la suma con dominios tan grandes como deseemos.

Y en el caso de que $O_{\mathcal{M}}$ no contenga una región alrededor del origen sabemos que debe contener una región alrededor de algún $p \in \mathbb{R}^2$, entonces los trasladamos por $-p$, hacemos el proceso descrito anteriormente y volvemos a trasladarlo a su posición, y como podemos hacer linkages para la negación y para la traslación con dominios tan grandes como querramos hemos solucionado el problema.

Por último, como podemos expandir el dominio para cualquier linkage que es funcional a un polinomio, ahora podemos componer cualesquiera dos linkages polinomiales y armarlos a partir de nuestros linkages elementales.

Teorema 2. Dado un linkage funcional con una sola salida, podemos crear un linkage cuyo espacio de configuraciones de entradas $(C(\mathcal{L}, Z)/\sim_p)$ contiene un abierto arbitrariamente grande que es subconjunto del conjunto de nivel 0 de la función. Se obtiene fácilmente fijando la salida del linkage funcional al 0.

Como podemos crear linkages funcionales para cualquier polinomio esto nos da un método para obtener espacios de configuraciones que son los conjuntos de nivel cero de cualquier polinomio real, es decir un conjunto algebraico.

Teorema 3. Como cualquier curva suave puede ser aproximada por un polinomio, podemos crear linkages funcionales cuyos valores de salida la aproximen.

Comentario. Esta última parte peca de un exceso de complejidad que no se corresponde enteramente con los contenidos desarrollados que, sin embargo, deberían alcanzar para hacerse una buena idea de la importancia y los alcances del tema desarrollado.

2.4. Variedades

Los linkages son uno de los ejemplos físicos más simples con relación a variedades de dimensión 3 o más, estas aparecen naturalmente en su espacio de configuraciones. Son útiles para visualizar variedades a partir de cosas más entendibles.

De hecho, la dimensión del espacio de configuración de un linkage es $2(|V| - |F|) - |E|$, es decir, dos veces el número de vértices libres menos el número de aristas.

Proposición 2. Dado un grafo $L = (V, E)$, $W \subset V$, $l : E \rightarrow \mathbb{R}$ y $Z : W \rightarrow \mathbb{R}^2$ el espacio de configuración del linkage $\mathcal{L} = (L, l, W)$ respecto a Z , $C(\mathcal{L}, Z)$, es una variedad diferencial orientable de dimensión $2(|V| - |W|) - |E|$.

Demostración. Daremos un esquema de la demostración. Primero consideremos la función

$$F : (\mathbb{R}^2)^{V \setminus W} \rightarrow \mathbb{R}^E$$

$$\phi \mapsto f_\phi$$

donde, para cualquier $\{v, w\} \in E$ y cualquier $\phi \in (\mathbb{R}^2)^{V \setminus W}$, $f_\phi(\{v, w\}) = |\phi(v) - \phi(w)|$ (el dominio de ϕ es extendido a todo V usando Z).

Notemos que el espacio de configuraciones $C(\mathcal{L}, Z)$ es $F^{-1}(l)$. Corroborando las hipótesis del Teorema de la subvariedad implícita (ver anexo) tenemos que $F^{-1}(l)$ es una variedad diferenciable de dimensión $2(|V| - |W|) - |E|$ para casi todo $l \in \mathbb{R}^E$. Esto es gracias al Teorema de Sard (ver anexo) que nos dice que para casi todo $l \in \mathbb{R}^E$, dF_p es una suryección para todo $p \in F^{-1}(l)$.

Más aún, como \mathbb{R}^E es orientable, entonces el espacio normal de $F^{-1}(l)$ en $(\mathbb{R}^2)^{V \setminus W}$ también lo es. Pero como $(\mathbb{R}^2)^{V \setminus W}$ es orientable entonces si uno obtiene una orientación del espacio tangente de una variedad M , entonces M también resulta orientable. \square

El espacio de configuración del brazo robótico \mathcal{R}_n (ver figura 2.1) es el toro de dimensión n para $n \geq 2$, \mathbb{T}^n , cada una de sus configuraciones se corresponde con los n ángulos $\theta_1, \dots, \theta_n$ formado por cada una de las aristas con el eje horizontal. Por ejemplo, resulta trivial notar que el espacio de configuración de \mathcal{R}_1 corresponde a S^1 , entonces fácilmente podemos visualizar el espacio de configuración de \mathcal{R}_2 como $S^1 \times S^1$ que sabemos es isomorfo a \mathbb{T}^2 .

Proposición 3. El espacio de configuraciones $Conf(\mathcal{L}_n)$ es difeomorfo a S^{n-2} , donde \mathcal{L}_n es el brazo robótico de n aristas con los dos extremos fijos.

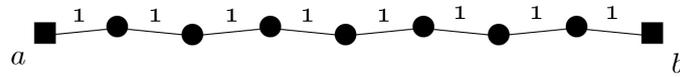


Figura 2.14: \mathcal{L}_8 .

Demostración. Podemos asumir que $Z(a) = (0, 0)$ y $Z(b) = (n - \varepsilon, 0)$. Primero, consideremos el brazo robótico \mathcal{R}_n (es decir con un sólo extremo fijo). Para cualquier configuración $(\theta_1, \dots, \theta_n) \in Conf(\mathcal{R}_n)$ escribimos $s = (s_1, s_2) = (\sum_i \cos \theta_i, \sum_i \text{sen} \theta_i) \in \mathbb{R}^2$ que se corresponde con la posición del último vértice v_n . Entonces $Conf(\mathcal{L}_n, Z) = \{(\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{T}^n \mid s = (n - \varepsilon, 0)\}$; para $\varepsilon > 0$ pequeño, $Conf(\mathcal{L}_n, Z)$ está contenido en un entorno arbitrariamente pequeño de $C_0 = (0, \dots, 0)$.

Ahora, consideremos el subconjunto de todas las configuraciones cuyo último vértice se encuentra en el eje horizontal: $M = \{C \in \mathbb{T}^n \mid s_2 = 0\}$. Como $\nabla s_2 = (\cos \theta_1, \dots, \cos \theta_n)^T$, M es una subvariedad de \mathbb{T}^n en un entorno de C_0 .

Calculando los diferenciales de orden 1 y 2 de s_1 tenemos:

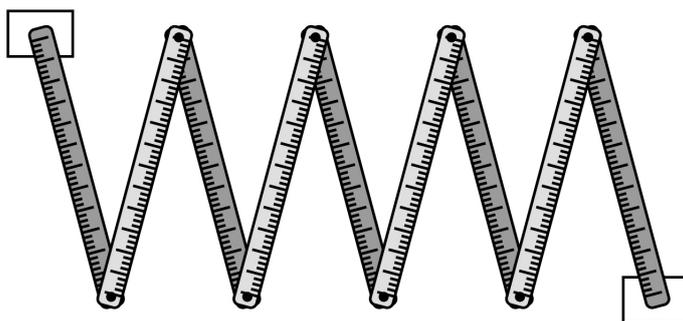
$$\nabla s_1 = (-\text{sen} \theta_1, \dots, -\text{sen} \theta_n)^T \text{ y } D^2 s_1 = \begin{pmatrix} -\cos \theta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -\cos \theta_n \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $\nabla s_1(C_0) = 0$ y $D^2 s_1(C_0)$ es no degenerada. Más aún, s_1 alcanza su máximo n en C_0 . Por el Lema de Morse (ver apéndice), M tiene un sistema de coordenadas globales $(x_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ en un entorno de C_0 tal que:

$$s_1 - n = -(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2)$$

En particular, el conjunto de nivel E definido por $s_1 = n - \varepsilon$ es difeomorfo a la esfera de dimensión $n - 2$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. \square

Al momento de concluir esta sección, se han publicado importantes resultados con respecto a las esferas exóticas; se descubrió una construcción que permite probar que admiten curvaturas no negativas. No pretendemos dar un linkage para una esfera exótica, ni derivar de allí ninguna propiedad (no podríamos hacerlo), pero no queríamos dejar pasar la oportunidad para mencionar que, tal como vimos arriba, nuestra 7-esfera no es más que el espacio de configuraciones de una regla de carpintero de nueve varillas con sus extremos clavados ¡cualquiera puede tener su 7-esfera en la casa!



2.5. Algunas generalizaciones

Hasta acá venimos trabajando, con cierta complejidad, con linkages planos. Es natural pensar en cambiar el espacio ambiente \mathbb{R}^2 por algún otro. Podemos intentar estudiar el espacio ambiente como siendo \mathbb{R}^3 , o incluso como una variedad arbitraria M . Esto quiere decir que ahora una realización de un linkage \mathcal{L} , será un mapa de \mathcal{L} a M , que envía cada vértice a un punto de M respetando las longitudes de las aristas. Generalizar las definiciones es sumamente elemental y sólo requiere prestar atención en dónde entra en juego la variedad elegida. Hay teoremas que dependen de las propiedades de las variedades; pero como suele ocurrir, está el espíritu de formular y probar teoremas universales. Ejemplos de variedades sobre las cuales se ha estudiado en profundidad son el plano de Minkowsky, el plano hiperbólico, la esfera S^2 ; considerada como la esfera unidad en \mathbb{R}^3 [1].

Mencionaremos dos ejemplos simples de linkages esféricos que son funcionales. Su construcción es similar a las que hemos desarrollado antes.

Ejemplo 8. El linkage de círculo máximo consta de un vértice a que está unido a otros k vértices v_1, \dots, v_k mediante arcos de longitud $\frac{\pi}{2}$. Esto fuerza que los vértices v_1, \dots, v_k se encuentren sobre el mismo círculo máximo.

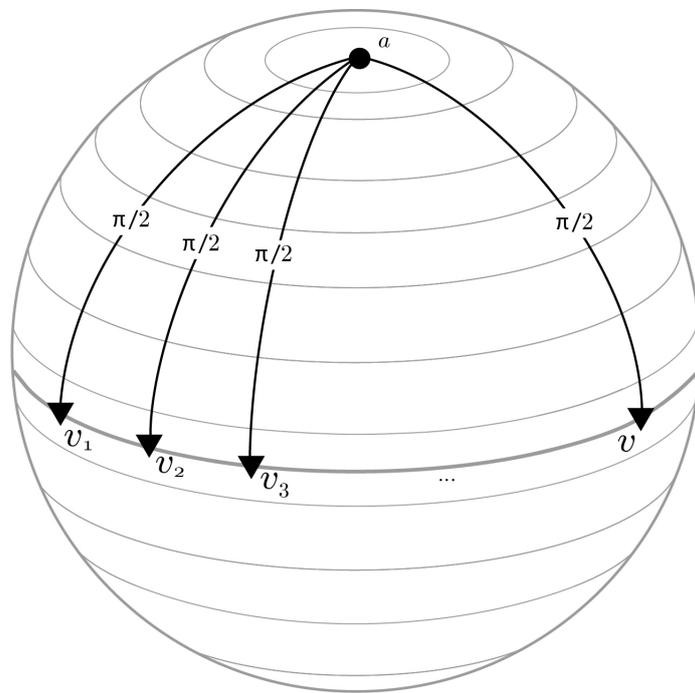
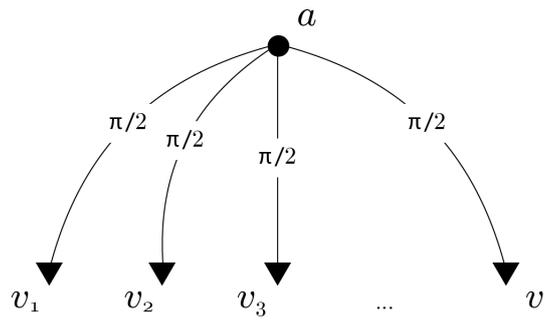


Figura 2.15: Linkage de círculo máximo.

Ejemplo 9. El simetrizador es un linkage funcional para simetría respecto a un círculo máximo (es decir, simetría ortogonal respecto a un plano en \mathbb{R}^3 que pasa por el origen). Este linkage, así como el pantógrafo para el caso del plano, habilita la construcción de otros linkages esféricos. Su construcción resulta muy complicada, complicación de la cual esperamos que la siguiente figura de cuenta.

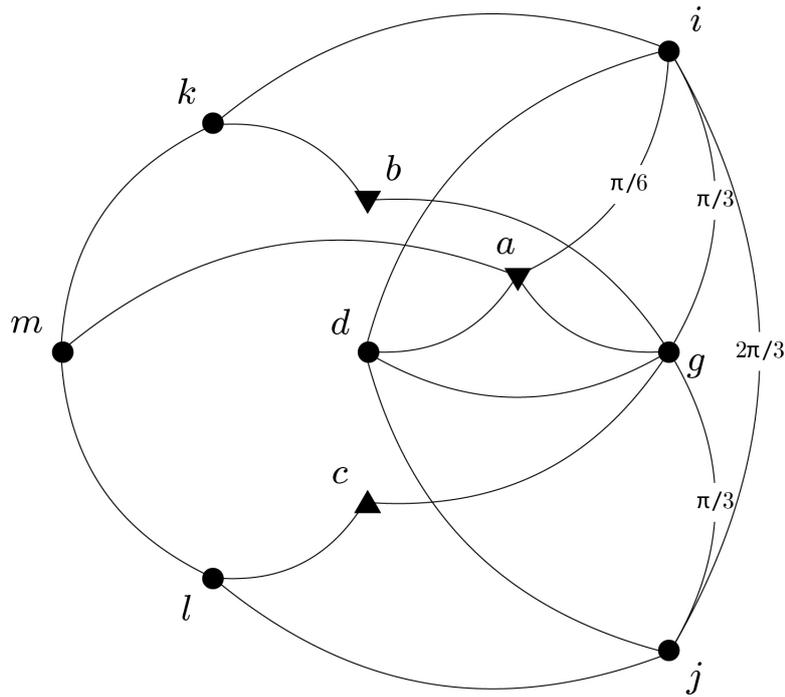


Figura 2.16: Simetrizador.

Como se mencionó, no es objetivo de este trabajo avanzar sobre demostraciones que requieran una complejidad extra, propia de quien ya ha entrado en materia. Pero para despertar los ánimos sobre el tema, cabe destacar que múltiples teoremas de universalidad se han formulado para distintas variedades. Por ejemplo, para linkages esféricos tenemos el siguiente teorema.

Teorema 4. Sea A un subconjunto semialgebráico compacto de $(S^2)^n$ (identificado con un subconjunto de $(\mathbb{R}^3)^n$). Entonces, A es el espacio de configuraciones parcial de algún linkage \mathcal{L} en S^2 (es decir, esférico).

No será demostrado, pero con las definiciones dadas y las construcciones para linkages funcionales dadas en la sección anterior debería ser suficiente para tener una idea de la importancia del teorema y del tipo de matemática (ciertamente más compleja) que involucra. Recomendamos mantener en mente la idea de linkages esféricos.

2.6. Una breve mirada mecánica

En este pequeño apartado veremos un poco del argot propio del trabajo que se realiza en mecánica y en cinemática con relación a los linkages. Como el lector debe saber, la forma de trabajar con temas similares varía de acuerdo al área. Nuestro interés sigue estando ligado a pasiones relacionadas con la geometría y el álgebra, no obstante sentimos que puede resultar de sumo interés ver en funcionamiento el tema desarrollado en otros campos y, además, prepararemos con esto unos comentarios finales; aunque solamente estén dados de manera intuitiva e introductoria.

La esperanza es poder presentar adecuadamente ciertas nociones mecánicas del linkage para

dar cuenta de cómo aparecen en algunas aplicaciones, y una en especial que será mencionada brevemente en el último capítulo.

Grosso modo, podemos pensar en un “mecanismo” como un ensamble de miembros rígidos, o enlaces, conectados por articulaciones (puntos articulados) que son la materialización fenoménica de nuestros vértices y de nuestras aristas. Las articulaciones son el elemento más importante del mecanismo desde la óptica de la cinemática. Como vimos, esto da la idea de movimiento en algunas direcciones (que dependen del ambiente, podría ser el plano, o el espacio, o una variedad; en mecánica el interés está en el movimiento en el plano y en el espacio) y lo restringe en otras direcciones. Estos “permisos” de movimiento están ligados a la idea de “grados de libertad” de la articulación, que sería el número mínimo de coordenadas para especificar con unicidad la posición de la arista ligada a la articulación. El análisis teórico de la cinemática de un mecanismo de este tipo representa toda un área de estudio muy compleja. A los mecanismos que se corresponden físicamente con las características de alguno de los linkages que hemos mencionado se los llama, naturalmente, linkages. Sólo que ahora está dilatado su sentido matemático y corresponde a un campo más propio de la ingeniería.

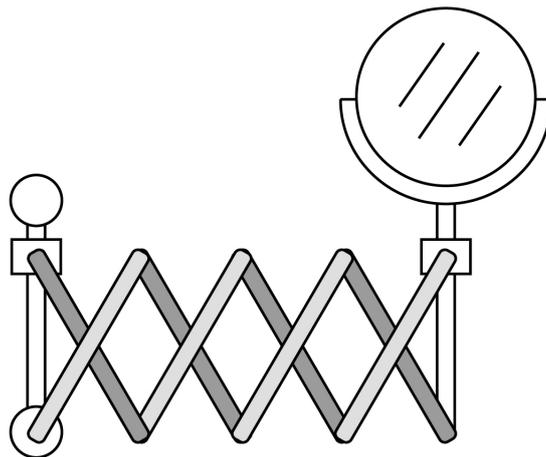


Figura 2.17: Otro linkage en casa.

En este sentido, podemos hablar de mecanismos planos, mecanismos esféricos, de la misma manera en que nos referíamos a los linkages. En la literatura de la ingeniería, se conoce a las articulaciones como “revoluciones” o “puntos de revolución”; nosotros usaremos ese nombre si queremos referirnos con comodidad por ejemplo a un linkage plano con cuatro articulaciones, que será un 4R linkage plano.

En nuestro desarrollo, aparecen agregados para “hacer rígidos” algunos linkages; esta es una de las herramientas fundamentales para trabajar con mecanismos.

Uno de los métodos de estudio de la cinemática de los linkages es conocido como el método del vector con números complejos, y sirve para mecanismos planos. Puede extenderse para trabajar

en el espacio pero para el caso existe otro método, el método de la matriz, que describe linkages en \mathbb{R}^3 con mayor eficacia.

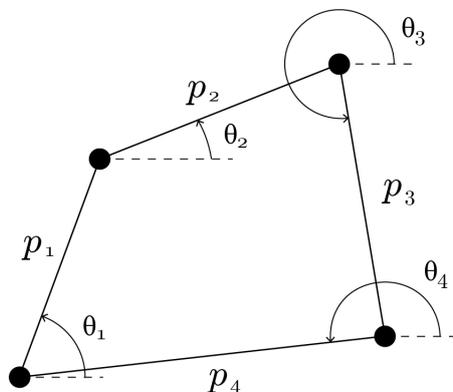


Figura 2.18: Representación vectorial de un linkage plano.

Lo veamos en el mecanismo plano de la figura 2.19. Sea (x, y) una referencia fija, como origen. Los links del linkage pueden ser representados por vectores $p_j = l_j(\cos \theta_j, \sin \theta_j)$ donde l_j es la longitud del link. Podemos escribirlo también como $l_j e^{i\theta_j}$, con i la unidad imaginaria. En este caso, tenemos cuatro links p_1, p_2, p_3, p_4 .

En un mecanismo que es una cadena cerrada, como el de la figura, se verifica que $\sum p_j = 0$. Esta ecuación es una de las fundamentales y se llama ecuación de clausura. Esta es sumamente útil para determinar algebraicamente relaciones entre puntos particulares que al ser fijados determinan a los demás puntos. Este análisis es el que se corresponde con lo que antes dimos a llamar vértices de entrada y de salida pero, de nuevo, de una manera mecánica. En nuestro ejemplo, el link p_4 opera como base. La ecuación de clausura queda:

$$l_1 e^{i\theta_1} + l_2 e^{i\theta_2} + l_3 e^{i\theta_3} + l_4 e^{i\theta_4} = 0$$

donde el ángulo θ_j está tomado con respecto al eje x . Separando en parte real y parte imaginaria se obtiene:

$$l_1 \cos \theta_1 + \dots + l_4 \cos \theta_4 = 0$$

$$l_1 \sin \theta_1 + \dots + l_4 \sin \theta_4 = 0$$

El ángulo pivot θ_4 , entre el eje x y el link pivot es conocido. Se pueden determinar las salidas θ_2 y θ_3 resolviendo en simultáneo las ecuaciones de arriba si se toma θ_1 como entrada cuyo valor está dado.

Como se dijo arriba, se puede extender el método a mecanismos no planos, reemplazando la notación compleja por cuaterniones. En análisis de mecanismos espaciales, con suficiente destreza pueden analizarse también velocidades y aceleraciones, dándole rigor a la dinámica del mecanismo.

El método de la Matriz resulta mucho más útil en el análisis de mecanismo no planos y puede verse en [5].

La misma lógica que enunciamos antes rige también para los linkages esféricos, en este desarrollo mecánico. En un mecanismo esférico todos los links están restringidos a rotar con respecto al mismo punto fijo en el espacio. Por lo tanto, las trayectorias de los vértices trazan esferas concéntricas. Se pueden construir estructuras móviles como linkages esféricos de cadenas cerradas, en donde los links están unidos por puntos de revolución cuyos ejes coinciden en un punto, llamado el punto de concurrencia. Un linkage plano, ocasionalmente, podría pensarse como un linkage esférico que tiene el punto de concurrencia en el infinito. En una articulación, los grados de libertad en el caso de los linkages esféricos es 3, que corresponden a rotaciones sobre los tres ejes que pasan por el punto de concurrencia.

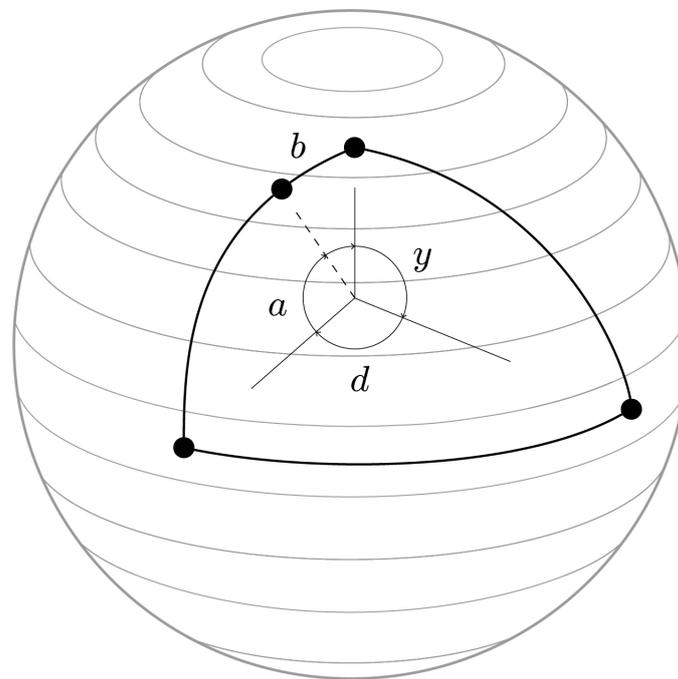
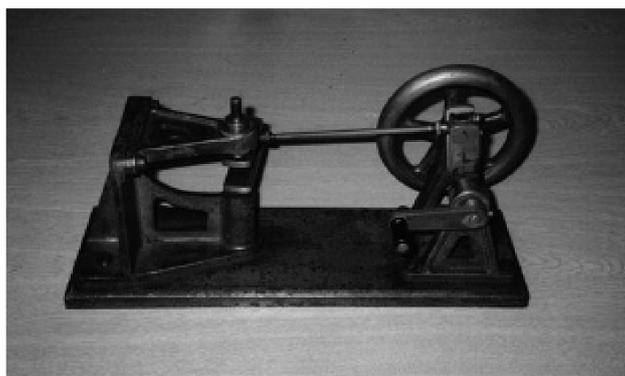


Figura 2.19: Linkage esférico. Veremos que se hace a partir de pliegues de origami.

Con lo que hemos desarrollado hasta ahora, en un linkage podemos hablar de ejes paralelos (como en el caso planar, en el que todos los puntos de revolución son paralelos) o concurrentes (como en el caso esférico).

Un linkage particular y que nos va a resultar útil para deslizar una curiosidad en el último capítulo es el linkage de Bennett.



Si bien para comprender la matemática que subyace a la construcción del linkage de Bennett se requeriría otro tipo de especificidad, unos comentarios pueden ayudar a dirigir la atención a los lugares adecuados. Un ingrediente que aún falta es el de mecanismo sobreconstrañido (en inglés, “overconstrained”). No hemos visto las fórmulas para contar los grados de libertad pero, ocasionalmente, estos criterios pueden verse materialmente afectados, dando lugar a mecanismos que tienen más grados de libertad que los que la fórmula para calcularlos predice. Estos mecanismos se denominan sobreconstrañidos.

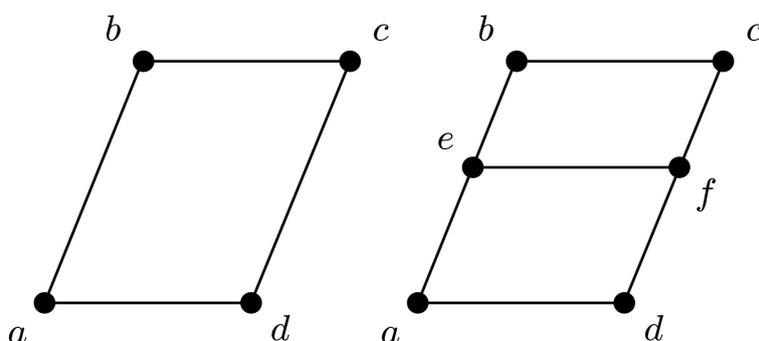


Figura 2.20: En el segundo caso los grados son los mismos que en el primero, pero la fórmula de cálculo predice menos. Está sobreconstrañido.

Una cadena de dos o tres links conectados por el mismo número de puntos de revolución, resulta ser una estructura rígida, o un mecanismo trivial, cuando los tres ejes son coplanares e intersectan a un único punto.

El número mínimo de links usados en la construcción de una cadena móvil no trivial es cuatro. El linkage de Bennett es el único 4R linkage sobreconstrañido que tiene cuatro puntos de revolución que no son ni paralelos, ni concurrentes, lo cual lo hace sumamente llamativo. Las características de este mecanismo hacen que se puedan originar de él otros mecanismos más

complejos pero con características similares.

Este linkage fue, curiosamente, descubierto también por Borel independientemente de Bennett.

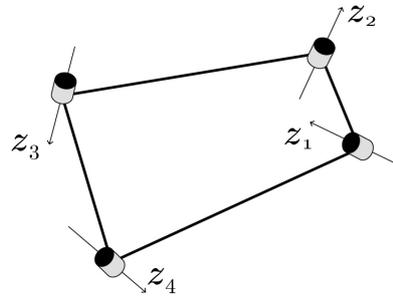


Figura 2.21: Linkage de Bennet.

No sería factible ni recomendable poner aquí las ecuaciones del Bennett siendo esta, fundamentalmente, una curiosidad. Pero este es un linkage notable para nosotros y en la última sección mencionaremos por qué. La generación de linkages más complejos a partir de otros es un proceso conocido como ensamble, o teselado. Esta idea está íntimamente relacionada con lo que conocemos como la suma conexas.

Capítulo 3

Origami

“Origami is a laboratory for mathematics that you hold in your hands. Every time you make a fold, you are doing math. It might be geometry, to construct a diagonal or a triangle. Or it might be calculus, where the crease line that you fold is a tangent line to an invisible parabola. There is math present in every fold that you make when doing origami, whether or not you realize it. Therefore, the beauty that we see in the art of origami is also the beauty of mathematics. The folding skills that we learn as we practice origami are also mathematical skills. The world that we explore when we fold a piece of paper is also the world of mathematics.”

Thomas Hull, especialmente para esta monografía.

3.1. Un poco de historia

La definición intuitiva que se tiene del origami es, y no muy erradamente, la de “armar cosas con papel”. La palabra japonesa origami reúne dos palabras: “or”, que quiere decir “doblez”, y la palabra “kami” que es, justamente, papel. No es complicado suponer que el origami existe prácticamente desde la invención del papel; lo que no es necesariamente conocido es, precisamente, cuándo ocurrió tal cosa. Se considera que el papel fue creado en China en el siglo 1 (no hay que confundir con el pergamino o el papiro). La historia del papel resulta sumamente interesante, desde su origen hasta su universalización.

Una de las teorías existentes en torno al origami es la “natural”. Inventado el papel, por qué no doblarlo. La pregunta es, si con el papel proveniente de China, Corea o Japón llegó también la idea germen del origami o si se dio independientemente en distintos lugares en tiempos aproximados.

La historia del origami se separa entonces de la del papel y sigue la suya la cual también es sumamente rica e interesante. Todo un universo artístico y técnico se montó en torno al papel doblado. En su etapa más moderna, la técnica del origami dio como resultado estructuras complejas e intrincadas con las que sólo se había fantaseado. El lado artístico dotó al origami una razón de ser por añadidura, excedentaria con respecto a la “utilidad” y es quizás el mayor atractivo que tiene para nosotros. El origami, como es posible imaginar, posee una geometría propia sobre la cual la matemática ha ido entrando de distintas maneras. La referencia más antigua al origami tomado bajo el lente de la matemática data del 1840, de un libro de Dionysius Lardner que ilustraba conceptos geométricos usando justamente papeles doblados. Durante bastante tiempo la utilización del origami en matemáticas estuvo limitada a tomar el papel

como una herramienta para simular construcciones o ilustrar conceptos. Comentaremos sobre esto en el último capítulo de esta sección.

Como era de esperar, en algún momento surgió el interés por analizar la matemática del origami por sí misma dando lugar a una “matemática del origami” que aunque no parezca demasiado extendida es sumamente prolífica. De hecho, existe una batería de axiomas para el origami -los axiomas de Huzita- y se produce una formalización que da lugar a múltiples y notables resultados; que luego de haber avanzado sobre el material que le dio origen, una pieza de papel plano, llega a extenderse incluso a dimensiones más altas.

Como pequeño cierre de esta introducción, dejamos tal cual aparece en [7] el siguiente problema general: Dada una forma tridimensional (un origami ya armado) encontrar un patrón y una cadena de pasos para plegar el papel y crear ese origami. Este es, por supuesto, un problema aún sin solución. En [7] se agrega, con mucha sutileza que su falta de solución hace persistir al origami como arte. No entraremos en esa interesante discusión.

3.2. Formalidades del origami plano

El origami es un mapa continuo 1-1 de un patrón de pliegues para crear un objeto tridimensional. Le llamamos “patrón de pliegues” al dibujo o diagrama que queda en el papel cuando está desdoblado. El origami rígido es supuesto en el caso en que cada “cara” rodeada de pliegues no es extendida ni curvada durante el doblamiento. Nos interesa trabajar, en principio, con el origami plano que es, dicho rápidamente, aquel diseño que puede ser guardado dentro de un libro sin agregar o modificar pliegues.

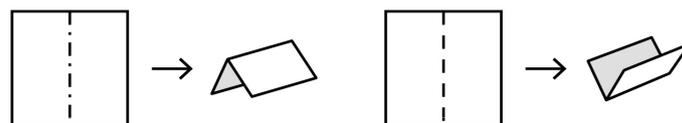


Figura 3.1: Pliegue montaña y pliegue valle de izquierda a derecha.

Qué implica que un origami sea plano:

- que los pliegues sean líneas rectas
- que los pliegues representen o bien montañas, o bien valles.

A los pliegues lo imaginamos como líneas en el cuadrado unidad $[0, 1] \times [0, 1]$. El origami será ese conjunto líneas más una función que dirá cuán lejos y en qué dirección cada pliegue es doblado y, para evitar que la función requiera rasgar el papel, se le impone que sea uno a uno.

Formalmente:

Definición 10. Un origami es un par (C, f) donde C es el conjunto de pliegues y $f : C \rightarrow (-\pi, \pi)$, tal que la función que induce del $[0, 1] \times [0, 1]$ a \mathbb{R}^3 sea inyectiva. Para líneas de pliegue l , $f(l) > 0$ significará que l es un valle, y $f(l) < 0$ que l es una montaña.

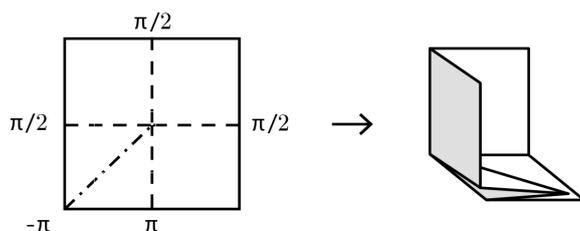


Figura 3.2: Un origami no plano.

Definición 11. Un origami plano es un origami tal que si tomamos límite para plegar cada valle π radianes y cada montaña $-\pi$ radianes; entonces el origami sigue siendo 1-1.

Este requerimiento remite a la idea de aplanar el origami sin que se atravesase el papel. Denotaremos con líneas continuas a los pliegues montaña y con líneas discontinuas a los pliegues valle.

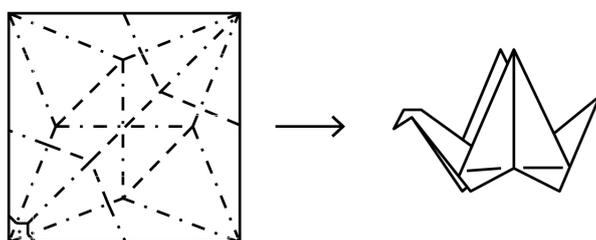


Figura 3.3: La grulla.

Como en un origami el ángulo de cada pliegue se determina por si es una montaña o valle, podemos describirlo con un par (C, f) donde C es el patrón de pliegue y $f : C \rightarrow \pm 1$ define la

paridad de los pliegues.

Un vértice de un patrón de pliegues es un punto en donde dos o más pliegues se intersecan; un pliegue de vértice plano es un patrón de pliegue con un único vértice.

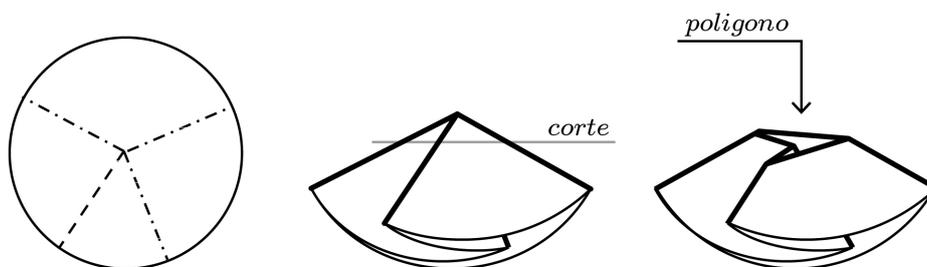
En general, trabajaremos los vértices individualmente como si fueran el centro de un disco unitario.

Hay dos grandes teoremas relacionados a la matemática del origami. El primero debe su nombre al físico Japonés Maekawa, que lo publicó en 1987, pero no lo demostró. Lo curioso es que la demostración, muy sencilla, que presentamos aquí fue realizada por el estudiante de grado Jan Siwanowicz en 1993.

Teorema 5. (de Maekawa) La diferencia entre el número de pliegues montaña y el número de pliegues valle en un pliegue de vértice plano es dos.

Demostración. Sea n el número de pliegues que se conectan en el vértice, M el número de montañas y V el número de valles. Es decir que $n = M + V$. Luego de doblar el papel (ver figura) según si son montañas o valles, se puede efectuar un corte en el papel debajo del vértice. Visto desde arriba es claro que queda un polígono plano en el que, aplastado, sus ángulos interiores miden o bien 0, o bien, 2π (en efecto, las montañas corresponden a 0 y los valles a 2π). Luego, la suma de los ángulos interiores del polígono es $(0 \cdot V + M \cdot 2\pi) = M \cdot 2\pi$. Pero la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo está dada por $(n - 2) \cdot \pi = (M + V - 2) \cdot \pi = M \cdot 2\pi$ y por lo tanto $M - V = 2$.

Esto asumiendo que nuestro vértice apunta hacia arriba; análogamente, si estuviese mirando hacia abajo, resultaría $V - M = 2$.



□

Corolario 1. El número de pliegues en C es par.

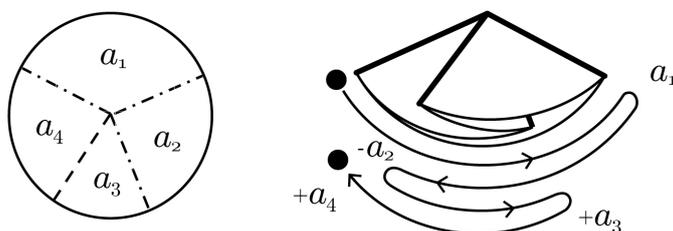
Demostración. Si n es el número de pliegues en C y $M - V = 2$ entonces $n = M + V = M - V + 2V = 2(1 + V)$. Similar si $V - M = 2$. □

Un corolario interesante para quien le interesen los grafos es el siguiente (puede verse un poco más sobre esto en el anexo):

Corolario 2. Si pensamos al patrón de pliegues del origami como un grafo, entonces todo patrón de pliegue de un origami plano es 2 vértice-coloreable.

Teorema 6. (de Kawasaki) La suma de ángulos alternados alrededor de un vértice de un origami plano es π .

Demostración. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}$ los ángulos y sea γ una curva simple cerrada en el disco D . Si doblamos a D usando los pliegues en C y seguimos el trazo de la curva en la forma obtenida, vemos que cada vez que se encuentra con un pliegue, cambia la dirección. Eventualmente volvemos al lugar de donde partimos, lo cual implica que $\alpha_1 - \alpha_2 + \dots - \alpha_{2n} = 0$ (1)
 Pero además, vale que $\alpha_1 + \dots + \alpha_{2n} = 2\pi$; si sumamos a (1) obtenemos el resultado querido.

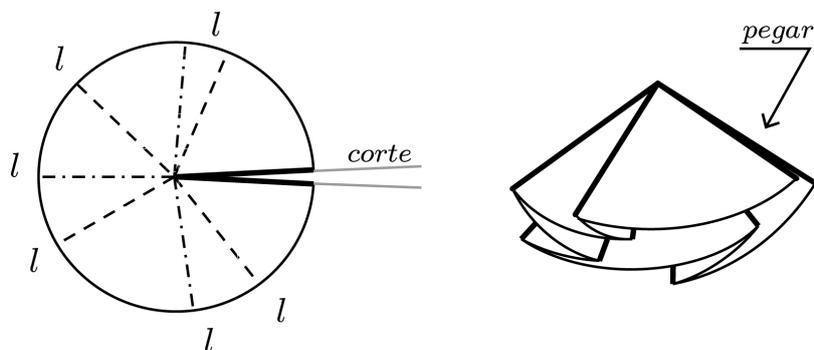


□

La converso del teorema de Kawasaki también es verdadera:

Teorema 7. (generación de origamis) Sea $C = \{l_1, \dots, l_{2n}\}$ una colección de líneas radiales en el disco unidad D y sean $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}$ los ángulos entre las líneas. Supongamos que $\alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{2n-1} = \alpha_2 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{2n} = \pi$, entonces C genera un origami.

Demostración. Las hipótesis del teorema aseguran que la ecuación $\alpha_1 - \alpha_2 + \dots - \alpha_{2n} = 0$ se sostiene, y esto implica que al menos en cuanto a los ángulos el disco D puede ser doblado usando los pliegues en C . Lo que resta es mostrar que existe un arreglo adecuado de montañas y valles para asignarle a C , que permitan un origami legítimo (es decir, la función f).



Para asignar montañas y valles, sean l_1 un valle, l_2 y l_{2n} montañas. Entonces l_3 y l_{2n-1} son valles, los siguientes montañas, y así. Entonces efectuar un corte a lo largo del pliegue l_{n+1} y doblar el disco como en la figura.

Como la ecuación 1 vale, sabemos que los dos finales que representaban l_{n+1} van a alinearse cuando los otros pliegues estén doblados. Hay que considerar casos, uno en el que no hay hojas entre las dos partes de l_{n+1} , en cuyo caso simplemente lo pegamos.

En otro caso hay hojas que se interponen entre los dos extremos; aquí debemos seguir otra estrategia.

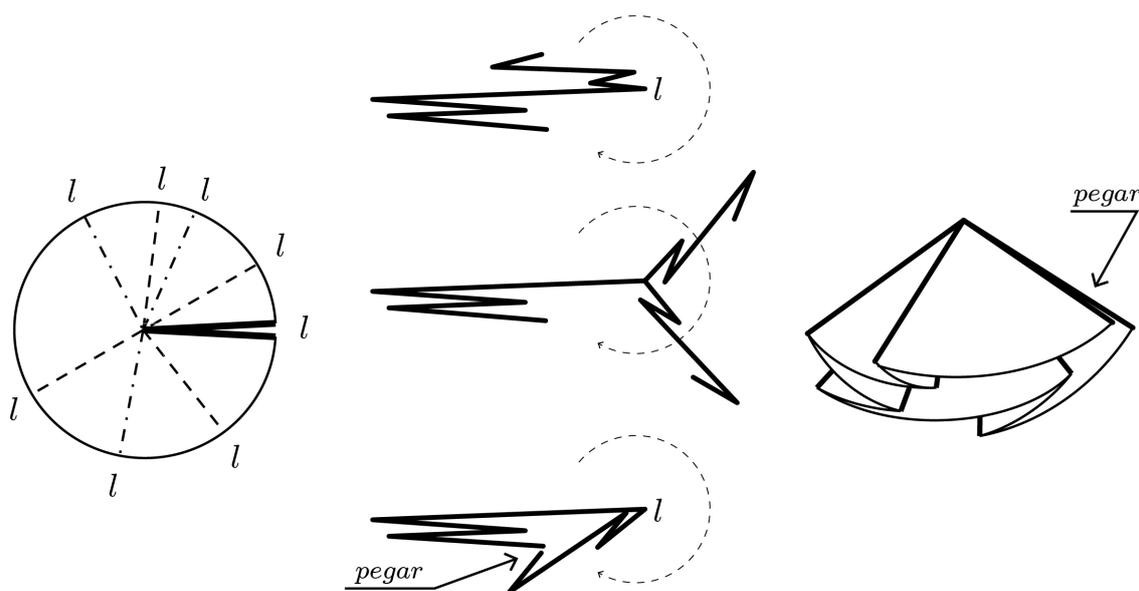


Figura 3.4: Ejemplo de una asignación de montañas y valles.

La idea es revertir el pliegue más grande, de forma tal de poder pegar, del otro lado, los dos extremos. Esto es claro en la figura 3.4. □

3.3. Algunas generalizaciones

El teorema 5 no vale para origamis con más de un vértice (es una propiedad local), por ejemplo, en la grulla. Sin embargo uno quisiera explorar la posibilidad de encontrar una propiedad similar para un mayor número de vértices; teniendo en cuenta que el teorema vale para cada vértice, visto localmente. Sabiendo que $M - V = 2$ si el vértice “apunta para arriba” y $M - V = -2$ si “apunta para abajo”, una conjetura que se podría hacer es que $M - V = 2(\# \text{ vértices para arriba}) - 2(\# \text{ vértices para abajo})$. Por desgracia, esto no es cierto, pues en el trayecto habremos tenido en cuenta algunos pliegues más de una vez (cuando los vértices del pliegue hacen que permanezca dentro del “cuadrado de papel” y no termina en uno de los bordes). A esos pliegues se les llama “interiores”. Así, podría sugerirse que:

Proposición 4. Sea (C, f) un origami plano y sean M y V como los conocemos. Entonces $M - V = 2(\# \text{ vértices para arriba}) - 2(\# \text{ vértices para abajo}) - (\# \text{ pliegues interiores de montaña}) + (\# \text{ pliegues interiores de valle})$.

El obstáculo de esta proposición son los pliegues que no intersecan a ningún otro en el interior del cuadrado. Por ejemplo, el origami que consiste en una sola montaña, en donde $M - V = 1$ (contradiciendo la proposición). Para arreglar este tipo de casos, hay que considerar esas líneas de pliegue como si tuviesen algún vértice en el camino de la línea, haciendo en realidad 2 líneas de pliegue. En este caso, el origami contraejemplo ahora tiene un vértice imaginario en el medio y dos montañas y luego vale $M - V = 2$ (y por lo tanto también el teorema).

Todo esto en persecución de poder considerar a $M - V$ como una característica del origami en algún sentido. Otros resultados en el intento de caracterizar ciertos tipos de origami son:

La condición de los 180°: Los teoremas 6 y 7 no pueden ser extendidos rápidamente a origamis planos con múltiples vértices. De hecho, existen origamis con patrones que son localmente doblables, pero que no se puede formar un origami legítimo con ellos, por ejemplo

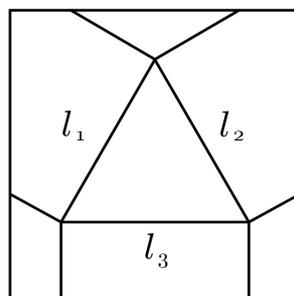
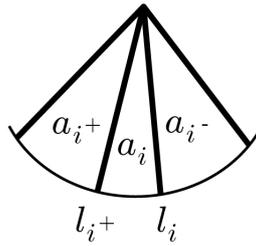


Figura 3.5: Un patrón que no se puede plegar.

Proposición 5. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n}$ los ángulos entre las líneas de pliegue en un origami plano de un vértice.

Para cualquier origami plano (C, f) definido en disco unidad D (con su único vértice en el origen), si $\alpha_i < \alpha_{i-1}$ y $\alpha_i < \alpha_{i+1}$ entonces $f(l_i) = -f(l_{i+1})$.



Para ver por qué es cierto, notar que si $f(l_i) = f(l_{i+1})$, doblando esos dos pliegues ocurre que o bien las hojas se atravesarían.

Volvamos a la figura 3.5.

Consideremos sus líneas de plegue. Si l_1 fuera una montaña, l_2 debería ser un valle. Pero esto implicaría que l_3 sea una montaña, y luego se contradiría el corolario en el vértice inferior izquierdo (l_1 y l_3 no pueden ser montañas). Por lo tanto este patrón de pliegues no es posible de plegar.

Habíamos asignado una paridad a los pliegues (montañas o valles). Esto puede ser pensado como una coloración de aristas pero no en el sentido clásico, sino que:

Definición 12. Dado un conjunto C de líneas de plegue (así generen o no un origami plano) construimos el grafo del origami G como sigue.

1. Los vértices de G son las líneas de plegue en C .
2. Dos líneas de plegue l_i y l_j forman una arista en G sii:
 - a) l_i y l_j son adyacentes en C ;
 - b) $f(l_i) = -f(l_j)$ debe ser cierto si C genera un origami plano (C, f) .

Notar que 2.b) significa que l_i y l_j no puedan ser ambos valles o ambos montaña. Notar además que no siempre es fácil de armar un grafo de un patrón de plegue.

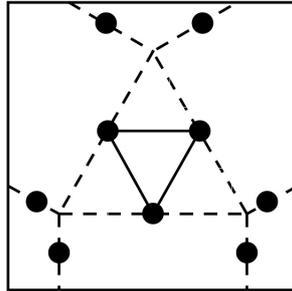


Figura 3.6: Ejemplo de un grafo para un origami.

Figura 3.6 ilustra un posible grafo para 3.5, y es un subgrafo del grafo convencional (para quien esté familiarizado con los grafos, fijarse que no es 2 vértice-coloreable lo cual implica, como ya sabíamos, que no es “doblable”).

Para no excedernos en los ejemplos, dejamos la siguiente conjetura tal cual aparece en [3]:

Conjetura 1. Una colección C de líneas de pliegue en el cuadrado (quizás con más de un vértice) puede generar un origami plano sí y sólo sí:

1. cada vértice satisface la condición de los 180° y;
2. el grafo del patrón de pliegues es 2 vértice-coloreable.

Si bien la conjetura suena, a raíz de lo discutido, un buen acercamiento al caso de vértices múltiples, hay que notar que aunque el grafo nos provea la garantía de poder dar un arreglo de montañas/valles válido, no garantiza la condición de inyectividad del origami. De hecho:

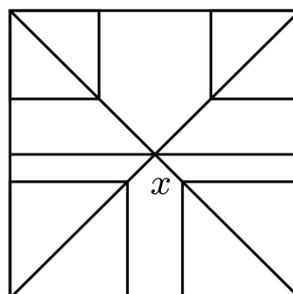


Figura 3.7: Otro patrón imposible de plegar.

satisface las condiciones de la conjetura pero, mucho más sutilmente, no es plegable. Este no es un caso sencillo de analizar, pero su estudio ofrece la idea de que es un asunto difícil el de “pulir” la conjetura para hacerla verdadera.

Para despedir esta sección, dejamos como comentario otra línea de estudio con relación a las generalizaciones. Si bien lo que nos interesó hasta el momento es tratar de extender algunos resultados para casos de múltiples vértices, otro interés podría ser el de generalizar la idea de “papel” que, hasta aquí es un papel en dos dimensiones. Es natural interesarse por generalizar la idea matemática de origami a “papeles” de más dimensiones y de hecho, hemos visto algunos teoremas como el 5 y el 6 que pueden extenderse sin demasiada complicación a casos en los que el papel no es plano; de nuevo, adaptando adecuadamente las definiciones[7].

3.4. Origami y pedagogía

No vamos a desarrollar aquí en amplitud una discusión que consideramos por otro lado necesaria, que tiene que ver con la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Son habituales los comentarios que remiten a una excedencia de la matemática y que aparecen unas veces como “aplicaciones”, otras veces como “incidencia en otras áreas, u otras ciencias”; como quizás hemos hecho notar, esos comentarios muchas veces son motivados por resguardar intacta la “utilidad” de la matemática. Entretanto, consideramos que la utilidad se evidencia automáticamente a cada rato, y quizás lo que querríamos resguardar es, si se permite la imprecisión, aquello que de la matemática es inútil. O bien poder prescindir del discurso de la utilidad y conversar en otros términos, con otras categorías, sobre la relevancia de la matemática. En toda esa producción discursiva (que registra la figura de la matemática ajena a la realidad y la figura de la matemática que “baja a tierra”), a veces nos olvidamos de que, en el medio, la matemática se enseña y se aprende -lo cual no deja de estar sobre la tierra-, se evalúa, se coteja, etc. y si no tenemos precaución, podremos llegar a creer que esa enseñanza se da casi accidentalmente, que está probada, que no requiere ser pensada salvo por gente que se dedique a ello propiamente.

Con eso en mente, el origami representa un caso peculiarmente llamativo, más de lo que la introducción al origami dada en las secciones anteriores puede hacer prever. Las utilidades que tiene el origami son múltiples, aunque en general la primera imagen que surge está ligada a su veta artística; que es sin duda muy fuerte. Un ejemplo de ello: en 1995, Koryo Miura estudió un patrón especial que le sirvió de base para diseñar un panel solar, que terminó en el espacio en un telescopio japonés; y luego de aquel siguieron otros telescopios en cuyo diseño participaron origamistas, que resolvieron un problema muy preciso: cómo enviar algo muy grande hasta el espacio. Doblándolo, como una hoja de papel. Además, anejo al origami hay dimensiones filosóficas e históricas fáciles de encontrar, lo cual habilita al menos poder enunciar algunas preguntas sobre la historia y filosofía de las matemáticas, que tienen un peso específico. Más aún, de toda esa riqueza sumada a la “propiamente” matemática, es que el origami resulta en una herramienta llamativamente poderosa para la enseñanza de matemáticas, desde varias ópticas. Y este es el espíritu de esta sección.

Es una sugerencia habitual (por ejemplo, del National Council of Teachers of Mathematics) la de usar objetos -como el papel- para habilitar la exploración sobre geometría en particular, sus relaciones y vocabulario. Este es el puntapié inicial y es quizás lo que se puede intuir velozmente con respecto al origami. Una vez desdoblado el papel, hallamos en él no sólo vértices y aristas, sino también ángulos. Pero eso es sólo una porción mínima. Tomas Hull produjo un libro ([4]) en el que desarrolla una serie de experiencias con origami para distintos campos de

la matemática y también para distintos niveles de la misma. Si bien, por la naturaleza del tema, hay siempre una componente geométrica, Hull ha identificado formas de llevar el origami al cálculo, a teoría de números, a combinatoria, a grafos (algo de esto sí hemos visto), a álgebra abstracta, topología, y más. Aunque no desarrollemos aquí de qué manera se realizan estas virtudes del origami, es necesario mencionarlas. El mismo Hull sugiere que su trabajo no es más que una porción pequeña de lo que se puede hacer, e invita a explorar en ese sentido.

Capítulo 4

Abriendo la grulla

4.1. Aclaraciones preliminares

Hasta aquí hemos desarrollado algunas de las cuestiones elementales de la matemática del origami y de los linkages. Hemos desarrollado también algunos elementos que revisten a ambos temas de una importancia remarcable. El lector atento seguramente se habrá ido figurando de qué manera se podrían reunir ambos temas desarrollados, puesto que tienen algunos conceptos compartidos.

Este trabajo tiene su pié de apoyo en los linkages, como tema fuerte. Y de entre todas las aplicaciones, o usos que tienen no sólo en matemáticas sino en diversas áreas del conocimiento, elegimos poner como contrapeso al origami por dos razones.

La primera, para poder presentar en simultáneo al origami y escapar un poco, mediante el puente que lo une a los linkages, a la dimensión fuertemente mecánica que aquellos indudablemente tienen; queríamos presentar a los linkages con un matiz más cercano a la dobladura de un papel que a la estructura de un brazo metálico. Podría decirse que es, en gran medida, una elección estética.

La segunda es que mover el tema a esa reunión entre las dos geografías de la matemática permitió extender el interés que puede suministrar este trabajo a futuros egresados y futuras egresadas, proveyendo no sólo la presentación de los temas sino una introducción no despreciable a ellos. En ese sentido, aunque la introducción quizás no resulte suficiente para una cabal comprensión de lo que sigue -comprensión que los autores de este trabajo tampoco poseen en extensión-, es suficiente para intuir algo que es, de suyo, sorprendente.

La conexión existe, y aunque su existencia nos haya permitido desarrollar libremente ambos temas, el hecho de que sea esquiva o poco desarrollada nos justifica doblemente: es esa falta la que consideramos una motivación extra para quien quiera volcarse en el estudio de ella. Consideramos haber entregado una carta de entrada razonable.

4.2. Haciendo Uno

En esta sección se verá lo que oficiará en esta ocasión como pegamento. Una primera idea aproximativa, cercana a la que el lector pudo haberse hecho por su cuenta, la dan los linkages

esféricos. De hecho, los linkages esféricos no triviales más simples consisten, curiosamente, en doblar una pieza de papel con algunos pliegues

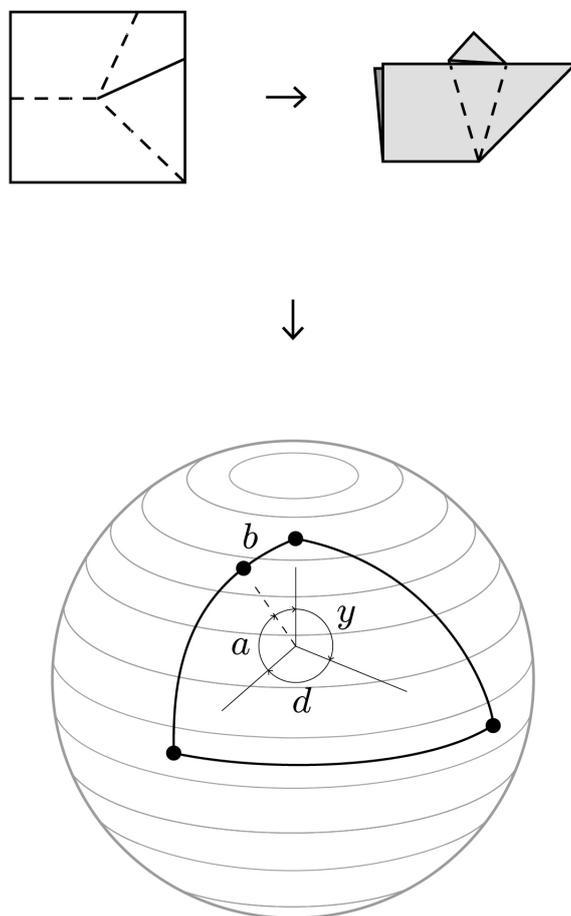


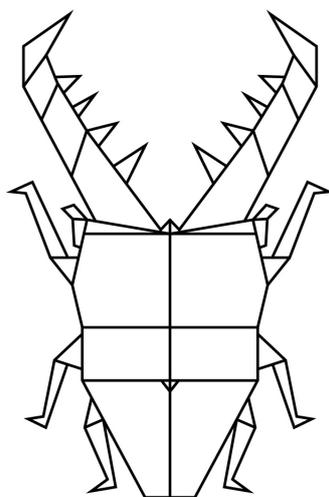
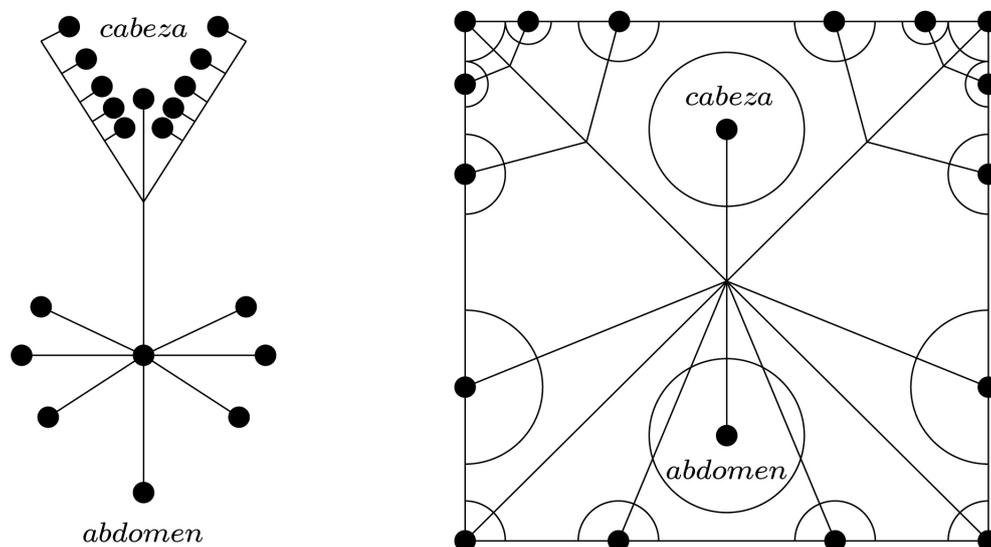
Figura 4.1: El linkage esférico de la figura 2.19, en realidad surge a partir de pliegues de origami.

En este caso, tenemos un linkage esférico de 4 aristas, a partir de un origami con tres valles y una montaña. No hace falta mucha imaginación para ver que el análisis local de vértices de un origami, estudiados dentro de un círculo con un único vértice central es una de las formas más convenientes de construir linkages esféricos.

Quizás pueda resultar llamativo y es digno de notar, que en un traspaso elemental de origami a linkage, son las líneas de pliegue las que funcionan como vértices (o como puntos de revolución). Pero eso ya había sido presentado, afortunadamente, al momento de ver las líneas de grafo de un origami.

Pero esto escala rápidamente. Los algoritmos que permiten pasar de una figura de papel supuesta a doblar a un patrón de pliegues de un origami consisten justamente en trazar un esqueleto de vértices y luego “envolver” localmente los vértices con círculos, y ahí establecer líneas de pliegue de acuerdo a formas más conocidas (por ejemplo, si quiero una pata de un escarabajo, si quiero una antena, etc.). Para el caso, sabemos que cada vértice con cuatro pliegues se

corresponde con un linkage esférico.



El traspaso de lo local a lo global, del cual dejamos alguna constancia arriba, puede ser interpretado con el manual de los linkages; si en cada localidad podemos, en general, obtener un linkage esférico a partir de las líneas de grafo del patrón del origami ¿podemos ensamblar esos linkages?

Esa pregunta, que nos devuelve al terreno de los linkages ha sido trabajada tanto matemática como mecánicamente. Aparece entonces un concepto importante y con cierta sofisticación que es el concepto de teselado. En una superficie plana consiste en hacer un cubrimiento del plano usando algunas formas geométricas; sin dejar espacios y sin superponer. Esta idea se generaliza, por supuesto a dimensiones más altas.

En el caso de los linkages esto se conoce como ensamble móvil que es, justamente, un teselado a partir de ciertos linkages a los que se llama linkages unitarios (habitualmente se usan los linkages 4R planos, los varios esféricos y, en particular, el de Bennett que fue presentado en la sección 2).

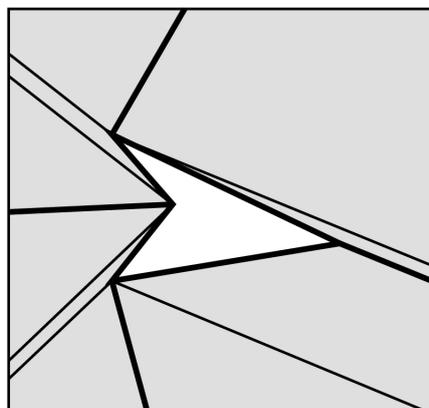


Figura 4.2: Teselado a partir del linkage de Bennett.

Considerando un vértice del origami y a sus correspondientes pliegues como un linkage esférico a la manera explicada (i.e. los pliegues como puntos de revolución y los paneles como aristas -al modo de las líneas de grafos-) se ha identificado que los vértices aislados pueden estudiarse como ensambles de linkages esféricos.

Esta aproximación fue estudiada de diversas formas, por ejemplo en [9] se investigó el método al revés, es decir, a raíz de una familia de ensambles móviles de 4R linkages esféricos formar el correspondiente patrón de origami rígido. Según consta en el mismo trabajo, basado en la equivalencia entre linkages y patrones de origami, se pueden proponer innovadores diseños de origami rígido.

Pero no solamente aparecen los linkages esféricos sino que, tal cual se investiga en [6], es posible también hacer una transición de un patrón de pliegues -en particular se estudió el caso de cuatro pliegues- al linkage de Bennett y, luego, un patrón multivértice a un ensamble de linkages de Bennett.



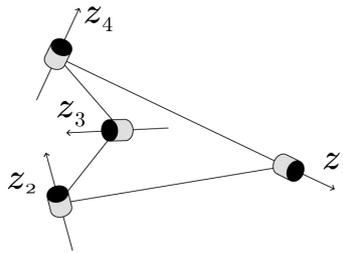


Figura 4.3: El linkage de Bennett apareciendo en un patrón de pliegue de un origami

Y hasta aquí llega nuestra exposición. Es posible que habiendo leído con atención el trabajo, este punto de unión que pretendió ser el tema de la monografía no resulte tan sorprendente. Una posibilidad es que no se haya entendido, ese sería nuestro lamento. La otra posibilidad es que se haya entendido, pero aún así no resulte sorprendente. Este es un caso favorable, pues pretendíamos que pese a que algunas partes requieran un desarrollo que esta monografía no tuvo a bien llevar a cabo, haya un recorrido entre linkages y origamis que lleve “naturalmente” hasta este punto de reunión.

Una última posibilidad, nuestro caso: a pesar de todo, sospechar en la pequeña grulla de papel que hemos aprendido a armar un ensamble de linkages, nos sigue resultando sorprendente.

4.3. Un último exceso

El mérito de este trabajo, si tuviese alguno, sería el de haber encontrado y cribado un maremágnum de bibliografía. Entre esa bibliografía se han encontrado algunas perlas; además de las seleccionadas y mencionadas, hay algunas de otra índole, unas perlas raras y curiosas. El libro *Rosas, Origami y Matemáticas* del mismísimo Kawasaki quien desarrolla en uno de sus capítulos una famosa rosa de origami que, dicen, inspiró la realización de una película checa (y, dicho sea de paso, la carátula de este trabajo). Pero esa no es la más graciosa. Entre los libros que saltaron hay uno titulado *Pornogami: Una guía del antiguo arte del papel plegado para adultos*. Hay más, pero quedarán en el misterio. También se produjo texto. Uno es este, la monografía, que se basa en la bibliografía más prudente. Para la otra, vaya este pequeño poema escrito a pedido por el Mariscal Sota:

Vértices

La descomposición de lo que se percibe sencillo,
monolítico, en un entramado difuso
de acciones superpuestas.
Un cúmulo de pliegues
sin ningún propósito
salvo contener puntos
que descubren geometrías
perdidas, grietas
que delatan un nombre. Hay arcilla
en cada vértice, extrae la forma
a un plano durmiente, esculpe
vigorosa
una entidad sobre tu mano.
Nudo-grulla-enlace
cuantos mundos hay en un ala
que no añora el cielo.
En ese cuerpo poblado
hay líneas que trazan
la distancia
entre un pico y un vientre.
Cada quien en su distancia
con el calor insuficiente
pero con la certeza de algo que se despliega
una lengua muy limitada, una línea
una conversación de robots tartamudos.
Un origami con tres valles
y una montaña.

de Pedro Antonio Sota Taier

Bibliografía

- [1] Mickaël Kourganoff. Geometry and dynamics of configuration spaces. Differential Geometry [math.DG]. Ecole normale supérieure de lyon - ENS LYON, 2015.
- [2] Emily Mackevicius. Configuration spaces. <http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGREREU2009.html>, 2009.
- [3] Thomas Hull. On the Mathematics of Flat Origamis. Congressus Numerantium, 1995.
- [4] Thomas Hull. Project Origami Activities for Exploring Mathematics. Taylor & Francis, 2006.
- [5] Z. You, Y. Chen. Motion structures deployable structural assemblies of mechanisms. CRC Press, 2012.
- [6] X. Zhang, Y. Chen. Mobile assemblies of Bennett linkages from four-crease origami patterns. Royal Society Mathematical, Physical and Engineering Sciences. <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rspa.2017.0621#d3e968>, 2018.
- [7] E. Demaine, J. O'Rourke. Geometric Folding Algorithms. Cambridge University Press, 2007.
- [8] Michael Farber. Invitation to Topological Robotics. European Mathematical Society, 2008.
- [9] Y. Chen et al. Mobile assemblies of four-spherical-4R-integrated linkages and the associated four-crease-integrated rigid origami patterns. ScienceDirect, 2019.
- [10] Alfred B. Kempe. How to draw a straight line; a lecture on linkages. London: Macmillan and Co, 1877.
- [11] M. Kapovich, J. J. Millson. Universality theorems for configuration spaces of planar linkages. Elsevier Topology 41, 2002.
- [12] Teorema de Sard. Wikipedia. Fecha de acceso: 10/06/2020. https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Sard.
- [13] Teoría de Morse. Wikipedia. Fecha de acceso: 10/06/2020. https://es.wikipedia.org/wiki/Teoria_de_Morse.
- [14] Coloración de grafos. Wikipedia. Fecha de acceso: 25/07/2020. https://es.wikipedia.org/wiki/Coloracion_de_grafos.

Apéndice A

Algunos resultados y definiciones útiles

Teorema 8. (de la Subvariedad implícita) Sea $f : M \rightarrow N$ suave. $q_0 \in N$ y $P = f^{-1}(q_0)$ y supongamos P no vacío. Si $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ es una suryección para todo $p \in P$ entonces existe una única estructura diferenciable P tal que (P, i) (i es la inclusión) es un embedding en M . Además $\dim P = \dim M - \dim N$.

Teorema 9. (de Sard) Sean M, N variedades diferenciables N_2 de dimensión m y n respectivamente. Y sea X el conjunto de puntos críticos de una función $C^k f : N \rightarrow M$ (que consiste en aquellos puntos donde el diferencial $df : TN \rightarrow TM$ tiene rango menor que m como transformación lineal). Entonces si $k \geq \max\{n - m + 1, 1\}$ entonces la imagen de X tiene medida cero como subconjunto de M .

Lema 1. (de Morse) Sea b un punto crítico no degenerado de $f : N \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces existe un gráfico (x_1, \dots, x_n) en un entorno U de b en el que $x_i(b) = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$ y $f(x) = f(b) - x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2$ en U , con k el índice de f en b .

Definición 13. Un subconjunto algebraico de \mathbb{R}^n es un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ tal que existe un $m \in \mathbb{N}$ y $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ un polinomio tal que $f^{-1}(0) = A$.

Un conjunto semialgebraico es una proyección de un conjunto algebraico. Más precisamente es un conjunto B tal que existe $N \geq n$ y un conjunto algebraico A de \mathbb{R}^N tal que $B = \pi(A)$ donde π es la proyección sobre las primeras n coordenadas de \mathbb{R}^N .

Definición 14. Una coloración de vértices para un grafo es la asignación de colores para cada vértice tal que cada vez que dos vértices compartan una arista tengan colores diferentes. Entonces diremos que un grafo es 2 vértice-coloreable si se puede colorear con 2 colores.