

Thus the chief reason for studying regular polyhedra is still the same as in the time of the Pythagoreans, namely, that their symmetrical shapes appeal to one's artistic sense.

H.M.S. Coxeter, *Regular Polytopes*

Introducción

En sus raíces históricas los grupos de reflexiones se remontan mucho antes de la aparición del concepto de grupo¹. En la Grecia Antigua estos pueden encontrarse en forma de estudios de la simetría o regularidad de ciertas figuras geométricas. Tratados como los *Elementos* de Euclides se encuentran entre las más importantes de estas investigaciones en este período.

Algunos aspectos de esta teoría también pueden entreverse en la Alta Edad Media en conexión con los teselados regulares del plano. Sobre estos escribe posteriormente Johannes Kepler constituyendo la primera exploración sistemática del tema. A pesar de la importancia de los resultados allí contenidos, este tratado fue ignorado durante casi tres siglos. Fue con el trabajo de Yevgraf Fiódorov en 1891 que se renueva el interés hasta el momento adormecido del tema.

Este junto con otros estudios previos en cristalografía terminan por consolidar el estudio de los grupos de reflexiones. Algunas décadas antes August Möbius y Édouard Goursat habían clasificado los grupos de reflexiones finitos en el espacio Euclideo de tres y cuatro dimensiones. Más adelante en un trabajo seminal Donald Coxeter clasifica los grupos de reflexiones, no necesariamente finitos, en dimension arbitraria. Este estudio publicado en 1934 marca el comienzo de una nueva etapa para esta área de las matemáticas. En efecto, es a partir de este que Coxeter extiende la noción de grupos de reflexiones a los grupos que hoy llevan su nombre.

Los grupos de reflexiones juegan en la teoría de las álgebras de Lie un papel central. Trabajos de Wilhelm Killing y Élie Cartan mostraron que el estudio de las álgebras de Lie semi-simples se reduce al de los sistemas de raíces asociados. A su vez cada uno de estos sistemas de raíces se corresponde con un grupo de reflexiones. Este es el llamado grupo de Weyl el cual es de vital importancia para diversas consideraciones teóricas.

Además de la recién mencionada, los grupos de reflexiones aparecen en conexión con multitud de áreas de las matemáticas. Notablemente, pero no limitados a estas, surjen también en el estudio de los grupos algebraicos y en la clasificación de singularidades en hipersuperficies. Los grupos de reflexiones constituyen una verdadera ubicuidad en la matemática moderna, donde se presentan en una variedad casi irrazonable de formas.

El principal objetivo de esta monografía es el de proporcionar una introducción a los grupos de reflexiones. El enfoque que se ha adoptado ha sido dividido en dos partes. En primer lugar se estudian arreglos de hiperplanos genéricos junto con diversas nociones asociadas. Se introducen aquí los conceptos básicos que serán de uso común en el resto de la monografía. Por otro lado, en la segun-

¹Las referencias históricas han sido tomadas de [2] principalmente.

da mitad se presenta el concepto de grupo de reflexiones propiamente. Allí se deducen diversas propiedades de estos grupos haciendo uso de las herramientas desarrolladas en la mitad anterior.

Se apunta también con esta monografía a motivar el estudio de grupos de Coxeter. Siguiendo el desarrollo histórico natural, se pretende aquí llegar a su definición partiendo de consideraciones puramente geométricas. Estudiados de esta manera muchas de sus propiedades generales se vuelven geoméricamente transparentes. Se espera entonces que quien así lo desee pueda continuar con el estudio de grupos de Coxeter teniendo en mente una imagen clara a la cual referirse.

Contenidos

1. Arreglos de Hiperplanos	6
1.1. Hiperplanos	6
1.2. Arreglos de Hiperplanos	7
1.3. Galerías	15
2. Grupos de Reflexiones	20
2.1. Reflexiones	20
2.2. Grupos de Reflexiones	21
A. Apéndice	33
Bibliografía	36

1 | Arreglos de Hiperplanos

1.1 | Hiperplanos

Se comienza definiendo la noción elemental de hiperplano a la vez que se introduce algo de terminología. También se estudian en esta sección algunas de sus propiedades topológicas que nos serán de utilidad en lo que sigue.

Denotaremos por $(\mathbf{E}, \langle -, - \rangle)$ a un espacio vectorial Euclídeo por el resto de la monografía. Recordemos esto es un espacio producto interno real de dimensión finita. Si el lector así lo prefiere, puede suponer que este es el espacio coordenado real sin pérdida alguna.

Un *hiperplano afín* en \mathbf{E} es un subespacio afín de codimensión uno. Esto es, un hiperplano afín es un subespacio afín de dimensión menor en uno a la del espacio ambiente. Usualmente nos referiremos a estos como hiperplanos, omitiendo la palabra afín.

Para un punto w en \mathbf{E} se define $\tau_w : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ como la traslación $x \mapsto x - w$ para cada x en \mathbf{E} . Usaremos esta notación a lo largo de la monografía.

Proposición 1.1.1. *Si H es un hiperplano, su complemento en \mathbf{E} posee exactamente dos componentes convexas.*

Demostración. Dado un punto h en H se tiene que $\tau_h(H)$ es un subespacio lineal en \mathbf{E} de codimensión uno. Tomando un vector no nulo v en \mathbf{E} ortogonal a $\tau_h(H)$ tenemos que

$$\mathbf{E} \sim \tau_h(H) = \{x \in \mathbf{E} : \langle x, v \rangle > 0\} \cup \{x \in \mathbf{E} : \langle x, v \rangle < 0\}.$$

Se puede comprobar fácilmente que ambos conjuntos en la unión son convexas.

Trasladando nuevamente, encontramos mediante algunas manipulaciones algebraicas que

$$\mathbf{E} \sim H = \{x \in \mathbf{E} : \langle \tau_h(x), v \rangle > 0\} \cup \{x \in \mathbf{E} : \langle \tau_h(x), v \rangle < 0\}.$$

Dado que las traslaciones preservan la convexidad, resulta que estos conjuntos son también convexas. Por lo tanto, el resultado queda probado. \square

Se llama *semiespacios* acotados por H a las componentes convexas del complemento en \mathbf{E} de este hiperplano. Dado que \mathbf{E} es localmente convexo, se tiene que estas componentes son además subconjuntos abiertos. Esto también es claro de la caracterización obtenida en la Proposición anterior.

Dos puntos en $\mathbf{E} \sim H$ se dicen *en el mismo lado* de H si pertenecen al mismo semiespacio acotado por este hiperplano. O bien equivalentemente si H no corta al segmento que los une. Por otro lado, dos puntos en $\mathbf{E} \sim H$ se dicen *en lados opuestos* de H si no yacen en el mismo lado de este hiperplano.

Tenemos que un subconjunto convexo A de $\mathbf{E} \sim H$ necesariamente yace en uno de los semiespacios acotados por este hiperplano. Denotamos por $\mathcal{D}_H(A)$ a dicho semiespacio y por $\overline{\mathcal{D}}_H(A)$ a su clausura. Es claro de la Proposición anterior que $\overline{\mathcal{D}}_H(A)$ es la unión de $\mathcal{D}_H(A)$ con el hiperplano que lo acota.

Antes de concluir esta sección recordemos una noción topológica. Un subconjunto de \mathbf{E} se dice *denso en ninguna parte* si el interior de su clausura es vacío. En particular los hiperplanos son densos en ninguna parte al ser cerrados y de interior vacío. Se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1.1.2. *Si A y B son subconjuntos en \mathbf{E} densos en ninguna parte, entonces su unión es densa en ninguna parte.*

Demostración. Dado U un entorno abierto de \mathbf{E} no vacío, tenemos que $U \sim \text{cl}(A)$ es no vacío. Más aún $U \sim \text{cl}(A)$ es nuevamente abierto y por lo tanto también $(U \sim \text{cl}(A)) \sim \text{cl}(B)$ es no vacío. Se tiene además que

$$(U \sim \text{cl}(A)) \sim \text{cl}(B) = U \sim (\text{cl}(A) \cup \text{cl}(B)) = U \sim \text{cl}(A \cup B).$$

Así para cada abierto U tenemos que $U \sim \text{cl}(A \cup B)$ es no vacío y por lo tanto $A \cup B$ es denso en ninguna parte. \square

Corolario. *La unión de una familia finita de hiperplanos tiene interior vacío.*

Demostración. Se sigue por inducción de la Proposición anterior. \square

1.2 | Arreglos de Hiperplanos

En esta sección se introducen los conceptos básicos que serán de uso común en el resto de la monografía. Se comienza por definir la noción de arreglos de hiperplanos¹. Luego se observa que estos inducen una partición de \mathbf{E} a la cual nos avocaremos a estudiar con detenimiento.

Esta sección es además el corazón técnico de la monografía. El trabajo que aquí se realiza se traduce en la simplicidad de los argumentos en las próximas secciones. Se ha seguido a [2] como referencia principal.

Un *arreglo de hiperplanos afines* en \mathbf{E} es una colección localmente finita de hiperplanos afines en \mathbf{E} . Esto significa que para cada punto en \mathbf{E} existe un entorno abierto que lo contiene e interseca a lo sumo a un número finito de hiperplanos en esta colección. De igual forma que antes, omitiendo la palabra afín, usualmente nos referiremos a estos como arreglos de hiperplanos. Denotaremos en lo que sigue por \mathcal{H} a un arreglo de hiperplanos fijo.

En la Figura 1.1 se ilustran a modo de ejemplo dos arreglos de hiperplanos en un espacio bidimensional. Ambos ejemplos deberían servir de referencia para contrastar los resultados que veremos en lo que sigue.

Dado un subconjunto A de \mathbf{E} denotaremos por $\mathcal{H}(A)$ a la familia de hiperplanos en \mathcal{H} que lo contienen. Denotaremos además por $\mathcal{H}^*(A)$ a la familia de hiperplanos en \mathcal{H} que no contienen a este subconjunto. Observamos que en particular para cada H en \mathcal{H} la familia $\mathcal{H}^*(H)$ es igual a $\mathcal{H} \sim \{H\}$ puesto que será usado frecuentemente.

Supongamos ahora que A es un subconjunto de \mathbf{E} conexo. Sea además \mathcal{K} una subfamilia del arreglo \mathcal{H} cuyos hiperplanos no lo intersecan. Denotaremos por $\mathcal{D}_{\mathcal{K}}(A)$ a la intersección de los semiespacios $\mathcal{D}_H(A)$ acotados por hiperplanos en esta subfamilia. Similarmente denotamos por $\overline{\mathcal{D}}_{\mathcal{K}}(A)$ a la intersección de las clausuras $\overline{\mathcal{D}}_H(A)$ de estos semiespacios.

Definiremos ahora una relación de equivalencia en \mathbf{E} como sigue:

Dos puntos en \mathbf{E} se definen relacionados si para cada hiperplano H en \mathcal{H} ambos puntos yacen en H o bien en el mismo lado de H .

¹Aunque [2] no los refiere de esta forma, el término *hyperplane arrangement* es de uso común en la literatura.

Es sencillo comprobar que esto en efecto define una relación de equivalencia. Llamaremos *facetas* de \mathbf{E} relativas a \mathcal{H} a las clases de equivalencia de esta relación. Si no hay ambigüedad respecto a \mathcal{H} las llamaremos sencillamente *facetas*.

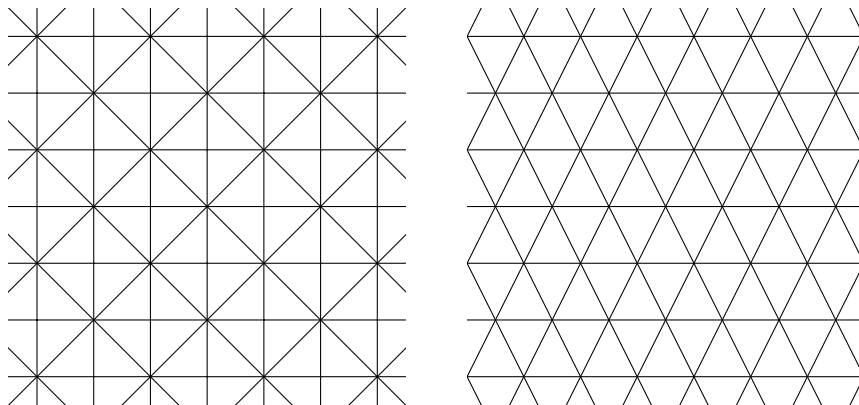


Figura 1.1

En la Figura 1.2 se ilustran las facetas de un arreglo formado por dos hiperplanos no paralelos en un espacio bidimensional. Estas consisten de cuatro sectores abiertos, cuatro semirectas abiertas con origen el punto de intersección y finalmente el punto de intersección mismo.

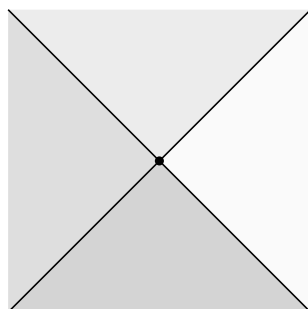


Figura 1.2

Es inmediato comprobar que un hiperplano en \mathcal{H} corta a una faceta F únicamente si la contiene. De esta observación se deduce que $\mathcal{H}(F)$ es la familia de hiperplanos en \mathcal{H} que cortan a esta faceta. Ahora, como \mathcal{H} es localmente finito, se tiene que $\mathcal{H}(F)$ consiste de un número finito de hiperplanos. Notar además que F yace a un lado de cada hiperplano en $\mathcal{H}^*(F)$ por definición.

Dada F una faceta de \mathbf{E} relativa a \mathcal{H} se llama el *soporte* de F a la intersección² de todos los hiperplanos en $\mathcal{H}(F)$. Observando que este es un subespacio afín, que denotaremos $\text{sop}(F)$ en adelante, definimos la *dimensión* de F como la dimensión de su soporte.

La siguiente Proposición nos provee una descripción precisa de las facetas y sus clausuras en términos de los hiperplanos que las definen.

²Se conviene que \mathbf{E} es la intersección sobre una familia vacía.

Proposición 1.2.1. *Si F es una faceta de \mathbf{E} relativa a \mathcal{H} entonces*

$$F = \mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(F)}(F) \cap \text{sop}(F).$$

Más aún se tiene que

$$\text{cl}(F) = \overline{\mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(F)}(F)} \cap \text{sop}(F).$$

Demostración. Como observamos antes, un hiperplano en \mathcal{H} contiene a la faceta F únicamente si la interseca. Por lo tanto, es claro que

$$F \subseteq \mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(F)}(F) \cap \text{sop}(F).$$

Por otro lado, es directo comprobar que dos puntos cualesquiera en el lado derecho están relacionados. En consecuencia se obtiene la otra contención.

Pasamos ahora a probar la segunda igualdad. Del resultado recién obtenido, ya que el lado derecho es un conjunto cerrado,

$$\text{cl}(F) \subseteq \overline{\mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(F)}(F)} \cap \text{sop}(F).$$

Tomemos un punto x en $\overline{\mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(F)}(F)} \cap \text{sop}(F)$ para ver la contención recíproca. Dado y en F entonces se cumple que $\text{sop}(F)$ contiene al segmento $[x, y]$ al ser el soporte un subespacio afín. Por otro lado, los hiperplanos en $\mathcal{H}^*(F)$ no separan a estos puntos en lados opuestos. Luego $\mathcal{D}_H(F)$ contiene al segmento semiabierto $(x, y]$ para cada hiperplano H en esta familia. De esto se deduce que F contiene a $(x, y]$ con lo que x en $\text{cl}(F)$. \square

De esta caracterización se obtienen los siguientes resultados.

Corolario. *Toda faceta es convexa y abierta en su propio soporte.*

Demostración. Una faceta F de \mathbf{E} relativa a \mathcal{H} es convexa al ser una intersección de conjuntos convexos, como se muestra en la Proposición anterior. También por la Proposición anterior, para probar que F es abierta en $\text{sop}(F)$ basta ver que $\mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(F)}(F)$ es abierto.

Dado que \mathcal{H} es localmente finito, se tiene que $\mathcal{H}^*(F)$ es también localmente finito. Luego el conjunto de puntos en \mathbf{E} que no pertenecen a ningún hiperplano en $\mathcal{H}^*(F)$ es abierto. Notar en particular que $\mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(F)}(F)$ está contenido en este conjunto. Por tanto, ya que \mathbf{E} es localmente convexo, un punto x de $\mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(F)}(F)$ está contenido en un entorno convexo V cuya intersección con los hiperplanos en $\mathcal{H}^*(F)$ es vacía. Luego, al ser convexo, este entorno está contenido en $\mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(F)}(F)$ de donde se deduce que este conjunto es abierto. \square

Corolario. *Si F y G son dos facetas de \mathbf{E} relativas a \mathcal{H} tales que $\text{cl}(F) \cap G$ es no vacío, entonces $\text{cl}(F)$ contiene a G .*

Demostración. Observar que G interseca a $\text{sop}(F)$ por la Proposición anterior. Ahora, como cada hiperplano en la familia $\mathcal{H}(F)$ contiene a dicho soporte se deduce que $\mathcal{H}(G)$ contiene a esta familia. En particular obtenemos la contención de los soportes

$$\text{sop}(G) \subseteq \text{sop}(F).$$

Observar además que $\mathcal{H}^*(F)$ contiene a $\mathcal{H}^*(G)$ tomando complementos. De la hipótesis se tiene que $\mathcal{D}_H(G) \cap \overline{\mathcal{D}_H(F)}$ es no vacío para cada H en $\mathcal{H}^*(G)$.

Luego debe cumplirse que $\overline{\mathcal{D}}_H(F)$ contiene a $\mathcal{D}_H(G)$ para cada hiperplano en esta familia. Finalmente, si H en $\mathcal{H}^*(F)$ es un hiperplano en $\mathcal{H}(G)$ notar que $\overline{\mathcal{D}}_H(F)$ contiene a este hiperplano. Por lo tanto obtuvimos

$$\overline{\mathcal{D}}_{\mathcal{H}^*(F)}(F) = \overline{\mathcal{D}}_{\mathcal{H}^*(G)}(F) \cap \overline{\mathcal{D}}_{\mathcal{H}^*(F) \cap \mathcal{H}(G)}(F) \supseteq \mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(G)}(G) \cap \text{sop}(G).$$

Combinando esta y la contención de los soportes, por la Proposición anterior, se obtiene el resultado. \square

La Proposición que sigue provee una útil caracterización de facetas contiguas que será usada en lo siguiente.

Proposición 1.2.2. *Sea F es una faceta de \mathbf{E} relativa a \mathcal{H} y L la intersección de una familia de hiperplanos en este arreglo. Entonces son equivalentes:*

- i. Existe una faceta G de soporte L tal que $\text{cl}(F) \cap G$ es no vacío.*
- ii. Existe una faceta G de soporte L contenida en $\text{cl}(F)$.*
- iii. Existe un punto en $\text{cl}(F) \cap L$ tal que L está contenido en cualquier hiperplano en \mathcal{H} al que este punto pertenezca.*

Demostración. La implicación $(i \rightarrow ii)$ es exactamente el Corolario anterior.

Para $(ii \rightarrow iii)$ basta tomar en G un punto cualquiera. En efecto G debe estar contenido en todo hiperplano en \mathcal{H} que contenga a este punto. Por lo tanto estos hiperplanos también deben contener a su soporte.

Finalmente, para $(iii \rightarrow i)$ consideremos la faceta G que contiene al punto aludido en la hipótesis. Es claro que $\text{cl}(F) \cap G$ es no vacío, con lo que resta comprobar la afirmación sobre su soporte. Para ello es suficiente observar que las familias $\mathcal{H}(G)$ y $\mathcal{H}(L)$ son iguales. En efecto, tenemos que todo hiperplano en $\mathcal{H}(G)$ debe contener a L por hipótesis. Recíprocamente, cada hiperplano en $\mathcal{H}(L)$ corta a G con lo que también lo contiene. De esto se concluye que

$$\text{sop}(G) = \bigcap_{H \in \mathcal{H}(G)} H = \bigcap_{H \in \mathcal{H}(L)} H = L,$$

lo que completa la prueba. \square

Nos concentraremos ahora en una clase particular de facetas. El estudio de estas será esencialmente lo que nos ocupe por el resto de esta sección.

Una *cámara* de \mathbf{E} relativa a \mathcal{H} se define a ser una faceta de \mathbf{E} relativa a \mathcal{H} de dimensión igual a la del espacio ambiente. En otras palabras, estas son facetas que ningún hiperplano en \mathcal{H} contiene. Si no hay ambigüedad respecto a \mathcal{H} las llamaremos sencillamente cámaras.

Sea \mathbf{G} el subconjunto abierto formado por los puntos en \mathbf{E} que ningún hiperplano de \mathcal{H} contiene. Observemos que cada faceta contenida en \mathbf{G} es una cámara. En efecto, esto pues una faceta corta a un hiperplano en \mathcal{H} únicamente cuando este la contiene. Entonces de esta forma se tiene que \mathbf{G} queda particionado en cámaras. Más aún, al ser las cámaras conexas, se cumple que estas son exactamente las componentes conexas de este subconjunto.

Observar que si C es una cámara \mathbf{E} relativa a \mathcal{H} entonces la Proposición 1.2.1 implica que

$$C = \mathcal{D}_{\mathcal{H}}(C), \quad \text{cl}(C) = \overline{\mathcal{D}}_{\mathcal{H}}(C). \quad (1.2.1)$$

En la Proposición 1.2.5 obtendremos una descripción más precisa de las cámaras en términos de los hiperplanos que las ciñen, sus muros.

En la Figura 1.1 las cámaras del arreglo \mathcal{H} consisten del interior de los triángulos que teselan el espacio. Por otra parte, su clausura está formada a la vez por el interior y el borde del triángulo. Observemos entonces que todo punto del plano pertenece a la clausura de alguna cámara. Como muestra la siguiente Proposición, este es un hecho general.

Proposición 1.2.3. *Todo punto en \mathbf{E} pertenece a la clausura de al menos una cámara.*

Demostración. Consideremos x en \mathbf{E} un punto arbitrario junto con una base local \mathcal{F} de este punto. Podemos suponer que los entornos en esta base forman un conjunto totalmente ordenado respecto a la inclusión. Esto pues \mathbf{E} satisface el Primer Axioma de Numerabilidad como espacio topológico.

Sea ahora \mathcal{K} la colección de hiperplanos en \mathcal{H} que intersecan algún entorno de la base. Dado que \mathcal{H} es localmente finito podemos suponer que \mathcal{K} es finito. Luego, por el Corolario de la Proposición 1.1.2, para cada U en \mathcal{F} se tiene

$$U \not\subseteq \bigcup_{H \in \mathcal{K}} H. \quad (*)$$

Por lo tanto todo entorno U en \mathcal{F} interseca a alguna cámara. En efecto (*) afirma que existen puntos en U que ningún hiperplano en \mathcal{H} contiene. Denotemos por \mathcal{C}_U al conjunto de cámaras a las que U en \mathcal{F} interseca.

Podemos asumir al ser \mathbf{E} localmente convexo que los entornos en \mathcal{F} son convexos. Observemos que así para cada U en \mathcal{F} el conjunto \mathcal{C}_U es finito. En efecto si C en \mathcal{C}_U entonces para cada hiperplano H en $\mathcal{H} \sim \mathcal{K}$ se tiene que

$$\mathcal{D}_H(C) = \mathcal{D}_H(U).$$

Por lo tanto si C y D son dos cámaras en \mathcal{C}_U tales que $\mathcal{D}_H(C)$ es distinto a $\mathcal{D}_H(D)$ para algún H en \mathcal{H} entonces \mathcal{K} contiene a este hiperplano. Dado que \mathcal{K} es finito, de la caracterización (1.2.1) se deduce que \mathcal{C}_U es finito.

Nuestra hipótesis inicial sobre \mathcal{F} implica que $\{\mathcal{C}_U : U \in \mathcal{F}\}$ es un orden total respecto a la inclusión. Notemos que esta familia posee un mínimo al ser los conjuntos que la conforman finitos. Ahora dada una cámara C en el mínimo, para cada U en \mathcal{F} la intersección $C \cap U$ es no vacía. Así finalmente x en $\text{cl}(C)$ al ser \mathcal{F} una base local de este punto. \square

Si C es una cámara de \mathbf{E} relativa a \mathcal{H} se define una *cara* de C como una faceta de \mathbf{E} relativa a \mathcal{H} contenida en $\text{cl}(C)$ cuyo soporte es un hiperplano. Por otro lado, un *muro* de C es un hiperplano que es el soporte de una de sus caras.

Observemos que si F es una cara de C entonces por la Proposición 1.2.1 se tiene que

$$F = \mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(F) \cap H$$

donde H en \mathcal{H} es su soporte. Por otro lado $\text{cl}(C)$ contiene a F con lo que, al ser $\mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(F)$ abierto, se deduce que C corta a este entorno. Así F y C yacen al mismo lado de cada hiperplano en $\mathcal{H}^*(H)$. Reescribiendo la expresión anterior

$$F = \mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(C) \cap H. \quad (1.2.2)$$

Es claro que cada muro de C pertenece a \mathcal{H} por definición . Más aún se tiene que cada muro de C es el soporte de solo una de sus caras. Se cumple además, como se muestra en la siguiente Proposición, una afirmación recíproca.

Proposición 1.2.4. *Todo hiperplano en \mathcal{H} es el muro de al menos una cámara.*

Demostración. Consideremos un hiperplano H en \mathcal{H} cualquiera. Trasladando el arreglo de ser necesario, podemos suponer que este hiperplano contiene al origen. Observemos entonces que dicho hiperplano es un espacio Euclídeo en si mismo, que denotaremos por \mathbf{F} momentáneamente.

Notemos que si K en $\mathcal{H}^*(\mathbf{F})$ es tal que $K \cap \mathbf{F}$ es no vacío, entonces $K \cap \mathbf{F}$ es un hiperplano en \mathbf{F} . Denotemos por \mathcal{K} a la colección de estos hiperplanos. Observemos que \mathcal{K} forma en \mathbf{F} un arreglo de hiperplanos. En efecto, puesto que \mathcal{H} es localmente finito en \mathbf{E} se tiene que \mathcal{K} es localmente finito en \mathbf{F} .

Observemos que todo entorno abierto no vacío V en \mathbf{F} contiene un punto que ningún hiperplano en \mathcal{K} contiene. Efectivamente al ser este arreglo localmente finito se tiene por el Corolario de la Proposición 1.1.2 que

$$V \not\subseteq \bigcup_{K \in \mathcal{K}} K .$$

Volvemos ahora a la notación inicial. Se demostró que todo entorno abierto no vacío en H contiene un punto al que ningún hiperplano en $\mathcal{H}^*(H)$ contiene. Tomemos un punto cualquiera de estas características. Por la Proposición anterior, este debe estar contenido en la clausura de alguna cámara. Finalmente, la implicación (*iii* \rightarrow *ii*) de la Proposición 1.2.2 nos dice que H debe ser un muro de esta cámara. \square

Observemos que en el curso de la prueba obtuvimos el siguiente resultado.

Corolario. *Todo abierto en un hiperplano H en \mathcal{H} contiene un punto que no pertenece a ningún hiperplano en $\mathcal{H}^*(H)$.*

Como adelantamos, es posible describir una cámara en forma similar a (1.2.1) en términos de sus muros. Más aún esta descripción es mínima en el sentido que precisamos en la próxima Proposición. Antes necesitaremos los dos Lemas que siguen.

Lema 1.2.1. *Un hiperplano H en \mathcal{H} es un muro de una cámara C de \mathbf{E} relativa a \mathcal{H} si y solo si $\text{cl}(C) \cap H$ tiene en H interior no vacío.*

Demostración. Si H es un muro de C entonces por (1.2.2) se tiene que

$$\mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(C) \cap H \subseteq \text{cl}(C) \cap H .$$

Por lo tanto, dado que el lado izquierdo es abierto, tenemos que $\text{cl}(C) \cap H$ tiene en H interior no vacío.

Supongamos ahora que $\text{cl}(C) \cap H$ tiene en H interior no vacío. Entonces, por el Corolario de la Proposición anterior, existe un punto en $\text{cl}(C) \cap H$ que ningún hiperplano en $\mathcal{H}^*(H)$ contiene. Luego, por la implicación (*iii* \rightarrow *ii*) de la Proposición 1.2.2 se tiene que H es un muro de C . \square

La relevancia del resultado anterior es que caracteriza a los muros de una cámara en forma independiente al arreglo de hiperplanos. Veremos como esto juega un papel importante en la Proposición que sigue.

Lema 1.2.2. *Un hiperplano H en \mathcal{H} es un muro de una cámara C de \mathbf{E} relativa a \mathcal{H} si y solo si*

$$C \subsetneq \mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(C).$$

Demostración. En primer lugar observemos que (1.2.1) implica que

$$C \subseteq \mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(C). \quad (*)$$

Supongamos que H es un muro de C en primer lugar. Por la implicación (*ii* \rightarrow *iii*) de la Proposición 1.2.2 existe un punto en $\text{cl}(C) \cap H$ que ningún hiperplano en $\mathcal{H}^*(H)$ contiene. Por otro lado (1.2.1) implica que

$$\text{cl}(C) \subseteq \overline{\mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(C)},$$

de donde $\overline{\mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(C)}$ contiene a este punto. De esta forma $\mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(C)$ debe contener al punto en mención. Dado que H también lo contiene, este no pertenece a C con lo que $\mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(C) \sim C$ es no vacío.

Supongamos recíprocamente que vale en (*) la igualdad. Entonces necesariamente $\mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(C) \cap H$ debe de ser vacío. Por lo tanto de (1.2.2) se deduce que H no es un muro de C . \square

Ahora estamos en condiciones de probar el siguiente resultado.

Proposición 1.2.5. *Si C es una cámara de \mathbf{E} relativa a \mathcal{H} y denotamos por \mathcal{M} a la colección de sus muros, entonces*

$$C = \mathcal{D}_{\mathcal{M}}(C).$$

Más aún, se cumple que \mathcal{M} está contenido en toda subfamilia de \mathcal{H} con esta propiedad.

Demostración. Sea \mathcal{L} una colección de hiperplanos en \mathcal{H} tal que

$$C = \mathcal{D}_{\mathcal{L}}(C). \quad (*)$$

Veamos en primer lugar que \mathcal{M} está contenido en esta colección. En efecto, si H en $\mathcal{H} \sim \mathcal{L}$ entonces $\mathcal{H}^*(H)$ contiene a \mathcal{L} con lo que

$$C \subseteq \mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(C) \subseteq \mathcal{D}_{\mathcal{L}}(C).$$

Entonces por (*) todas estas contenciones son igualdades. Por lo tanto H no es un muro de C en virtud del Lema anterior. Luego se cumple que \mathcal{L} contiene a \mathcal{M} como queríamos.

Procedemos ahora a demostrar que efectivamente \mathcal{M} satisface la igualdad en el enunciado. Supongamos que \mathcal{L} es cualquier colección de hiperplanos en \mathcal{H} tal que (*) se satisface. Notemos que C es una cámara de \mathbf{E} relativa a \mathcal{L} en primer lugar. En efecto, ningún hiperplano en \mathcal{L} interseca a este conjunto que es además convexo. Por lo tanto C está contenido en alguna cámara de \mathbf{E} relativa a \mathcal{L} que denotaremos por C' un momento. Se tiene que C y C' yacen en el mismo lado de cada hiperplano en \mathcal{L} con lo que por (*) deben ser iguales.

Ahora, si H es un hiperplano en $\mathcal{L} \sim \mathcal{M}$ del Lema 1.2.1 se deduce que $\text{cl}(C) \cap H$ tiene en H interior vacío. En virtud del mismo resultado aplicado a \mathcal{L} junto con Lema anterior se tiene que

$$C = \mathcal{D}_{\mathcal{L}^*(H)}(C).$$

De esta forma podemos “quitar” de \mathcal{L} hiperplanos que no pertenezcan a \mathcal{M} de uno a la vez. En efecto, un argumento inductivo demuestra que

$$C = \mathcal{D}_{\mathcal{L} \sim \mathcal{F}}(C) \quad (**)$$

para cualquier colección finita \mathcal{F} de hiperplanos en $\mathcal{L} \sim \mathcal{M}$.

Por otro lado (1.2.1) claramente implica que

$$C \subseteq \mathcal{D}_{\mathcal{M}}(C).$$

Veamos ahora que podemos quitar un número finito de hiperplanos en $\mathcal{H} \sim \mathcal{M}$ de forma que $(**)$ implique la igualdad. Consideremos un segmento $[x, y]$ con extremos en C y en $\mathcal{D}_{\mathcal{M}}(C)$ respectivamente. Ya que \mathcal{H} es localmente finito, este segmento puede ser recubierto por abiertos que intersecan a lo sumo finitos de hiperplanos en el arreglo. Más aún, este segmento es compacto y por lo tanto admite un subcobrimiento finito. Así tenemos que $[x, y]$ interseca solo una colección finita \mathcal{F} de hiperplanos en \mathcal{H} .

Observemos que cada hiperplano en \mathcal{F} separa a los extremos del segmento. Ya que ningún muro en \mathcal{M} separa a estos puntos, tenemos que \mathcal{F} no contiene a ninguno de estos. Luego por $(**)$ se deduce que

$$C = \mathcal{D}_{\mathcal{H} \sim \mathcal{F}}(C).$$

Por otro lado, para cada hiperplano en $\mathcal{H} \sim \mathcal{F}$ ambos extremos del segmento yacen en el mismo lado. Entonces de la igualdad anterior tenemos que y en C con lo que C contiene a $\mathcal{D}_{\mathcal{M}}(C)$. Esto concluye la prueba de la Proposición. \square

Antes de finalizar esta sección, probaremos el siguiente resultado que nos será útil en la siguiente sección.

Proposición 1.2.6. *Toda faceta F de \mathbf{E} relativa a \mathcal{H} de codimensión uno es la cara de exactamente dos cámaras.*

Demostración. Supongamos que H en \mathcal{H} es el hiperplano que F tiene por soporte. Denotemos por \mathcal{D}_H a uno de los semiespacios que este hiperplano acota. Observemos en primer lugar que $\mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(F) \cap \mathcal{D}_H$ es no vacío. Por la Proposición 1.2.1 tenemos que

$$F = \mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(F) \cap H, \quad (*)$$

de donde $\mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(F) \cap H$ es no vacío. Luego, puesto que $\text{cl}(\mathcal{D}_H)$ contiene a H se deduce la afirmación. Denotemos por C a la intersección $\mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(F) \cap \mathcal{D}_H$ momentáneamente.

Notemos que C es una faceta de \mathbf{E} relativa a \mathcal{H} por definición. Más aún, esta no interseca ningún hiperplano en \mathcal{H} con lo que debe de ser una cámara. Más aún $(*)$ implica que $\text{cl}(C)$ contiene a F con lo que F es una cara de C .

Podemos aplicar el mismo razonamiento intercambiando \mathcal{D}_H por el semiespacio complementario. De esta forma se prueba la existencia de una segunda cámara que tiene a esta faceta por cara.

Supongamos que D es otra cámara de \mathbf{E} relativa a \mathcal{H} que tiene a F por cara. Podemos asumir que \mathcal{D}_H y $\mathcal{D}_H(D)$ son iguales sin pérdida de generalidad. Entonces, como se notó en la deducción de (1.2.2) se tiene que

$$\mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(D) = \mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(F).$$

Luego, por la definición de C obtenemos

$$D = \mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(D) \cap \mathcal{D}_H = \mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(F) \cap \mathcal{D}_H = C.$$

Por lo tanto solo dos cámaras comparten una misma cara. Mas aún, estas quedan determinadas por el lado de su soporte en el que yacen. \square

1.3 | Galerías

En esta sección se introduce el concepto de galería. Este es un análogo discreto de la noción de curva estudiada en geometría. La diferencia es ahora los caminos ocurren entre cámaras adyacentes de un arreglo de hiperplanos. En particular se estudia una clase de ellas que juega un papel análogo al de las geodésicas. Para esta sección se han adaptado los resultados de [3] al caso afín que aquí nos compete.

Sea \mathcal{H} un arreglo de hiperplanos y sean C y D dos cámaras de \mathbf{E} relativas a este arreglo. Dado un hiperplano H en \mathcal{H} se dice que C y D son *adyacentes* a través de H si comparten una cara que tenga por soporte a este hiperplano. Esto lo denotaremos como sigue:

$$C \Big|_H D.$$

Por otro lado C y D se dicen *adyacentes a secas* si existe un hiperplano en \mathcal{H} a través del cual ambas cámaras son adyacentes. Esto se denotará simplemente como:

$$C \Big| D.$$

Notar que en particular toda cámara es adyacente a si misma. Por la Proposición 1.2.6 dos cámaras distintas son adyacentes si y solo si comparten una cara y yacen en lados opuestos de su soporte.

Una *galería* Γ es upla (C_0, \dots, C_n) de cámaras de \mathbf{E} relativas a \mathcal{H} tales que

$$C_{i-1} \Big| C_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

donde n en \mathbb{N}_0 . Para $0 \leq i \leq n$ denotaremos por $\Gamma^{(i)}$ a la i -ésima cámara que conforma esta upla. Diremos además que Γ *conecta* a las cámaras en sus extremos. Más aún el índice de la última cámara se llamará la *longitud* de la galería, que denotaremos $\ell(\Gamma)$ en adelante. Observar que este es el número de veces que Γ atraviesa un hiperplano en su recorrido.

En la Figura 1.3 se ilustran dos galerías en uno de los arreglos de hiperplanos considerados en la sección anterior. A lo largo de esta sección nos referiremos varias veces a estos ejemplos para brindar apoyo visual a la teoría.

Nuestro próximo objetivo es probar que dos cámaras cualesquiera pueden conectarse por una galería. Es necesario, a este propósito, introducir antes algunos conceptos y terminología. Si se pone atención se notará que ya nos hemos referido a algunos de estos en la sección anterior de forma implícita.

Dadas dos cámaras de \mathbf{E} relativas a \mathcal{H} diremos que un hiperplano en \mathcal{H} las *separa* si estas yacen en lados opuestos de este hiperplano. Notemos que *a priori* el conjunto de hiperplanos en \mathcal{H} que separan a dos cámaras no tiene por qué ser finito. Sin embargo, como se ve en la Proposición que sigue, la propiedad de finitud local de \mathcal{H} garantiza que este es el caso.

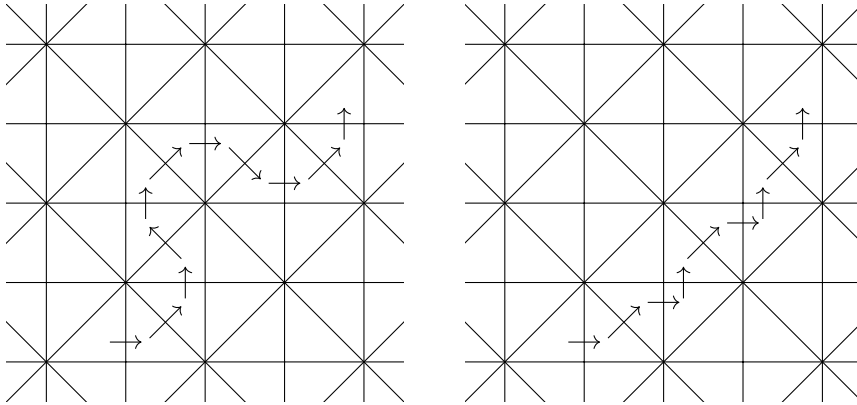


Figura 1.3

Proposición 1.3.1. *Solo un número finito de hiperplanos en \mathcal{H} separa a dos cámaras C y D de \mathbf{E} relativas a \mathcal{H} .*

Demostración. Consideremos un segmento $[x, y]$ con extremos en C y en D respectivamente. Ya que \mathcal{H} es localmente finito, este puede ser recubierto por abiertos que intersecan a lo sumo finitos hiperplanos en el arreglo. Más aún, este segmento es compacto con lo que admite un subcubrimiento finito. Así tenemos que $[x, y]$ interseca solo una colección finita \mathcal{F} de hiperplanos en \mathcal{H} .

Observemos que únicamente los hiperplanos en \mathcal{F} separan a los extremos de este segmento. Puesto que estos son puntos en C y D se tiene que únicamente los hiperplanos en \mathcal{F} separan a estas cámaras. Al ser esta colección finita se deduce el resultado. \square

Denotamos por $d(C, D)$ al número de hiperplanos en \mathcal{H} que separan a estas cámaras. Observemos que la prueba de la Proposición contiene un resultado adicional. Esto es, de la demostración se deduce que $d(C, D)$ es igual al número de hiperplanos en \mathcal{H} que cortan cualquier segmento que una a estas cámaras.

En la Figura 1.4 se observa un ejemplo concreto de la situación recién descrita. Trazando un segmento entre C y D se ve que los hiperplanos que este atraviesa son exactamente aquellos que separan ambas cámaras.

Lema 1.3.1. *Dos cámaras distintas C y D de \mathbf{E} relativas a \mathcal{H} son adyacentes si y solo si un único hiperplano en \mathcal{H} las separa.*

Demostración. Supongamos que C y D son cámaras adyacentes. Denotemos además por H al soporte de la cara que comparten. Se vio en la prueba de la Proposición 1.2.6 que

$$\mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(C) = \mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(D).$$

Así ningún hiperplano en $\mathcal{H}^*(H)$ separa a estas cámaras. Por otro lado, al ser distintas (1.2.1) implica que H las separa.

Recíprocamente supongamos que un único hiperplano H en \mathcal{H} separa a estas cámaras. Entonces tenemos que

$$\mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(C) = \mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(D). \quad (*)$$

Luego, ya que C y D son disyuntas, por el Lema 1.2.2 se tiene que H es un muro de ambas cámaras. Por lo tanto cada una de estas cámaras tiene una cara con soporte este hiperplano. Precisamente, por (1.2.2) se tiene que $\mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(C) \cap H$ es una cara de C y $\mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(D) \cap H$ es una cara de D . Entonces por (*) ambas caras son iguales de donde C y D son adyacentes. \square

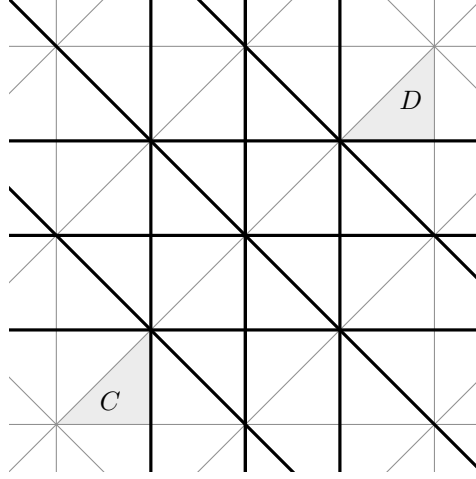


Figura 1.4

Con este Lema estamos en condiciones de probar el resultado que adelantamos antes.

Proposición 1.3.2. *Cualesquiera dos cámaras C y D de \mathbf{E} relativas a \mathcal{H} pueden ser conectadas por una galería de longitud $d(C, D)$.*

Demostración. Procedemos por inducción en $d(C, D)$ el número de hiperplanos que separan ambas cámaras. Toda cámara es adyacente a si misma y por lo tanto puede conectarse por una galería de longitud cero.

Si $d(C, D)$ es positivo, ambas C y D son distintas. Luego por la Proposición 1.2.5 ha de existir un muro H de C que las separe. Más aún, por la Proposición 1.2.6 existe una cámara C' adyacente a C a través de este muro. Observemos entonces que

$$d(C', D) = d(C, D) - 1$$

En efecto, por el Lema anterior, para cada hiperplano K en $\mathcal{H}^*(H)$ se tiene que $\mathcal{D}_K(C)$ y $\mathcal{D}_K(C')$ son iguales. Así un hiperplano K en $\mathcal{H}^*(H)$ separa a C' y D si y únicamente si a C y D también las separa. Por otro lado, tanto C y C' como C y D yacen respecto a H en lados opuestos. Así se tiene que $\mathcal{D}_H(C)$ y $\mathcal{D}_H(C')$ son iguales, lo que prueba la afirmación.

De esta forma obtenemos una galería de longitud $d(C', D)$ que conecta C' y D por hipótesis inductiva. Ya que C y C' son adyacentes, adjuntando C a esta galería se obtiene una nueva que conecta C y D de longitud $d(C, D)$. \square

Observemos que ninguna galería que conecta C y D es de menor longitud. En efecto, sea Γ una galería cualquiera que conecta ambas cámaras. Sea además H en \mathcal{H} un hiperplano que esta no atraviesa en su recorrido. Notemos entonces

que C y D no son separadas por este hiperplano. Efectivamente, aplicando el Lema 1.3.1 a las cámaras adyacentes se tiene que

$$\mathcal{D}_H(C) = \mathcal{D}_H(\Gamma^{(0)}) = \dots = \mathcal{D}_H(\Gamma^{(\ell(\Gamma))}) = \mathcal{D}_H(D).$$

De esta forma Γ atraviesa a cada hiperplano en \mathcal{H} que separa a C y D . Por lo tanto $d(C, D)$ es menor o igual a $\ell(\Gamma)$ como queríamos. Una galería se dirá *minimal* si es de longitud mínima entre las galerías que conectan a sus extremos.

Observemos que la galería en el lado derecho de la Figura 1.3 es minimal. En efecto, en la Figura 1.4 remarcamos aquellos hiperplanos que separan a C y D . Comparando estos con los que la galería atraviesa encontramos que son los mismos. Este es el contenido de la Figura 1.5.

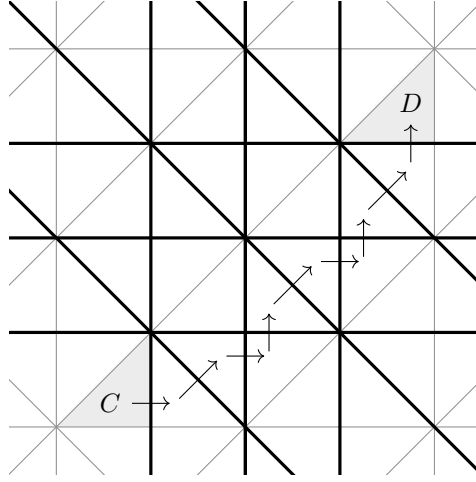


Figura 1.5

Por esta razón $d(C, D)$ se suele llamar la *distancia combinatoria* entre C y D en la literatura. Una galería minimal debería pensarse como el análogo discreto de una geodésica. En efecto, una tal galería atraviesa exactamente aquellos hiperplanos en \mathcal{H} que cortan a cualquier segmento que una a sus extremos.

De nuestras observaciones anteriores se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 1.3.3. *Una galería Γ es minimal si y solo no atraviesa ningún hiperplano en \mathcal{H} más de una vez.*

Demostración. Sean C y D las cámaras de \mathbf{E} relativas a \mathcal{H} en los extremos de esta galería. Como vimos recién Γ atraviesa a cada hiperplano en \mathcal{H} que separa estas cámaras al menos una vez. Si Γ es minimal tiene longitud $d(C, D)$ con lo que atraviesa solo a estos hiperplanos exactamente una vez.

Por otro lado, supongamos que Γ atraviesa un hiperplano H en \mathcal{H} solo una vez. Esto es, supongamos existe un único $1 \leq i \leq \ell(\Gamma)$ tal que

$$\Gamma^{(i-1)} \Big|_H \Gamma^{(i)}.$$

Entonces necesariamente C y D son separadas por este hiperplano. En efecto, por el Lema 1.3.1 se tiene que

$$\mathcal{D}_H(C) = \dots = \mathcal{D}_H(\Gamma^{(i-1)}) \neq \mathcal{D}_H(\Gamma^{(i)}) = \dots = \mathcal{D}_H(D).$$

Luego si Γ no atraviesa ningún hiperplano en \mathcal{H} más de una vez, tiene longitud $d(C, D)$ con lo que es minimal. \square

Notemos que esta Proposición implica que la galería en el lado izquierdo de la Figura 1.3 no es minimal. En efecto, como puede verse en la Figura 1.6 esta atraviesa un hiperplano dos veces.

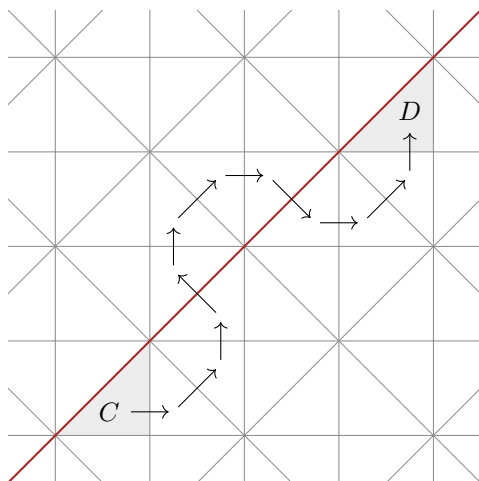


Figura 1.6

Por último, observemos que las cámaras adyacentes en una galería minimal son distintas. En general, diremos que una galería es *no vacilante* si satisface esta propiedad. Esto es, las cámaras adyacentes en una galería no vacilante son distintas.

2 | Grupos de Reflexiones

2.1 | Reflexiones

Se estudian en esta sección reflexiones a través de los hiperplanos que nos han ocupado en el capítulo anterior. Denotaremos en lo que sigue por $\mathcal{I}(\mathbf{E})$ al grupo de isometrías de \mathbf{E} en sí mismo. Se recuerda además que cada una de estas isometrías es en particular una transformación afín.

Una *reflexión* en \mathbf{E} es una isometría en $\mathcal{I}(\mathbf{E})$ tal que sus puntos fijos conforman un hiperplano. Llamaremos a este el *hiperplano de reflexión* o *hiperplano reflectante* de esta reflexión. Además, denotaremos por $\mathcal{R}(\mathbf{E})$ al conjunto de todas las reflexiones en \mathbf{E} .

No es claro a primera vista como esta definición se corresponde con la noción intuitiva de reflexión. Es por ello que a continuación se dará una formulación alternativa del concepto, la cual debería ser más amena a la intuición.

Sea ρ en $\mathcal{R}(\mathbf{E})$ con H por hiperplano reflectante. Supongamos en primer lugar que este hiperplano contiene al origen. Entonces se tiene que la reflexión a través de este es sencillamente una transformación ortogonal. En particular, dado x en H^\perp tenemos que

$$\langle \rho(x), y \rangle = \langle \rho(x), \rho(y) \rangle = \langle x, y \rangle = 0$$

para todo y en H . Entonces H^\perp es invariante por esta transformación. Más aún, puesto que su dimensión es igual a uno, este es además un autoespacio. Su autovalor asociado debe ser más o menos uno al ser la transformación ortogonal. Sin embargo, el primer caso no puede darse ya que entonces esta transformación sería la identidad. Luego si v en H^\perp es un vector unitario tenemos que

$$\rho(x) = x - 2\langle x, v \rangle v \tag{2.1.1}$$

para todo x en \mathbf{E} .

De esta expresión observemos que toda reflexión queda determinada por su hiperplano reflectante, en caso de que este contenga al origen. Como veremos a continuación, esta afirmación es válida en general. Notar además que usando la misma fórmula es posible definir una reflexión a través cualquier hiperplano que contenga al origen.

Consideremos ahora el caso de una reflexión arbitraria eliminando nuestra hipótesis sobre el hiperplano reflectante. Dado un punto h en H observemos que $\tau_h \circ \rho \circ \tau_{-h}$ es una reflexión con $\tau_h(H)$ como hiperplano reflectante. Puesto que este contiene al origen, tomando v en $\tau_h(H)^\perp$ un vector unitario, por (2.1.1) se tiene que

$$\rho(x) = x - 2\tau_{-h}(\langle \tau_h(x), v \rangle v) \tag{2.1.2}$$

para todo x en \mathbf{E} .

Dado que $\tau_h(H)$ no depende del punto h en H elegido, esta reflexión queda determinada por su hiperplano reflectante. Como antes, usando la misma fórmula es posible definir una reflexión a través de cualquier hiperplano. En adelante denotaremos por ρ_H a la reflexión a través de un hiperplano H .

Observemos que toda reflexión es su propia inversa, es decir una involución. Esto se comprueba fácilmente mediante (2.1.1) para reflexiones del tipo allí

discutido. Puesto que toda reflexión es conjugada de alguna de estas, se cumple lo deseado. Se concluye esta sección con el siguiente resultado.

Proposición 2.1.1. *Toda reflexión permuta los semiespacios acotados por su hiperplano de reflexión.*

Demostración. Esto es inmediato de la caracterización obtenida en la Proposición 1.1.1 junto con la fórmula (2.1.2). \square

2.2 | Grupos de Reflexiones

En esta sección se introduce el objeto de esta monografía, los grupos de reflexiones. Se observa que estos grupos tienen asociado un arreglo de hiperplanos como los antes trabajados. Esto permite hacer uso de todas las herramientas desarrolladas para probar diversas propiedades sobre ellos. Se ha seguido a [3] y [5] como referencias principales.

Se recomienda a quien lea revisar el Apéndice antes de continuar con esta sección. En efecto, aunque los temas allí tratados le sean conocidos, también se introduce notación que será aquí usada sin aclaración.

Dada \mathcal{H} una colección de hiperplanos, denotemos por W al subgrupo de $\mathcal{I}(\mathbf{E})$ generado por las reflexiones a través de estos. Diremos que W es un grupo de reflexiones si se satisfacen las siguientes dos condiciones:

R1. Para cada σ en W y cada H en \mathcal{H} el hiperplano $\sigma(H)$ pertenece a \mathcal{H} ;

R2. Para cualesquiera dos subconjuntos compactos K y L de \mathbf{E} el conjunto de isometrías σ en W tales que $\sigma(K)$ interseca a L es a lo sumo finito.

La condición (*R2*) es equivalente a la siguiente afirmación:

R2'. Para todo x en \mathbf{E} la órbita $\text{Orb}_W(x)$ es un subconjunto discreto de \mathbf{E} con la topología inducida.

Así esta condición impide la existencia de “operaciones infinitesimales” en estos grupos. Dado que no será necesaria en desarrollos posteriores, no se dará la prueba de esta equivalencia. Sin embargo, puesto que no presenta gran dificultad, se anima al lector a completarla.

Dado un subgrupo W de $\mathcal{I}(\mathbf{E})$ generado por reflexiones, es posible elegir una colección de hiperplanos \mathcal{H} tal que (*R1*) se satisfaga. En efecto, tomando \mathcal{H} de forma que H en \mathcal{H} si y solo si ρ_H en W se tiene

$$\rho_{\sigma(H)} = \sigma \circ \rho_H \circ \sigma^{-1}$$

para cada σ en W . Por lo tanto $\sigma(H)$ pertenece a \mathcal{H} con lo que (*R1*) se satisface.

En particular, todo subgrupo finito de $\mathcal{I}(\mathbf{E})$ generado por reflexiones es un grupo de reflexiones. Veamos algunos ejemplos concretos.

Ejemplo 2.2.1. Consideremos en \mathbb{R}^2 dos rectas que se intersecan en un ángulo de π/n para algún n en \mathbb{N} mayor que uno. Denotemos por ρ y τ a las reflexiones a través de estas rectas. Entonces la composición $\rho \circ \tau$ es una rotación en un ángulo de $2\pi/n$ con lo que es de orden finito. En particular, de la observación anterior, el grupo que generan ambas reflexiones es un grupo de reflexiones.

Como probablemente es conocido para el lector, este es el grupo de simetrías de un polígono regular de n lados. En la Figura 2.1 se ilustra esta situación.

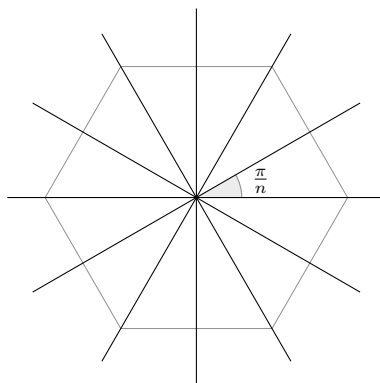


Figura 2.1

Observemos que si ambas rectas se intersecan en un múltiplo irracional de π entonces la rotación $\rho \circ \tau$ es de orden infinito. Entonces la órbita de cualquier punto se acumula en la circunferencia de radio igual a su norma. Por lo tanto en este caso el grupo que generan ambas reflexiones no es un grupo de reflexiones.

Ejemplo 2.2.2. Consideremos al grupo simétrico \mathbb{S}_n actuando en \mathbb{R}^n vía la permutación de sus coordenadas. Esto es, para cada f en \mathbb{S}_n se define σ_f en $\mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$ por

$$\sigma_f(x_1, \dots, x_n) = (x_{f^{-1}(1)}, \dots, x_{f^{-1}(n)})$$

para todo (x_1, \dots, x_n) en \mathbb{R}^n . Observar que las transposiciones en \mathbb{S}_n se corresponden a reflexiones mediante esta acción. Recordemos además que estas transposiciones generan al grupo simétrico. Por lo tanto, el subgrupo de $\mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$ generado por σ_f para f en \mathbb{S}_n es un grupo de reflexiones. Más aún, dado que la acción que definimos es fiel, se tiene que este es isomorfo a \mathbb{S}_n .

Los ejemplos considerados hasta ahora han sido grupos de orden finito. Sin embargo, este no por qué ser el caso.

Ejemplo 2.2.3. Dados dos puntos distintos en \mathbb{R} consideremos las reflexiones ρ y τ a través de estos. Observemos que la acción neta de la composición $\rho \circ \tau$ es una traslación. Por lo tanto, el grupo generado por estas reflexiones es de orden infinito. Sin embargo, notemos que este es un grupo de reflexiones. En efecto, las únicas reflexiones en este grupo son traslados de ρ y τ por $(\rho \circ \tau)^k$ para algún k en \mathbb{Z} . Entonces como se muestra en la Figura 2.2 los puntos de reflexión de este grupo son equiespaciados. Por lo tanto la condición (R2) se satisface y se cumple lo deseado.

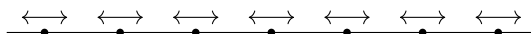


Figura 2.2

En adelante W denotará un grupo de reflexiones. Observemos que (R2) garantiza que la colección \mathcal{H} es un arreglo de hiperplanos. En efecto, dado x en

E consideremos un subconjunto compacto K de **E** que contiene a este punto en su interior. Notar que si un hiperplano H en \mathcal{H} interseca a K entonces $\rho_H(K)$ también lo interseca. La condición (R2) garantiza que esto ocurre a lo sumo un número finito de veces, es decir \mathcal{H} es localmente finito.

Con esta observación, podemos aplicar a \mathcal{H} todas las definiciones y resultados de las secciones anteriores. Llamaremos a las facetas de **E** relativas a \mathcal{H} simplemente como facetas relativas a W .

Se tiene que estas facetas son invariantes por la acción del grupo.

Proposición 2.2.1. *Dado σ en W y F una faceta relativa a W se tiene que $\sigma(F)$ también es una faceta relativa a W . Más aún, ambas tienen igual dimensión.*

Demostración. Observemos que un hiperplano H en \mathcal{H} corta a $\sigma(F)$ si y solo si $\sigma(F)$ está contenido en este hiperplano. En efecto, se tiene que $H \cap \sigma(F)$ es no vacío si y solo si $\sigma^{-1}(H) \cap F$ es también no vacío. Puesto que $\sigma^{-1}(H)$ está en \mathcal{H} y F es una faceta, esto último ocurre si y solo si $\sigma^{-1}(H)$ contiene a esta faceta. O bien, reformulando en forma equivalente H contiene a $\sigma(F)$.

Además $\sigma(F)$ es conexo al ser F conexo. Por lo tanto un hiperplano H en \mathcal{H} contiene a $\sigma(F)$ o bien $\sigma(F)$ yace en uno de los semiespacios que este acota. De esta forma se tiene que todos los puntos de $\sigma(F)$ se encuentran relacionados. Así existe una faceta F' relativa a W que lo contiene. Repitiendo el mismo razonamiento, también debe de existir una faceta F'' relativa a W tal que

$$F \subseteq \sigma^{-1}(F') \subseteq F'' .$$

Puesto que facetas distintas son disjuntas, todas las contenciones anteriores deben ser igualdades. En particular $\sigma(F)$ es una faceta relativa a W .

Finalmente observar que H en $\mathcal{H}(\sigma(F))$ si y solo si $\sigma^{-1}(H)$ en $\mathcal{H}(F)$ de donde se deduce

$$\text{sop}(\sigma(F)) = \sigma(\text{sop}(F)) .$$

Por lo tanto se tiene que F y $\sigma(F)$ son de igual dimensión. \square

En particular se tiene que W actúa en el conjunto de cámaras que define. De esta Proposición además se deducen inmediatamente los siguientes dos resultados.

Corolario. *Si C es una cámara relativa a W y H es un muro de C entonces*

$$C \Big|_H \rho_H(C) .$$

Demostración. Denotemos por F a la cara de C que tiene a H por soporte. Observemos entonces que ρ_H fija a F en particular. Luego, puesto que $\text{cl}(C)$ contiene a F tenemos que $\text{cl}(\rho_H(C))$ también la contiene. De la Proposición anterior se sigue que $\rho_H(C)$ es una cámara y por lo tanto F es una cara de $\rho_H(C)$. \square

Observemos además que por la Proposición 2.1.1 las cámaras C y $\rho_H(C)$ son distintas. En efecto, estas yacen en lados opuestos del hiperplano a través del cual son adyacentes.

Corolario. Sean C y D dos cámaras relativas a W tales que

$$C \Big|_H D.$$

Entonces para cada σ en W se tiene

$$\sigma(C) \Big|_{\sigma(H)} \sigma(D).$$

Demostración. Sea F la cara en común de C y D que tiene a H por soporte. Por la Proposición anterior $\sigma(F)$ es una faceta de codimensión uno con soporte $\sigma(H)$ tal que $\text{cl}(\sigma(C)) \cap \text{cl}(\sigma(D))$ la contiene. Puesto que $\sigma(C)$ y $\sigma(D)$ son ambas cámaras, se tiene que $\sigma(F)$ una cara de $\sigma(C)$ y $\sigma(D)$. \square

Hacemos una elección arbitraria pero fija de una cámara C^* relativa a W que llamaremos la *cámara fundamental* del grupo de reflexiones. Denotaremos por S al conjunto de reflexiones a través de los muros esta.

Nuestro próximo objetivo es probar que la acción de W en el conjunto de cámaras es simplemente transitiva. Más aún, probaremos que S es un conjunto de generadores del grupo de reflexiones. Para ello es necesario introducir algo de terminología.

Un elemento σ en $\langle S \rangle$ admite una expresión $\underline{\sigma}$ por reflexiones en los muros de la cámara fundamental

$$(\rho_{H_1}, \rho_{H_2}, \dots, \rho_{H_n}).$$

Observar que por el primer Corolario de la Proposición 2.2.1 se tiene

$$C^* \Big|_{H_i} \rho_{H_i}(C^*), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Denotando por σ_i a la composición $\rho_{H_1} \circ \dots \circ \rho_{H_i}$ el segundo Corolario implica

$$\sigma_{i-1}(C^*) \Big|_{\sigma_{i-1}(H_i)} \sigma_i(C^*), \quad 1 < i \leq n. \quad (2.2.1)$$

De esta forma $\underline{\sigma}$ tiene asociada una galería

$$(C^*, \sigma_1(C^*), \dots, \sigma_n(C^*))$$

a la que denotaremos como $\Gamma_{\underline{\sigma}}$ en adelante. Se entiende a la galería asociada a la expresión vacía como aquella que consta de C^* como única galería. Observamos que se tiene

$$\ell(\underline{\sigma}) = \ell(\Gamma_{\underline{\sigma}}). \quad (2.2.2)$$

Procedemos ahora a probar los resultados que antes adelantamos.

Proposición 2.2.2. *La acción de W en el conjunto de cámaras es transitiva.*

Demostración. Probaremos más aún que la acción de $\langle S \rangle$ en el conjunto de cámaras relativas a W es transitiva. Veamos que toda galería no vacilante Γ que comienza por C^* es de la forma $\Gamma_{\underline{\sigma}}$ para alguna expresión $\underline{\sigma}$ en S^* . Procedemos para ello por inducción en la longitud de Γ .

Cuando la longitud de Γ es cero, la galería asociada a la expresión vacía satisface la propiedad deseada.

Supongamos ahora que Γ tiene longitud positiva y que el resultado vale para cualquier galería de longitud menor. Denotemos entonces por $\widehat{\Gamma}$ a la galería obtenida a partir de Γ eliminando $\Gamma^{(\ell(\Gamma))}$ de su expresión. Entonces por hipótesis inductiva $\widehat{\Gamma}$ es de la forma $\Gamma_{\widehat{\sigma}}$ para alguna expresión $\widehat{\sigma}$ en S^* .

Notemos que $\widehat{\sigma}(C^*)$ es igual a $\Gamma^{(\ell(\Gamma)-1)}$ por construcción y supongamos que

$$\widehat{\sigma}(C^*) \Big|_H \Gamma^{(\ell(\Gamma))}.$$

Entonces, por el segundo Corolario de la Proposición 2.2.1 se tiene que

$$C^* \Big|_{\widehat{\sigma}^{-1}(H)} \widehat{\sigma}^{-1}(\Gamma^{(\ell(\Gamma))}).$$

Por lo tanto $\rho_{\widehat{\sigma}^{-1}(H)}$ en S al ser esta una reflexión sobre uno de los muros de la cámara fundamental. Así, puesto que ρ_H es igual a $\widehat{\sigma} \circ \rho_{\widehat{\sigma}^{-1}(H)} \circ \widehat{\sigma}^{-1}$ se tiene que

$$\widehat{\sigma} \circ \rho_{\widehat{\sigma}^{-1}(H)}(C^*) = \rho_H \circ \widehat{\sigma}(C^*) = \Gamma^{(\ell(\Gamma))}$$

Se ha usado en la última igualdad la Proposición 1.2.6 junto con el hecho de que $\widehat{\sigma}(C^*)$ y $\Gamma^{(\ell(\Gamma))}$ son distintas. Entonces si $\underline{\sigma}$ es el producto de las expresiones $\widehat{\sigma}$ y $(\rho_{\widehat{\sigma}^{-1}(H)})$ se deduce que Γ es de la forma $\Gamma_{\underline{\sigma}}$ lo que completa el paso inductivo.

Finalmente, por la Proposición 1.3.2 cualesquiera dos cámaras conectarse por una galería no vacilante. De lo anterior, para toda cámara C relativa a W existe σ en $\langle S \rangle$ tal que

$$\sigma(C^*) = C.$$

□

Corolario. *El conjunto S genera a W .*

Demostración. Es suficiente probar que para cada H en \mathcal{H} se tiene ρ_H en $\langle S \rangle$ dado que estas reflexiones generan al grupo. Dado un hiperplano H en \mathcal{H} se tiene por la Proposición 1.2.4 que existe una cámara C con H como uno de sus muros. Por otro lado, como vimos en la Proposición anterior, existe σ en $\langle S \rangle$ tal que

$$\sigma(C^*) = C.$$

Por lo tanto C^* tiene a $\sigma^{-1}(H)$ como uno de sus muros. Luego, ya que

$$\rho_H = \sigma \circ \rho_{\sigma^{-1}(H)} \circ \sigma^{-1},$$

se deduce que ρ_H en $\langle S \rangle$. □

En lo que sigue, al hablar de expresiones de elementos en W las consideraremos relativas a este conjunto de generadores. Esto, por supuesto, salvo mención explícita de lo contrario.

Habiendo obtenido estos resultados, de acuerdo a lo que nos propusimos antes, solo resta probar que la acción de W es fiel. En la siguiente Proposición obtendremos una caracterización de las expresiones reducidas en términos de galerías minimales. Como consecuencia obtendremos la propiedad buscada sobre la acción.

Proposición 2.2.3. Una expresión $\underline{\sigma}$ de un elemento σ en W es reducida si y solo si $\Gamma_{\underline{\sigma}}$ es una galería minimal. Más aún, se tiene que

$$\ell(\sigma) = d(C^*, \sigma(C^*)).$$

Demostración. Supongamos que $\Gamma_{\underline{\sigma}}$ es una galería minimal. Si $\underline{\sigma}'$ otra expresión para σ entonces $\Gamma_{\underline{\sigma}'}$ conecta C^* y $\sigma(C^*)$ con lo que

$$\ell(\Gamma_{\underline{\sigma}}) \leq \ell(\Gamma_{\underline{\sigma}'}).$$

Luego por (2.2.2) se tiene que $\ell(\underline{\sigma}) \leq \ell(\underline{\sigma}')$ de donde $\underline{\sigma}$ es reducida.

Asumamos ahora que $\Gamma_{\underline{\sigma}}$ no es minimal. Suponiendo que $\underline{\sigma}$ es la expresión $(\rho_{H_1}, \rho_{H_2}, \dots, \rho_{H_n})$ repetimos la notación σ_i para $1 \leq i \leq n$ usada en (2.2.1). Además, denotemos momentáneamente por σ_0 a la identidad.

Como se vio en (2.2.1) tenemos que $\Gamma_{\underline{\sigma}}$ atraviesa los hiperplanos

$$\sigma_0(H_1), \sigma_1(H_2), \dots, \sigma_{n-1}(H_n).$$

Por la Proposición 1.3.3 sabemos que existen $1 \leq i < j \leq n$ tales que $\sigma_{i-1}(H_i)$ es igual a $\sigma_{j-1}(H_j)$ ya que $\Gamma_{\underline{\sigma}}$ no es minimal. La Figura 2.3 ilustra esta situación.

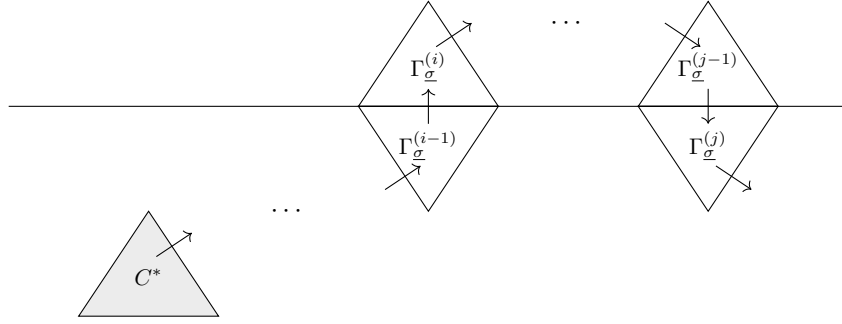


Figura 2.3

Entonces se satisface que

$$\sigma_{i-1} \circ \rho_{H_i} \circ \sigma_{i-1}^{-1} = \rho_{\sigma_{i-1}(H_i)} = \rho_{\sigma_{j-1}(H_j)} = \sigma_{j-1} \circ \rho_{H_j} \circ \sigma_{j-1}^{-1}.$$

Reescribiendo esta expresión encontramos que

$$\sigma_{i-1} \circ \sigma_i^{-1} = \sigma_j \circ \sigma_{j-1}^{-1}.$$

Entonces podemos expresar a σ como

$$\sigma = \sigma_j \circ \sigma_j^{-1} \circ \sigma = \sigma_{i-1} \circ \sigma_i^{-1} \circ \sigma_{j-1} \circ \sigma_j^{-1} \circ \sigma = \sigma_{i-1} \circ \sigma_i^{-1} \circ \sigma_{j-1} \circ \sigma_{j+1}^{-1}.$$

Expandiendo la composición $\sigma_i^{-1} \circ \sigma_{j-1}$ encontramos que

$$\sigma_i^{-1} \circ \sigma_{j-1} = \rho_{H_i} \circ \dots \circ \rho_{H_1} \circ \rho_{H_1} \circ \dots \circ \rho_{H_{j-1}} = \rho_{H_{i+1}} \circ \dots \circ \rho_{H_{j-1}}.$$

Así finalmente obtenemos que

$$\sigma = \rho_{H_1} \circ \dots \circ \rho_{H_{i-1}} \circ \rho_{H_{i+1}} \circ \dots \circ \rho_{H_{j-1}} \circ \rho_{H_{j+1}} \circ \dots \circ \rho_{H_n}.$$

Entonces $(\rho_{H_1}, \dots, \widehat{\rho_{H_i}}, \dots, \widehat{\rho_{H_j}}, \dots, \rho_{H_n})$ es una expresión de σ de longitud menor a $\underline{\sigma}$ con lo que esta última no es reducida¹. En la Figura 2.4 se ilustra la galería inducida por esta expresión. Esta se obtiene reflejando $\Gamma_{\underline{\sigma}}$ entre $\Gamma_{\underline{\sigma}}^{(i)}$ y $\Gamma_{\underline{\sigma}}^{(j-1)}$ a través del hiperplano que $\Gamma_{\underline{\sigma}}$ atraviesa más de una vez.

¹Recordemos que $\widehat{\bullet}$ significa que este término ha sido omitido de la expresión.

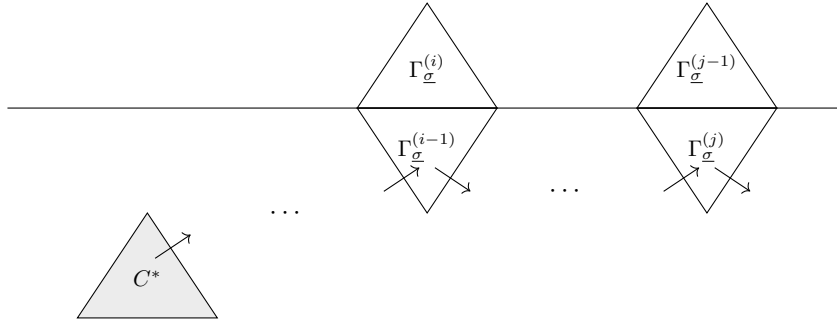


Figura 2.4

La última igualdad se sigue de (2.2.2) junto con la discusión posterior a la Proposición 1.3.2. \square

En particular observemos que $\Gamma_{\underline{\sigma}}$ es no vacilante cuando $\underline{\sigma}$ es reducida. Como adelantamos, se tiene el siguiente resultado.

Corolario. *La acción de W en el conjunto de cámaras es fiel.*

Demostración. Basta comprobar que si σ en W fija a C^* entonces σ es la identidad. Esto es evidente de la Proposición anterior ya que $\ell(\sigma)$ es igual al número de hiperplanos que separan a C^* y $\sigma(C^*)$. \square

En particular de este Corolario y la Proposición 2.2.2 se obtiene que W y el conjunto de cámaras que define están en biyección. Por lo tanto, el orden de W coincide con el número de cámaras.

En los siguientes dos Corolarios se presentan propiedades fundamentales de los grupos de reflexiones. Estas propiedades de naturaleza combinatoria imponen fuertes restricciones en la estructura del grupo.

Corolario (Propiedad de Supresión). *Sea σ en W y sea (ρ_1, \dots, ρ_n) una expresión no reducida de este elemento. Entonces existen $1 \leq i < j \leq n$ tales que*

$$(\rho_1, \dots, \widehat{\rho}_i, \dots, \widehat{\rho}_j, \dots, \rho_n)$$

es también una expresión de σ .

Demostración. Esto es una consecuencia directa de la prueba de la Proposición anterior. En efecto, si $\underline{\sigma}$ representa a la expresión no reducida, entonces $\Gamma_{\underline{\sigma}}$ no es minimal. Como vimos antes esto implica que

$$(\rho_1, \dots, \widehat{\rho}_i, \dots, \widehat{\rho}_j, \dots, \rho_n)$$

es otra expresión de σ . \square

Aunque el siguiente resultado es inmediato del anterior, resulta que ambos tienen el mismo alcance en cuanto a dictar la estructura del grupo se refiere.

Corolario (Propiedad de Intercambio). *Sea σ en W y sea (ρ_1, \dots, ρ_n) una expresión reducida de este elemento. Si ρ en S es tal que $\ell(\rho \circ \sigma) < \ell(\sigma)$ entonces existe $1 \leq i \leq n$ tal que*

$$(\rho_1, \dots, \widehat{\rho}_i, \dots, \rho_n)$$

es una expresión reducida de $\rho \circ \sigma$.

Demostración. Observemos que $(\rho, \rho_1, \dots, \rho_n)$ es una expresión de $\rho \circ \sigma$ no reducida. Luego por el Corolario anterior existen $1 \leq i < j \leq n$ tales que alguna de

$$(\rho, \rho_1, \dots, \widehat{\rho}_i, \dots, \widehat{\rho}_j, \dots, \rho_n) \quad (\rho_1, \dots, \widehat{\rho}_i, \dots, \rho_n)$$

es para $\rho \circ \sigma$ otra expresión.

Sin embargo, si la primera lo fuese, entonces

$$(\rho_1, \dots, \widehat{\rho}_i, \dots, \widehat{\rho}_j, \dots, \rho_n)$$

sería para σ otra expresión. Esto contradice el hecho de que (ρ_1, \dots, ρ_n) sea reducida. Por lo tanto, debe ser el caso de que

$$(\rho_1, \dots, \widehat{\rho}_i, \dots, \rho_n)$$

es una expresión de $\rho \circ \sigma$.

Por la Proposición A.3 tenemos que $\ell(\rho \circ \sigma) \geq \ell(\sigma) - 1$ con lo que esta expresión es reducida. \square

Observemos que la Propiedad de Intercambio implica que $\rho \circ \sigma$ y σ son de distinta longitud. Luego, por la Proposición A.3 tenemos que

$$\ell(\rho \circ \sigma) = \ell(\sigma) \pm 1$$

para todo σ en W y ρ en S .

La Propiedad de Supresión nos permite además definir la noción de *paridad* o *signo* en grupos de reflexiones. En efecto, dado σ en W se define

$$\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{\ell(\underline{\sigma})},$$

donde $\underline{\sigma}$ es cualquier expresión de este elemento. Notemos que esta expresión está bien definida pues $\ell(\sigma) \equiv \ell(\underline{\sigma}) \pmod{2}$ por la Propiedad de Supresión. Observemos que esta noción de signo generaliza a la correspondiente en el grupo simétrico en vistas del Ejemplo 2.2.2.

Una *región fundamental* de la acción de W en \mathbf{E} es un subconjunto de \mathbf{E} que contiene exactamente un punto de cada órbita. La Proposición anterior nos provee una parte del siguiente resultado.

Proposición 2.2.4. *La acción de W en \mathbf{E} tiene a $\text{cl}(C^*)$ por región fundamental.*

Demostración. Veamos que la órbita de cada punto en \mathbf{E} interseca a $\text{cl}(C^*)$ en primer lugar. Dado un punto x en \mathbf{E} por la Proposición 1.2.3 existe una cámara C tal que $\text{cl}(C)$ lo contiene. Además, por la Proposición anterior, tenemos que existe σ en W tal que

$$\sigma(C^*) = C.$$

Puesto que σ actúa en \mathbf{E} continuamente

$$\sigma(\text{cl}(C^*)) = \text{cl}(\sigma(C^*)),$$

con lo que $\sigma^{-1}(x)$ en $\text{cl}(C^*)$ como queríamos.

Dado un punto x en $\text{cl}(C^*)$ veamos que la intersección $\text{Orb}_W(x) \cap \text{cl}(C^*)$ contiene únicamente a este punto. Suponiendo que σ en W es tal que $\sigma(x)$ en $\text{cl}(C^*)$ probemos que x en $\text{Fix}(\sigma)$ por inducción en $\ell(\sigma)$.²

Si σ es la identidad, entonces el resultado es trivial. En efecto, todos los puntos son fijados por esta transformación.

Supongamos ahora que $\ell(\sigma)$ es positivo y que el resultado se cumple para elementos de menor longitud. Observemos del primer Corolario de la Proposición anterior que C^* y $\sigma(C^*)$ son dos cámaras distintas. Luego por la Proposición 1.2.5 existe un muro H de C^* que separa a estas cámaras. Entonces C^* y $\sigma(C^*)$ yacen en lados opuestos de H con lo que

$$\text{cl}(C^*) \cap \text{cl}(\sigma(C^*)) \subseteq H.$$

En particular $\sigma(x)$ pertenece a H con lo que $\rho_H \circ \sigma(x)$ pertenece a $\text{cl}(C^*)$.

Denotemos por τ a esta composición. Observemos que $\ell(\tau) < \ell(\sigma)$ para aplicar la hipótesis inductiva. Consideremos una expresión reducida $\underline{\sigma}$ de σ y $\Gamma_{\underline{\sigma}}$ su galería minimal asociada. Entonces existe $1 \leq i \leq \ell(\sigma)$ tal que

$$\Gamma_{\underline{\sigma}}^{(i-1)} \Big|_H \Gamma_{\underline{\sigma}}^{(i)}.$$

Por otro lado si $\underline{\tau}$ es la expresión producto de (ρ_H) y $\underline{\sigma}$ tenemos que

$$\Gamma_{\underline{\tau}}^{(0)} \Big|_H \Gamma_{\underline{\tau}}^{(1)} \qquad \Gamma_{\underline{\tau}}^{(i)} \Big|_H \Gamma_{\underline{\tau}}^{(i+1)}.$$

Luego $\Gamma_{\underline{\tau}}$ atraviesa a H más de una vez y por lo tanto no es minimal. Entonces $\underline{\tau}$ no es reducida, con lo que $\ell(\tau) < \ell(\sigma)$ por la Propiedad de Intercambio. Aplicando ahora en τ la hipótesis inductiva

$$\sigma(x) = \rho_H \circ \sigma(x) = x.$$

De esta forma queda probado que $\text{cl}(C^*)$ es una región fundamental. \square

Como última tarea obtendremos una presentación de los grupos de reflexiones en términos de generadores y relaciones. Aunque aquí no lo precisaremos, las Propiedades de Supresión e Intercambio resultan estar íntimamente ligadas a esta presentación. En primer lugar introducimos algo de notación.

Para cualquier par de reflexiones ρ, τ en S denotaremos por $\Pi(\rho, \tau; n)$ a la n -upla alternada

$$\Pi(\rho, \tau; n) = (\rho, \tau, \rho, \dots)$$

para cada n en \mathbb{N} . Además denotaremos por $m_{\rho, \tau}$ al orden de la composición de estas reflexiones. Observemos que si $m_{\rho, \tau}$ es finito

$$\underbrace{\rho \circ \tau \circ \rho \dots}_{m_{\rho, \tau}} = \underbrace{\tau \circ \rho \circ \tau \dots}_{m_{\rho, \tau}} \tag{2.2.3}$$

Así tenemos que $\Pi(\rho, \tau; m_{\rho, \tau})$ y $\Pi(\tau, \rho; m_{\rho, \tau})$ son expresiones de un mismo elemento. Llamaremos *relaciones de trenzas* a las relaciones en W de este tipo.

Consideremos ahora la matriz M en $M_S(\mathbb{N}^\infty)$ cuya entrada (ρ, τ) -ésima es el orden del producto que recién definimos³. Dado que las reflexiones son involuciones, observemos que M tiene las siguientes propiedades:

²Recordemos que $\text{Fix}(\sigma)$ denota a los puntos fijos de esta función.

³Denotamos por $M_S(\mathbb{N}^\infty)$ a las matrices $S \times S$ con elementos en \mathbb{N} o bien infinitos.

M1. Es una matriz simétrica.

M2. El coeficiente $m_{\rho,\tau}$ es uno si y solo si es diagonal.

Dado un conjunto de índices I llamaremos una *matriz de Coxeter* a cualquier matriz en $M_I(\mathbb{N}^\infty)$ que satisfaga estas propiedades.

Ahora se enuncia la presentación de los grupos de reflexiones que fue antes mencionada. Esta presentación es el resultado fundamental de los grupos de reflexiones.

Teorema 2.2.1. *El grupo W admite una presentación por generadores y relaciones como⁴*

$$\langle \rho \in S \mid \forall \rho, \tau \in S \ (\rho\tau)^{m_{\rho,\tau}} = \text{id} \rangle.$$

En primer lugar probaremos que dos expresiones reducidas de un mismo elemento pueden transformarse una en la otra mediante relaciones de trenzas. Esto quiere decir que mediante aplicaciones sucesivas de relaciones del tipo (2.2.3) podemos llevar una expresión a la otra. Este resultado se conoce como Lema de Matsumoto y se formula precisamente de la siguiente manera.

Lema 2.2.1 (Lema de Matsumoto). *Supongamos que $\phi : S^* \rightarrow M$ es un morfismo de monoides tal que*

$$\phi(\Pi(\rho, \tau; m_{\rho,\tau})) = \phi(\Pi(\tau, \rho; m_{\rho,\tau}))$$

cuando $m_{\rho,\tau}$ es finito. Entonces este morfismo es constante en las expresiones reducidas de cada elemento σ en W .

Demostración. Supongamos existe un elemento σ en W que admite dos expresiones reducidas (ρ_1, \dots, ρ_n) y (τ_1, \dots, τ_n) tales que

$$\phi((\rho_1, \dots, \rho_n)) \neq \phi((\tau_1, \dots, \tau_n)).$$

Podemos asumir además que este elemento es de longitud minimal entre los que satisfacen esta propiedad. Por la Propiedad de Intercambio tenemos que existe $1 \leq i \leq n$ tal que $(\tau_1, \rho_1, \dots, \widehat{\rho}_i, \dots, \rho_n)$ es una nueva expresión de este elemento.

Observemos así que (τ_2, \dots, τ_n) y $(\rho_1, \dots, \widehat{\rho}_i, \dots, \rho_n)$ son expresiones reducidas de un mismo elemento en W de longitud menor. Puesto que $\ell(\sigma)$ es minimal se tiene que

$$\phi((\tau_1, \dots, \tau_n)) = \phi((\tau_1, \rho_1, \dots, \widehat{\rho}_i, \dots, \rho_n)). \quad (*)$$

Notemos ahora que el caso en que $i < n$ no puede darse. En efecto, de otra forma $(\rho_1, \dots, \rho_{n-1})$ y $(\tau_1, \rho_1, \dots, \widehat{\rho}_i, \dots, \rho_{n-1})$ son también expresiones reducidas de un mismo elemento en W de menor longitud. De igual forma que antes

$$\phi((\rho_1, \dots, \rho_n)) = \phi((\tau_1, \rho_1, \dots, \widehat{\rho}_i, \dots, \rho_n)).$$

Sin embargo por (*) esto contradice nuestra hipótesis inicial. Observar además que por (*) debe tenerse

$$\phi((\rho_1, \dots, \rho_n)) \neq \phi((\tau_1, \rho_1, \dots, \rho_{n-1})).$$

⁴Aquí $(\rho\tau)^{m_{\rho,\tau}}$ se conviene a ser la identidad cuando $m_{\rho,\tau}$ es infinito.

Partiendo de dos expresiones de σ en W cuya imagen en M difiere, obtuvimos una nueva expresión reducida de este elemento. Más aún, la imagen en M de esta nueva expresión también difiere con una de las que comenzamos. Podemos condensar el razonamiento en forma diagramática de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc} (\rho_1, \dots, \rho_n) & \longrightarrow & (\tau_1, \rho_1, \dots, \rho_{n-1}) \\ (\tau_1, \dots, \tau_n) & & (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n) \end{array}$$

Se entiende que en cada columna, ambas son expresiones de un mismo elemento en W cuya imagen en M difiere.

Podemos entonces iterar este proceso

$$\begin{array}{ccccccc} (\rho_1, \dots, \rho_n) & \longrightarrow & (\tau_1, \rho_1, \dots, \rho_{n-1}) & \longrightarrow & (\rho_1, \tau_1, \rho_1, \dots, \rho_{n-2}) & \longrightarrow & \dots \\ (\tau_1, \dots, \tau_n) & & (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n) & & (\tau_1, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1}) & & \end{array}$$

Continuando de esta forma obtendremos dos expresiones reducidas $\Pi(\rho_1, \tau_1; n)$ y $\Pi(\tau_1, \rho_1; n)$ de un mismo elemento en W tales que

$$\phi(\Pi(\rho_1, \tau_1; n)) \neq \phi(\Pi(\tau_1, \rho_1; n)).$$

Por un lado observemos que $m_{\rho_1, \tau_1} \geq n$ dado que ambas expresiones son reducidas. Por otro lado $m_{\rho_1, \tau_1} \leq n$ puesto que $\rho_1 \circ \tau_1$ es de orden m_{ρ_1, τ_1} con lo que vale la igualdad. Así se tiene que

$$\phi(\Pi(\rho_1, \tau_1; m_{\rho_1, \tau_1})) \neq \phi(\Pi(\tau_1, \rho_1; m_{\rho_1, \tau_1})),$$

lo que prueba el contrareciproco del Lema. \square

Finalmente estamos en condiciones de probar el resultado que enunciamos antes.

Demostración del Teorema 2.2.1. Denotemos por W' al grupo presentado por generadores y relaciones en el enunciado. Por la Proposición A.1 existe un morfismo de monoides $\phi : S^* \rightarrow W'$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & S^* & \\ & \nearrow \iota & \downarrow \phi \\ S & & \\ & \searrow \iota & \\ & W' & \end{array}$$

es conmutativo. Observemos además que este morfismo satisface las relaciones

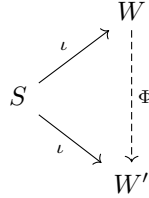
$$\phi(\Pi(\rho, \tau; m_{\rho, \tau})) = \phi(\Pi(\tau, \rho; m_{\rho, \tau}))$$

siempre que $m_{\rho, \tau}$ es finito.

Definamos ahora $\Phi : W \rightarrow W'$ para cada σ en W como

$$\Phi(\sigma) = \phi(\underline{\sigma}), \tag{*}$$

donde $\underline{\sigma}$ es reducida. Notemos que por el Lema de Matsumoto esta función está bien definida. Observar además que el diagrama



es conmutativo.

Probaremos ahora que Φ es un morfismo de grupos. Puesto que ϕ es un morfismo de monoides, es suficiente probar que (*) es válida aún para expresiones no reducidas. Veamos que para todo σ en W y ρ en S se cumple

$$\Phi(\rho \circ \sigma) = \phi((\rho))\Phi(\sigma).$$

Una vez probado esto, por inducción en $\ell(\sigma)$ sigue la afirmación anterior. Observemos que si $\ell(\rho \circ \sigma) > \ell(\sigma)$ entonces

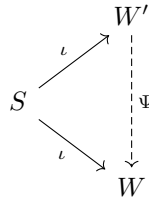
$$\Phi(\rho \circ \sigma) = \phi((\rho)\underline{\sigma}) = \phi((\rho))\phi(\underline{\sigma}) = \phi((\rho))\Phi(\sigma).$$

para cualquier expresión $\underline{\sigma}$ reducida. Por otro lado, si $\ell(\sigma) > \ell(\rho \circ \sigma)$ entonces $\ell(\rho \circ (\rho \circ \sigma)) > \ell(\rho \circ \sigma)$ con lo que del caso anterior

$$\Phi(\sigma) = \Phi(\rho \circ (\rho \circ \sigma)) = \phi((\rho))\Phi(\rho \circ \sigma).$$

Dado que $\phi((\rho))$ es una involución se sigue la afirmación.

Finalmente, notar que W satisface las relaciones en el enunciado del Teorema. Por lo tanto existe un morfismo de grupos $\Psi : W' \rightarrow W$ tal que el diagrama



es conmutativo. Luego, de este y el anterior diagrama se tiene que las composiciones $\Phi \circ \Psi$ y $\Phi \circ \Psi$ actúan en S como la identidad. Ya que S genera a W y W' se tiene que ambas composiciones son en efecto la identidad. Así W es isomorfo a W' lo que prueba el resultado. \square

Los grupos que satisfacen una presentación como la del Teorema 2.2.1 para alguna matriz de Coxeter han sido extensivamente estudiados. En efecto, estos son los grupos de Coxeter que se mencionaron en la introducción.

Esperamos que después de esta primera exposición quien lea encuentre natural el continuar con el estudio de grupos de Coxeter. Libros como [1], [4] o [6] conforman excelentes introducciones al tema. Incluso hay disponible en YouTube un curso completo dictado por Federico Ardila sobre estos grupos.

La bibliografía sobre grupos de Coxeter es sumamente amplia, cubriendo distintos sabores de la teoría. Es por esto que se invita a quien lea a encontrar la ruta de acceso al tema que mejor se adapte a sus gustos o intereses. Si algún mérito ha de atribuírsele a esta monografía, espero sea el de allanar el camino de entrada para el lector al que estos temas le resultaban desconocidos.

A | Apéndice

Se recuerda aquí la definición de monoide libre junto con algunas de sus propiedades. Después de esto se define la noción de longitud en un grupo relativa a un conjunto de generadores.

Para cada entero n en \mathbb{N}_0 usaremos la notación \mathbb{I}_n para designar al conjunto de enteros en \mathbb{N}_0 menores a este. Observar en particular que \mathbb{I}_0 es vacío.

Dado S un conjunto, denotemos por S_n^* a la familia de funciones $f : \mathbb{I}_n \rightarrow S$ para cada n en \mathbb{N}_0 . Con esta notación S^* se define a ser

$$S^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} S_n^*.$$

En aras de dotar a S^* de estructura de monoide, consideremos la operación binaria $\cdot : S^* \times S^* \rightarrow S^*$ dada como sigue. Para dos elementos f en S_n^* y g en S_m^* se define su producto $f \cdot g$ en S_{n+m}^* por

$$(f \cdot g)(k) = \begin{cases} f(k) & 0 \leq k < n \\ g(k - n) & n \leq k < n + m \end{cases}$$

Es sencillo comprobar que esta operación efectivamente otorga a S^* estructura de monoide, donde el único elemento en S_0^* es la identidad. Se llama a S^* el *monoide libre* en S .

Notemos que al ser S^* una unión disyunta podemos definir una aplicación $\ell : S^* \rightarrow \mathbb{N}_0$ de forma que f en $S_{\ell(f)}^*$ para cada f en S^* . Es directo de su definición que ℓ es un morfismo de monoides, donde en su codominio se considera la estructura aditiva. Se llama a $\ell(f)$ la *longitud* de f para cada elemento del monoide S^* .

Como es usual, los elementos en S_n^* de longitud positiva se acostumbran escribir como n -uplas de elementos en S . Esto es f en S_n^* se denota como

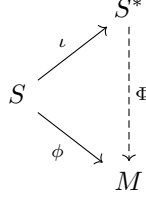
$$(f(0), \dots, f(n-1)).$$

Además el único elemento en S_0^* se denota $()$ como la upla vacía.

La aplicación $\iota : S \rightarrow S^*$ que asigna a cada elemento en S su correspondiente en S^* de longitud uno, es claramente inyectiva. Por lo tanto, podemos identificar a S con su imagen en S^* mediante esta aplicación.

Se tiene que S^* es un objeto libre sobre S en la categoría de monoides. En otras palabras S^* satisface la siguiente propiedad universal.

Proposición A.1. Dado M un monoide junto con $\phi : S \rightarrow M$ una función, existe un único morfismo de monoides $\Phi : S^* \rightarrow M$ tal que el diagrama



es conmutativo.

Demostración. Observemos que S es un conjunto de generadores de S^* por definición. Por otro lado, la acción en S de cualquier morfismo $\Phi : S^* \rightarrow M$ para el cual el diagrama commute está determinada. Luego, existe a lo sumo un morfismo como en el enunciado.

Por otro lado, la existencia de un tal morfismo también está implícita en el diagrama. En efecto, se define $\Phi : S^* \rightarrow M$ extendiendo la definición en S al monoide S^* de forma que se preserven los productos. \square

Consideremos un grupo W con un conjunto S de generadores. Por la Proposición anterior, la inclusión $\iota : S \rightarrow W$ induce un morfismo de monoides $\pi : S^* \rightarrow W$ que hace conmutar el respectivo diagrama. Definimos a continuación algunas nociones relativas a este morfismo.

Una *expresión* en S de un elemento w en W es una upla en la fibra $\pi^{-1}(\{w\})$ de este morfismo. Cuando el conjunto de generadores sea sobreentendido, nos referiremos simplemente a la expresión de un elemento. Para denotar una expresión de un elemento w en W usaremos la notación \underline{w} a menudo. Observar que esta indica simultáneamente al elemento del grupo y a una expresión particular del mismo.

Así una expresión es una upla en S^* tal que el producto de sus coordenadas es igual al elemento en W del que esta es una expresión. Puesto que tenemos una función de longitud en S^* es posible hacer la siguiente definición. La *longitud* en S de un elemento w en W se define a ser

$$\ell(w) = \min\{\ell(\underline{w}) : \underline{w} \in \pi^{-1}(\{w\})\}.$$

Como antes, cuando el conjunto de generadores sea sobreentendido, nos referiremos simplemente a la longitud de un elemento. Una expresión de un elemento w en W se dice *reducida* si realiza el mínimo en la igualdad anterior.

Las siguientes propiedades de la función longitud son inmediatas de la definición.

Proposición A.2. Sea W un grupo con S un conjunto de generadores. Entonces se cumplen

- i. Un elemento w en W tiene longitud uno si y solo si pertenece a S .
- ii. Para cada par de elementos w, v en W se tiene $\ell(wv) \leq \ell(w) + \ell(v)$.

En la monografía nos concentraremos en grupos generados por involuciones. Para estos grupos se tiene el siguiente complemento de la Proposición anterior.

Proposición A.3. Sea W un grupo generado por un conjunto S de involuciones. Entonces se cumplen

- i.* Todo elemento w en W tiene igual longitud que su inverso.
- ii.* Para cada par de elementos w, v en W se tiene $\ell(wv) \geq \ell(w) - \ell(v)$.
- iii.* Si w en W y s en S entonces $\ell(w) - 1 \leq \ell(ws) \leq \ell(w) + 1$.

Demostración. Notemos que si (s_1, \dots, s_n) es una expresión de un elemento en W entonces (s_n, \dots, s_1) es una expresión de su inverso. De esta observación (i) se sigue.

Para (ii) observar que si w, v en W entonces

$$\ell(w) = \ell(wvv^{-1}) \leq \ell(wv) + \ell(v^{-1}) = \ell(wv) + \ell(v)$$

de donde la afirmación se obtiene despejando.

Finalmente (iii) es inmediata de (ii) junto con la Proposición anterior. \square

Bibliografía

- [1] A. Björner, F. Brenti, *Combinatorics of Coxeter Groups*, Springer, Berlin 2005.
- [2] N. Bourbaki, *Groupes et Algèbres de Lie, Chaptieres 4-6*, Masson, Paris, 1981.
- [3] K. Brown, *Buildings*, Springer, New York, 1989.
- [4] M. Davis, *The Geometry and Topology of Coxeter Groups*, Princeton University Press Publishing House, Princeton, 2008.
- [5] B. Elias, S. Makisumi, U. Thiel, G. Williamson, *Introduction to Soergel Bimodules*, RSME Springer Series, Berlin, 2020.
- [6] A. Thomas, *Geometric and Topological Aspects of Coxeter Groups and Buildings*, European Mathematical Society Press, Zürich, 2018.