

Michael Janou Glaeser

***Sigue girando:* Teoría Espectral de Operadores de
Toeplitz**

Universidad de Buenos Aires

***Sigue girando:* Teoría Espectral de Operadores de Toeplitz**

Michael Janou Glaeser

Índice general

Introducción	4
Objetivos	4
Organización del texto	4
Convenciones, notación y terminología	4
Prerrequisitos	6
Capítulo 1. Análisis Funcional	7
1.1. Espacios de Banach	7
1.2. Espacios de Hilbert	14
1.3. Operadores compactos	17
Capítulo 2. Funciones sobre \mathbb{T}	19
2.1. Definición elemental del número de giros	19
2.2. Forma normal homotópica	21
2.3. Algunas tecnicidades topológicas	23
2.4. Teoría de la medida sobre \mathbb{T}	24
Capítulo 3. Operadores de Fredholm	27
3.1. Operadores de Fredholm entre espacios vectoriales	27
3.2. Operadores de Fredholm acotados entre espacios de Banach	29
Capítulo 4. El Teorema del Índice	33
4.1. Operadores de multiplicación	33
4.2. Espacio de Hardy y operadores de Toeplitz	34
Capítulo 5. Álgebras de Banach	40
5.1. Primeras definiciones	40
5.2. La exponencial	41
5.3. Teoría espectral para álgebras de Banach	42
Capítulo 6. Operadores de Toeplitz, de nuevo	45
6.1. La extensión de Toeplitz	45
6.2. Operadores de Toeplitz inversibles	48
6.3. Caracterización del espectro	50
Epílogo	52
Bibliografía	53

Introducción

Objetivos

La presente monografía tiene por objetivo presentar dos bellos teoremas de la teoría espectral de operadores. Ambos teoremas conciernen a los así llamados *operadores de Toeplitz*, que actúan naturalmente sobre cierto espacio de Hilbert separable, conocido como el *espacio de Hardy*. Estos operadores se construyen a partir de funciones medibles esencialmente acotadas $\varphi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ (donde \mathbb{T} denota al círculo unidad). Esto es, a cada una de estas funciones $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ le corresponde un operador de Toeplitz T_φ , llamado el «operador de Toeplitz con símbolo φ ». En el presente trabajo lidiaremos con los operadores de Toeplitz cuyo símbolo es continuo. El primero de nuestros dos teoremas es el Teorema del Índice, el cual establece una sorprendente relación entre cierto invariante *geométrico-topológico* (el número de giros de φ) y cierto invariante *algebraico* (el índice de Fredholm de T_φ). Por otra parte, el invariante *analítico* por excelencia de un operador es su *espectro*, y nuestro segundo teorema da una caracterización sencilla y elegante del espectro de un operador de Toeplitz T_φ (con símbolo continuo) en términos del número de giros de φ alrededor de las distintas regiones de $\mathbb{C} \setminus \varphi(\mathbb{T})$. Así pues, estos dos resultados constituyen un caso de interacción fructífera entre el Álgebra, la Geometría y el Análisis.

Organización del texto

El texto comienza con un repaso de los requisitos analíticos necesarios. La mayor parte de los enunciados son parte del material estándar presentado en un curso de Análisis Funcional, y en consecuencia omitimos sus demostraciones, contentándonos con proveer las referencias pertinentes. El propósito de este primer capítulo es meramente el de enunciar los resultados relevantes en un mismo lugar, con el fin de poder referirnos a ellos con facilidad en los capítulos posteriores.

En el segundo capítulo definimos el número de giros de una curva plana orientada alrededor de un punto de su complemento, mostramos cómo se puede deformar una curva plana nunca nula a cierta «forma normal» y finalmente construimos una medida sobre el círculo unitario \mathbb{T} e identificamos una base ortonormal de $L^2(\mathbb{T})$.

Ya en el tercer capítulo, introducimos los operadores de Fredholm y definimos sus índices, estableciendo cuidadosamente sus principales propiedades.

En el cuarto capítulo introducimos los operadores de Toeplitz con símbolo continuo y demostramos nuestro primer teorema, el Teorema del Índice.

Para poder estudiar mejor los espectros de estos operadores, resulta conveniente presentar las ideas principales de la teoría espectral en el contexto algo más general de las álgebras de Banach, lo cual hacemos en el quinto capítulo. Aquí nos encontramos con el importante Teorema de Permanencia Espectral, el cual será nuestra principal herramienta para caracterizar el espectro de un operador de Toeplitz con símbolo continuo, lo cual hacemos en el sexto y último capítulo.

Finalmente y a modo de epílogo, incluimos una breve sección en la cual comentamos el lugar de estos resultados clásicos en la matemática moderna e indicamos algunas de sus generalizaciones, dirigiendo al lector interesado a la literatura para más resultados similares.

Convenciones, notación y terminología

*Otras universidades del mundo con mayor presupuesto pueden tener al número cero entre sus números naturales. Pero acá los naturales **no** incluyen al cero.* — Guillermo “Willie” Cortiñas

Cardinalidad. Dado un conjunto X , denotamos $|X|$ a su cardinal.

Conjunto de partes. Dado un conjunto X , denotamos $\mathcal{P}(X)$ al conjunto de partes de X (esto es, al conjunto $\{A \mid A \subset X\}$).

Números Naturales. Nuestros números naturales \mathbb{N} contienen al 0 (*pace* Cortiñas). Usaremos la notación $\llbracket n, m \rrbracket$ para los segmentos $\{k \in \mathbb{N} \mid n \leq k \leq m\}$.

Funciones. Usamos las expresiones «función», «aplicación» y «asignación» de forma indistinta.

Restricciones y correstricciones. Sean X y Y dos conjuntos y sea $f : X \rightarrow Y$ una función entre ellos. Sea Y' un subconjunto de Y tal que $f(X) \subset Y'$. Entonces obtenemos una versión «correstringida» de f , con codominio Y' , a la cual denotamos $f|^{Y'} : X \rightarrow Y'$. Sea $A \subset X$ un subconjunto arbitrario. Entonces obtenemos una versión «restringida» de f , con dominio A , a la cual denotamos $f|_A : A \rightarrow Y$. En otras palabras, $f|_A = f \circ \iota$, donde $\iota : A \rightarrow X$ es la función de inclusión.

Función característica. Si X es un conjunto y $A \subset X$ es un subconjunto, entonces denotamos χ_A a la función característica de A (esto es, la función de X en \mathbb{C} que vale 1 en A y 0 en $X \setminus A$).

Función Identidad. Dado un conjunto X , denotamos $\text{Id}_X : X \rightarrow X$ a su función identidad.

Delta de Kronecker. Dado un conjunto de índices \mathcal{I} y dos elementos $i, j \in \mathcal{I}$, el símbolo $\delta_{i,j}$ es la «delta de Kronecker», dada por $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

Abusos notacionales. En general no haremos distinción notacional entre un objeto con cierta estructura extra y ese mismo objeto sin la estructura extra. Por ejemplo, si $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio normado cuya norma $\|\cdot\|$ ya ha sido especificada o está implícita por el contexto, lo denotaremos simplemente E . Lo mismo aplica a los espacios de medida y sus conjuntos subyacentes, y a los espacios topológicos y sus conjuntos subyacentes.

Espacios de Funciones. Dados dos espacios topológicos X y Y , denotamos $\mathcal{C}(X, Y)$ al espacio de funciones continuas de X en Y con la topología compacto-abierta.

Curvas. Una curva en un espacio X es una función continua $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$. Decimos que la curva es cerrada si $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Cuerpo base. El cuerpo base de todos nuestros espacios vectoriales (y por consiguiente de todas nuestras álgebras) es el cuerpo complejo \mathbb{C} .

Álgebra de funciones. Dado un espacio topológico X , denotamos $C(X)$ al álgebra de funciones continuas de X en \mathbb{C} .

Proyecciones. Si E es un espacio vectorial y $E = E' \oplus E''$, llamamos «proyección a E' a lo largo de E'' » a la única aplicación lineal idempotente $P : E \rightarrow E$ con imagen E' y núcleo E'' , esto es, a la aplicación lineal $P : E \rightarrow E$ dada por $P(x) = x$ cuando $x \in E'$ y por $P(x) = 0$ cuando $x \in E''$. La «proyección complementaria» es la proyección a E'' a lo largo de E' , y es precisamente $\text{Id}_E - P$.

Subespacios generados. Si E es un espacio vectorial y $X \subset E$ es un subconjunto, entonces $\langle X \rangle$ denota al subespacio de E generado por X .

Composición de aplicaciones lineales. Sean E_1, E_2 y E_3 espacios vectoriales y sean $T : E_1 \rightarrow E_2$ y $S : E_2 \rightarrow E_3$ aplicaciones lineales. Entonces a menudo escribiremos ST en lugar de $S \circ T$.

Álgebras. Todas nuestras álgebras son asociativas y unitales. Si \mathcal{A} es un álgebra, denotaremos $1_{\mathcal{A}}$ a su neutro multiplicativo, y cuando \mathcal{A} esté clara por el contexto, escribiremos simplemente 1. (Lo mismo aplica a la exponencial $\exp = \exp_{\mathcal{A}}$ cuando \mathcal{A} es un álgebra de Banach).

Conmutadores. Dada un álgebra \mathcal{A} y dos elementos $x, y \in \mathcal{A}$, la expresión $[x, y]$ denota al «conmutador» $xy - yx$.

Grupo de unidades. El grupo de unidades de un álgebra \mathcal{A} se denota \mathcal{A}^\times . En particular, $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $C(X)^\times = \{f \in C(X) \mid f(x) \neq 0 \text{ para todo } x \in X\}$.

Espacios normados. Si E es un espacio normado, $x \in E$ y $\delta > 0$, entonces $B(x, \delta)$ denota la bola centrada en x de radio δ . Cuando queramos recordar al lector el espacio en el cual se encuentra dicha bola, la escribiremos como $B(x, \delta)_E$. En el caso $E = \mathbb{C}$ (con la norma dada por el módulo) escribimos $\mathbb{D} := B(0, 1)_{\mathbb{C}}$ y $r\mathbb{D} := B(0, r)_{\mathbb{C}}$ para cualquier $r > 0$. La frontera de \mathbb{D} es el círculo unidad $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Prerrequisitos

Esta monografía debería poder ser leída y comprendida por cualquier estudiante de matemática que tenga familiaridad con los conceptos básicos de la Topología, el Álgebra Abstracta y el Análisis (Real y Funcional).

Análisis Funcional

1.1. Espacios de Banach

To a large extent, modern mathematics is concerned with the study of general structures. The essential thing is finding the right generalization. Insufficient generality can be too restrictive and a great deal of generality may result in a situation where little can be proved and applied. The space introduced by Banach, especially pointing out completeness, attests to his genius; he hit the traditional nail on the head. — K. Ciesielski [3]

Comenzamos introduciendo a los principales protagonistas del Análisis Funcional:

DEFINICIÓN 1. Un **espacio de Banach** es un espacio vectorial normado $(E, \| \cdot \|)$ cuya métrica inducida

$$d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$d(x, x') := \|x' - x\|$$

es completa (i.e. tal que toda sucesión de Cauchy converge).

LEMA 2. *Un espacio normado E es de Banach si y sólo si toda serie absolutamente convergente de vectores converge en E , esto es, si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_{n \geq 0} \subset E$ con $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ existe un $y \in E$ tal que $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N x_n = y$.*

DEMOSTRACIÓN. [6, Proposition 0.4.3]. □

EJEMPLO 3. \mathbb{C}^n es un espacio de Banach con la norma euclídea, y de hecho todas las normas sobre un espacio vectorial de dimensión finita inducen la misma topología. [Lo primero es una consecuencia de la completitud de \mathbb{R} y de \mathbb{C} , y lo segundo puede ser visto como un corolario del Teorema de la Inversa Acotada (Teorema 16)]

EJEMPLO 4. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y sea $p \geq 1$. Consideremos el espacio vectorial de las funciones medibles $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ tales que $\int_X |f|^p d\mu < \infty$, dividido por la relación de equivalencia

$$f_0 \equiv f_1 \iff f_0 = f_1 \text{ en casi todo punto}$$

y munido de la «norma p »

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

(la cual está bien definida y es una norma). Este espacio normado se denota $L^p(X)$ y es un espacio de Banach [6, Theorem 4.1.4].

Tomando $X = \mathbb{N}$, $\Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y $\mu(A) = |A|$ (la «medida de contar»), obtenemos los espacios de Banach ℓ^p de sucesiones absolutamente p -sumables, con norma

$$\|(x_n)_{n \geq 0}\|_p := \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$$

Si en vez de \mathbb{N} tomamos \mathbb{Z} , obtenemos los espacios de Banach $\ell^p(\mathbb{Z})$.

EJEMPLO 5. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Una función medible $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ es **esencialmente acotada** en caso de que exista una constante $M \geq 0$ (llamada una «**cota esencial** de f ») tal que $|f(x)| \leq M$ «para casi todo $x \in X$ », esto es, tal que

$$\mu(|f|^{-1}((M, +\infty))) \stackrel{\text{i.e.}}{=} \mu(\{x \in X \mid |f(x)| > M\}) = 0$$

El ínfimo de todas las cotas esenciales es nuevamente una cota esencial, y la notamos $\|f\|_\infty$. Consideremos el espacio vectorial de las funciones medibles $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ esencialmente acotadas, dividido por la misma relación de equivalencia que en el Ejemplo anterior. Entonces $\|-\|_\infty$ define una norma sobre este espacio, y el espacio normado resultante es un espacio de Banach [6, Theorem 4.1.7] al cual denotamos $L^\infty(X)$. En particular, tomando $X = \mathbb{N}$, $\Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y $\mu(A) = |A|$ obtenemos el espacio de Banach ℓ^∞ de sucesiones acotadas, con norma

$$\|(x_n)_{n \geq 0}\|_\infty = \sup_{n \geq 0} |x_n|$$

(y análogamente para $X = \mathbb{Z}$). Estos espacios de Banach son también álgebras, ya que para cualesquiera $f, g \in L^\infty(X)$ se tiene $fg \in L^\infty(X)$ con $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$. De esta última condición se sigue fácilmente que la aplicación bilineal dada por el producto $\cdot : L^\infty(X) \times L^\infty(X) \rightarrow L^\infty(X)$ es continua.

EJEMPLO 6. Si X es un conjunto, entonces las funciones acotadas $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ con la norma supremo

$$\|f\|_{\text{sup}} := \sup_{x \in X} |f(x)|$$

forman un espacio de Banach $B(X)$ [6, Example 0.4.1]. Si X es un espacio topológico, entonces las funciones *continuas* acotadas con la norma supremo

$$\|f\|_{\text{sup}} := \sup_{x \in X} |f(x)|$$

forman un espacio de Banach $C_b(X)$ [6, p. 25]. (En particular, tomando $X = \mathbb{N}$ con la topología discreta, volvemos a obtener ℓ^∞). Si X es compacto, toda función continua $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ es acotada y alcanza un máximo, en cuyo caso obtenemos el espacio de Banach $C(X)$ de funciones continuas, con la norma máximo

$$\|f\|_{\text{máx}} := \max_{x \in X} |f(x)|$$

OBSERVACIÓN 7. Sea X un espacio topológico compacto y a la vez un espacio de medida tal que para todo abierto es medible y todo abierto no vacío $A \subset X$ posee medida positiva. Entonces, para toda función $f \in C(X)$, es claro que f es medible y que $f \in L^\infty(X)$. Más aún, es

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{\text{máx}}$$

En efecto, como $\|f\|_{\text{máx}}$ es una cota de $|f|$, es un particular una cota esencial de $|f|$, por lo cual $\|f\|_\infty \leq \|f\|_{\text{máx}}$. Resta ver que no hay ninguna cota esencial más chica. Sea entonces $M < \|f\|_{\text{máx}}$. Por la continuidad de $|f|$, el conjunto $|f|^{-1}((M, +\infty))$ es abierto en X , y si $x \in X$ es un punto donde $|f|$ alcanza su máximo $\|f\|_{\text{máx}}$, tenemos $|f|(x) = \|f\|_{\text{máx}} > M$, con lo cual el abierto $|f|^{-1}((M, +\infty))$ es no vacío. Luego este abierto tiene medida no vacía, mostrando que ninguna constante $M < \|f\|_{\text{máx}}$ es una cota esencial de f .

Recordemos que una aplicación lineal $T : E_1 \rightarrow E_2$ entre dos espacios normados es **acotada** en caso de que exista una constante $M \geq 0$ tal que $\|Tx\| \leq M \cdot \|x\|$ para todo $x \in E_1$. Llamamos **norma de T** (denotada $\|T\|$) a la menor de dichas constantes. Equivalentemente,

$$(1.1.1) \quad \begin{aligned} \|T\| &= \sup_{x \in E_1 \setminus \{0\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in E_1 \setminus \{0\}} \left\| \frac{1}{\|x\|} T(x) \right\| = \sup_{x \in E_1 \setminus \{0\}} \left\| T \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \\ &= \sup_{x \in E_1 : \|x\|=1} \|T(x)\| = \sup_{x \in E_1 : \|x\| \leq 1} \|T(x)\| \end{aligned}$$

y T es acotada si y sólo si estos supremos son finitos.

OBSERVACIÓN 8. Si $T : E_1 \rightarrow E_2$ y $S : E_2 \rightarrow E_3$ son aplicaciones lineales acotadas, entonces

$$\|S \circ T(x)\| = \|S(T(x))\| \leq \|S\| \|T(x)\| \leq \|S\| \|T\| \|x\|$$

y por lo tanto

$$\|S \circ T\| \leq \|S\| \|T\|$$

PROPOSICIÓN 9. Sea $T : E_1 \rightarrow E_2$ una aplicación lineal entre espacios normados. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) $T : E_1 \rightarrow E_2$ es acotada
- (b) $T : E_1 \rightarrow E_2$ es Lipschitz-continua (con constante de Lipschitz $\|T\|$)
- (c) $T : E_1 \rightarrow E_2$ es uniformemente continua
- (d) $T : E_1 \rightarrow E_2$ es continua
- (e) $T : E_1 \rightarrow E_2$ es continua en 0

DEMOSTRACIÓN. Las implicaciones $(a) \implies (b) \implies (c) \implies (d) \implies (e)$ son inmediatas. Para ver la implicación $(e) \implies (a)$, notemos que (e) significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $\|x - 0\| \leq \delta$ entonces $\|T(x) - T(0)\| \leq \varepsilon$. Tomando $\varepsilon = 1$ y notando que $T(0) = 0$, vemos que existe un $\delta > 0$ tal que si $\|x\| \leq \delta$ entonces $\|T(x)\| \leq 1$. Por la homogeneidad de las normas, esto equivale a decir que si $\|x\| \leq 1$ entonces $\|T(x)\| \leq \frac{1}{\delta}$, y esto implica que el supremo (1.1.1) es finito. \square

EJEMPLO 10. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida con $\mu(X) < \infty$. Es claro que si $f \in L^\infty(X)$ entonces $f \in L^p(X)$ para cualquier $p \geq 1$, puesto que en tal caso es

$$\int |f|^p d\mu \leq \int \|f\|_\infty^p d\mu = \|f\|_\infty^p \mu(X) < \infty$$

Además, tomando raíces p -ésimas nos queda

$$\|f\|_p \leq \mu(X)^{1/p} \|f\|_\infty$$

por lo cual la inclusión $L^\infty(X) \xrightarrow{\subset} L^p(X)$, vista como una aplicación lineal entre espacios de Banach, es acotada.

Si además X es un espacio topológico compacto que satisface las hipótesis del Ejemplo 7, entonces obtenemos la inclusión

$$\iota : C(X) \xrightarrow{\subset} L^p(X)$$

y ésta es también acotada.

PROPOSICIÓN 11. Las aplicaciones lineales acotadas $T : E_1 \rightarrow E_2$ conforman un espacio normado con la norma (1.1.1), al cual denotamos $\mathcal{L}(E_1, E_2)$. Si $E_1 = E_2 = E$, escribimos simplemente $\mathcal{L}(E)$.

DEMOSTRACIÓN. [6, Theorem 8.2.1]. \square

EJEMPLO 12. Si E_1 es un espacio normado cualquiera y E_2 es un espacio de Banach, entonces $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ es un espacio de Banach [6, Theorem 8.2.2]. En particular, tomando $E_2 = \mathbb{C}$, obtenemos para todo espacio normado E su **espacio dual (topológico)**

$$E^* := \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$$

el cual es siempre un espacio de Banach.

EJEMPLO 13. Si E es un espacio de Banach y E' es un subespacio de E , entonces E' es un espacio de Banach (con la norma heredada de E) si y sólo si es un subespacio cerrado de E . (Esto se sigue fácilmente de las definiciones).

EJEMPLO 14. Si E es un espacio normado y E' es un subespacio cerrado de E , entonces el cociente E/E' es un espacio normado, con la norma

$$\|x + E'\| := \inf_{y \in E'} \|x - y\|$$

(Si E' no es cerrado, la fórmula precedente define una seminorma y no una norma). Además, si E es un espacio de Banach, el cociente E/E' también lo es [6, Theorem 8.4.5].

Desde luego, la proyección al cociente $\pi : E \rightarrow E/E'$ es acotada con norma a lo sumo 1, ya que

$$\|\pi(x)\| = \|x + E'\| = \inf_{y \in E'} \|x - y\| \leq \|x - 0\| = \|x\|$$

Se tiene entonces la siguiente inclusión:

$$\pi(B(0, 1)_E) \subset B(0, 1)_{E/E'}$$

A continuación veremos que esta inclusión es de hecho una igualdad. Si $\|x + E'\|_{E/E'} < 1$, entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que $\|x + E'\|_{E/E'} + \varepsilon < 1$, y como por definición es

$$\|x + E'\|_{E/E'} := \inf_{y \in E'} \|x - y\|_E$$

podemos tomar un $y \in E'$ tal que

$$\|x - y\|_E - \|x + E'\|_{E/E'} < \varepsilon$$

y por lo tanto

$$\|x - y\|_E < \|x + E'\|_{E/E'} + \varepsilon < 1$$

esto es,

$$x - y \in B(0, 1)_E$$

Como $y \in E'$, tenemos

$$x + E' = x - y + E' = \pi(x - y) \in \pi(B(0, 1)_E)$$

Al ser nuestro $x + E'$ un elemento arbitrario de $B(0, 1)_{E/E'}$, concluimos que

$$B(0, 1)_{E/E'} \subset \pi(B(0, 1)_E)$$

Resumiendo, tenemos:

$$(1.1.2) \quad \pi(B(0, 1)_E) = B(0, 1)_{E/E'}$$

y en particular, $\|\pi\| = 1$.

Sea ahora $T : E_1 \rightarrow E_2$ una aplicación lineal acotada entre dos espacios normados, y sea E'_1 un subespacio cerrado de E_1 tal que $E'_1 \subset \ker(T)$. Entonces a nivel algebraico podemos «pasar al cociente» y obtener una aplicación lineal

$$\bar{T} : E_1/E'_1 \rightarrow E_2$$

tal que $\bar{T} \circ \pi = T$, donde $\pi : E_1 \rightarrow E_1/E'_1$ es la proyección al cociente. Por (1.1.2) tenemos

$$\bar{T}(B(0, 1)_{E_1/E'_1}) = \bar{T}(\pi(B(0, 1)_{E_1})) = T(B(0, 1)_{E_1})$$

y como T es acotada, este conjunto es acotado, mostrando que \bar{T} es también acotada, con norma $\|\bar{T}\| = \|T\|$.

EJEMPLO 15. Si E y E' son espacios normados, entonces podemos considerar su suma directa externa $E \oplus E'$ con la norma $\|(x, y)\| := \|x\| + \|y\|$. Si E_1 y E_2 son espacios de Banach, entonces $E_1 \oplus E_2$ también lo es [6, Theorem 8.4.2(a)]. (De aquí en adelante, $E \oplus E'$ denotará la suma directa externa con esta norma, y para las sumas directas internas utilizaremos el símbolo \oplus).

Un teorema fundamental en la teoría de los espacios de Banach es el siguiente:

TEOREMA 16. (Teorema de la Inversa Acotada). Sea $T : E_1 \rightarrow E_2$ un isomorfismo lineal acotado entre espacios de Banach. Entonces su inversa $T^{-1} : E_2 \rightarrow E_1$ es también acotada. Equivalentemente, T es un homeomorfismo (ver Proposición 9).

DEMOSTRACIÓN. [6, Theorem 8.7.6]. □

DEFINICIÓN 17. Sean E' y E'' subespacios cerrados de un espacio de Banach E , y supongamos que $E = E' \oplus E''$ (esto es, $E' \cap E'' = \{0\}$ y $\langle E' \cup E'' \rangle = E$). Entonces decimos que E'' es un **complemento** de E' [en E], y que E' y E'' son **complementarios** [en E].

PROPOSICIÓN 18. Sea E un espacio de Banach y sea E' un subespacio de E .

(a) Si $\dim(E') < \infty$, entonces E' es un subespacio cerrado, y admite un complemento E'' en E .

(b) Si $\text{codim}(E') < \infty$ y E' es cerrado en E , entonces E' admite un complemento E'' en E .

DEMOSTRACIÓN. [12, Proposition 4.16]. □

PROPOSICIÓN 19. Sean E' y E'' subespacios complementarios de un espacio de Banach E . El isomorfismo lineal canónico $\Theta : E' \oplus E'' \rightarrow E$ dado por $(x, y) \mapsto x + y$ es un homeomorfismo.

DEMOSTRACIÓN. Como $\|\Theta(x, y)\| = \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| = \|(x, y)\|$, la aplicación Θ es acotada. Por los Ejemplos 13 y 15, $E' \oplus E''$ es un espacio de Banach, por lo cual Θ es un isomorfismo lineal acotado entre dos espacios de Banach. Por el Teorema de la Inversa Acotada, es entonces un homeomorfismo. □

COROLARIO 20. Sean E' y E'' subespacios complementarios de un espacio de Banach E . Sea $P : E \rightarrow E$ la proyección a E' a lo largo de E'' . Entonces P es una aplicación lineal acotada, y por lo tanto también lo es la proyección complementaria $\text{Id}_E - P : E \rightarrow E$, con núcleo E' e imagen E'' .

DEMOSTRACIÓN. Usando la Proposición 9 y la Proposición 19, vemos que P es acotada si y sólo si P es continua, que P es continua si y sólo si $P \circ \Theta$ es continua, y que $P \circ \Theta$ es continua si y sólo si $P \circ \Theta$ es acotada. Y en efecto, $P \circ \Theta$ es acotada:

$$\|P \circ \Theta(x, y)\| = \|x\| \leq \|x\| + \|y\| = \|(x, y)\|$$

□

PROPOSICIÓN 21. Sean E_1 y E_2 espacios de Banach. Sea $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ una aplicación de rango finito n . Entonces existen vectores $y^1, \dots, y^n \in E_2$ y funcionales lineales acotados $\phi^1, \dots, \phi^n \in E_1^*$ tales que

$$T(x) = \sum_{k=1}^n \phi^k(x) y^k$$

para todo $x \in E_1$.

DEMOSTRACIÓN. Para $n = 0$ no hay nada que demostrar. Si $n = 1$, entonces $\text{im}(T)$ es un espacio vectorial de dimensión 1, digamos $\text{im}(T) = \langle y^1 \rangle$. La aplicación $R_{y^1} : \mathbb{C} \rightarrow \text{im}(T)$ dada por $\lambda \mapsto \lambda y^1$ es claramente un isomorfismo lineal acotado, y por el Teorema de la Inversa Acotada su inversa $R_{y^1}^{-1} : \text{im}(T) \rightarrow \mathbb{C}$ es también un isomorfismo lineal acotado. Luego podemos tomar

$$\phi^1 := R_{y^1}^{-1} \circ T|_{\text{im}(T)} : E_1 \rightarrow \mathbb{C}$$

y con esta definición, ϕ^1 resulta un funcional lineal acotado que satisface

$$T(x) = T|_{\text{im}(T)}(x) = R_{y^1} \circ R_{y^1}^{-1} \circ T|_{\text{im}(T)}(x) = R_{y^1}(\phi^1(x)) = \phi^1(x) y^1$$

Habiendo establecido el caso $n = 1$, basta ahora con ver que toda aplicación lineal acotada T de rango finito n se descompone como la suma de n aplicaciones lineales acotadas de rango 1. Esto es claro para $n = 0$ y $n = 1$, y procediendo inductivamente basta con ver que todo $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ de rango $n + 1$ se descompone como $T = T' + T''$, con $T', T'' \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ de rangos n y 1 respectivamente. En efecto, si $\dim(\text{im}(T)) = n + 1$, podemos escribir a $\text{im}(T)$ como la suma directa de dos subespacios, digamos $\text{im}(T) = V' \oplus V''$, con $\dim(V') = n$ y $\dim(V'') = 1$. Como V' y V'' son de dimensión finita, son subespacios cerrados de $\text{im}(T)$, y al estar en suma directa son complementarios en $\text{im}(T)$. Sea $\iota : \text{im}(T) \rightarrow E_2$ la inclusión, y sea $P \in \mathcal{L}(\text{im}(T))$ la proyección a V' a lo largo de V'' . Entonces $\text{Id}_{\text{im}(T)} - P \in \mathcal{L}(\text{im}(T))$ es la proyección complementaria, esto es, la proyección a V'' a lo largo de V' , y tomando

$$T' := \iota P T|_{\text{im}(T)}$$

y

$$T'' := \iota(\text{Id}_{\text{im}(T)} - P)T^{\text{im}(T)}$$

vemos que en efecto T' y T'' son aplicaciones acotadas de rangos n y 1 respectivamente, tales que

$$\begin{aligned} T &= \iota T^{\text{im}(T)} \\ &= \iota(P + \text{Id}_{\text{im}(T)} - P)T^{\text{im}(T)} \\ &= \iota P T^{\text{im}(T)} + \iota(\text{Id}_{\text{im}(T)} - P)T^{\text{im}(T)} \\ &= T' + T'' \end{aligned}$$

□

DEFINICIÓN 22. Sean E_1 y E_2 espacios de Banach. Entonces definimos el siguiente subconjunto de $\mathcal{L}(E_1, E_2)$:

$$\mathcal{GL}(E_1, E_2) := \{T \in \mathcal{L}(E_1, E_2) : \exists S \in \mathcal{L}(E_2, E_1) : ST = \text{Id}_{E_1} \text{ y } TS = \text{Id}_{E_2}\}.$$

En el caso en que $E_1 = E_2 = E$, escribimos simplemente $\mathcal{GL}(E)$.

LEMA 23. Sea E un espacio de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(E)$ tal que $\|T\| < 1$. Entonces $\text{Id}_E - T$ es inversible.

DEMOSTRACIÓN. Si $\|T\| < 1$, la serie $\sum_{n \geq 0} T^n$ converge absolutamente, y por lo tanto converge en $\mathcal{L}(E)$ (por el Ejemplo 12 y el Lema 2). Como $\|T\| < 1$, por la Observación 8 tenemos

$$0 \leq \|T^{N+1}\| \leq \|T\|^{N+1} \longrightarrow 0 \text{ cuando } N \rightarrow \infty$$

y por lo tanto la serie $\sum_{n \geq 0} T^n$ es un inversa a ambos lados de $\text{Id}_E - T$:

$$\begin{aligned} (\text{Id}_E - T) \left(\sum_{n \geq 0} T^n \right) &= \lim_{N \rightarrow \infty} (\text{Id}_E - T) \left(\sum_{n=0}^N T^n \right) \\ \left(\sum_{n \geq 0} T^n \right) (\text{Id}_E - T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=0}^N T^n \right) (\text{Id}_E - T) \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} (\text{Id}_E - T) \left(\sum_{n \geq 0} T^n \right) \\ \left(\sum_{n \geq 0} T^n \right) (\text{Id}_E - T) \end{aligned}} \right\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=0}^N T^n \right) - \left(\sum_{n=1}^{N+1} T^n \right)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \text{Id}_E - T^{N+1}$$

$$= \text{Id}_E$$

□

PROPOSICIÓN 24. Dados dos espacios de Banach E_1 y E_2 , el conjunto $\mathcal{GL}(E_1, E_2)$ es abierto en $\mathcal{L}(E_1, E_2)$.

DEMOSTRACIÓN. El Lema anterior nos dice que

$$(1.1.3) \quad B(\text{Id}_{E_1}, 1)_{\mathcal{L}(E_1)} \subset \mathcal{GL}(E_1)$$

Dado un $A \in \mathcal{GL}(E_1, E_2)$, queremos ver que A es un punto interior de $\mathcal{GL}(E_1, E_2)$. A tal fin, consideremos el isomorfismo lineal

$$L_A : \mathcal{L}(E_1) \rightarrow \mathcal{L}(E_1, E_2),$$

dado por

$$T \mapsto AT$$

y con inversa

$$L_{A^{-1}} : \mathcal{L}(E_1, E_2) \rightarrow \mathcal{L}(E_1)$$

dada por

$$T' \mapsto A^{-1}T'$$

Por la Observación 8, ambas aplicaciones lineales son acotadas, con lo cual L_A es un homeomorfismo. Además, es claro que $L_A(\mathcal{GL}(E_1)) \subset \mathcal{GL}(E_1, E_2)$. Luego si aplicamos L_A a ambos lados de (1.1.3), obtenemos

$$L_A(B(\text{Id}_{E_1}, 1)) \subset L_A(\mathcal{GL}(E_1)) \subset \mathcal{GL}(E_1, E_2)$$

Ahora bien: la bola $B(\text{Id}_{E_1}, 1)$ es una vecindad de Id_{E_1} en $\mathcal{L}(E_1)$ y la aplicación $L_A : \mathcal{L}(E_1) \rightarrow \mathcal{L}(E_1, E_2)$ es un homeomorfismo, por lo cual la imagen $L_A(B(\text{Id}_{E_1}, 1))$ es una vecindad de $L_A(\text{Id}_{E_1}) = A$ en $\mathcal{L}(E_1, E_2)$. Luego A es un punto interior de $\mathcal{GL}(E_1, E_2)$, como queríamos demostrar. \square

DEFINICIÓN 25. Sea E un espacio de Banach. Un **operador** sobre E es un endomorfismo lineal acotado de E , esto es, un elemento $T \in \mathcal{L}(E)$.

Los operadores $T : E \rightarrow E$, a diferencia de las aplicaciones lineales entre espacios vectoriales distintos $T : E \rightarrow E'$, nos dan la posibilidad de comparar un vector $x \in E$ con su imagen $Tx \in E$. En particular, fijado un operador $T \in \mathcal{L}(E)$ y dado un escalar $\lambda \in \mathbb{C}$, podemos intentar hallar vectores no nulos $x \in E \setminus \{0\}$ tales que¹ $T(x) = \lambda x$. Esto equivale a hallar elementos no nulos del núcleo del operador $T - \lambda \text{Id}_E$. Los $\lambda \in \mathbb{C}$ para los cuales esto es posible son precisamente los $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $\ker(T - \lambda \text{Id}_E) \neq 0$, y se denominan los **autovalores** de T . Como

$$(1.1.4) \quad \ker(T') \neq 0 \implies T' \notin \mathcal{GL}(E),$$

el conjunto de autovalores de T está incluido en el **espectro** de T , el cual definimos a continuación:

DEFINICIÓN 26. Sea E un espacio de Banach. El **espectro** de un operador $T \in \mathcal{L}(E)$ es el conjunto

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda \text{Id}_E \notin \mathcal{GL}(E)\}$$

Su complemento

$$\rho(T) := \mathbb{C} \setminus \sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda \text{Id}_E \in \mathcal{GL}(E)\}$$

se denomina el **conjunto resolvente** de T .

En dimensión finita, el conjunto de autovalores coincide con el espectro, porque para operadores de dimensión finita la implicación (1.1.4) es una equivalencia. Pero en dimensión infinita, hay operadores no inversibles que sin embargo tienen núcleo trivial. Por ejemplo, para todo $p \geq 1$, el **operador «shift»** $S \in \mathcal{L}(\ell^p)$ dado por

$$(x_0, x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_0, x_1, \dots)$$

posee núcleo trivial, pero no es inversible puesto que no es ni suryectivo. Luego, cuando la dimensión es infinita, el espectro es en general un conjunto más grande que el conjunto de autovalores.

PROPOSICIÓN 27. Sea E un espacio de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(E)$ un operador. Entonces su espectro $\sigma(T)$ es compacto.

DEMOSTRACIÓN. Si $|\lambda| > \|T\|$, es $\|\frac{T}{\lambda}\| = \frac{1}{|\lambda|}\|T\| < 1$, por lo cual el operador $\text{Id}_E - \frac{T}{\lambda}$ resulta inversible por el Lema 23. Como $|\lambda| > \|T\| \geq 0$, tenemos $-\lambda \neq 0$, con lo cual el operador $T - \lambda \text{Id}_E = -\lambda(\text{Id}_E - \frac{T}{\lambda})$ también es inversible. En resumen, si $|\lambda| > \|T\|$ entonces $\lambda \in \rho(T)$. Luego si $\lambda \in \sigma(T)$ ha de ser $|\lambda| \leq \|T\|$, lo cual demuestra que $\sigma(T)$ es acotado.

Resta ver que $\sigma(T)$ es cerrado, o lo que es lo mismo, que $\rho(T)$ es abierto. Pero $\rho(T)$ no es más que la preimagen de $\mathcal{GL}(E)$ bajo la aplicación continua $\mathbb{C} \rightarrow \mathcal{L}(E)$ dada por $\lambda \mapsto T - \lambda I$, y $\mathcal{GL}(E)$ es abierto en $\mathcal{L}(E)$ por la Proposición 24. \square

Para concluir esta sección, incluimos un lema técnico sobre la convergencia puntual de operadores que utilizaremos más adelante.

LEMA 28. Sea E un espacio de Banach y sea E' un subespacio de E . Sea $T \in \mathcal{L}(E)$ y sea $(T_k)_{k \geq 0} \subset \mathcal{L}(E)$ una sucesión de operadores tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k(x) = T(x)$$

para todo $x \in E'$ y tal que la sucesión de normas $\|T_k\|$, $k \geq 0$ está acotada por una constante C . Entonces también se tiene

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k(x) = T(x)$$

para todo $x \in \overline{E'}$.

¹Estos elementos se conocen como **autovectores de autovalor** λ

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in \overline{E'}$, y sea $(x_n)_{n \geq 0} \subset E'$ una sucesión de elementos de E' tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \|T(x) - T_k(x)\| &= \|T(x) - T(x_n) + T(x_n) - T_k(x_n) + T_k(x_n) - T_k(x)\| \\ &\leq \|T(x) - T(x_n)\| + \|T(x_n) - T_k(x_n)\| + \|T_k(x_n) - T_k(x)\| \\ &= \|T(x - x_n)\| + \|T(x_n) - T_k(x_n)\| + \|T_k(x_n - x)\| \\ &\leq \|T\| \|x - x_n\| + \|T(x_n) - T_k(x_n)\| + \|T_k\| \|x_n - x\| \\ &= (\|T\| + \|T_k\|) \|x - x_n\| + \|T(x_n) - T_k(x_n)\| \\ &\leq (\|T\| + C) \|x - x_n\| + \|T(x_n) - T_k(x_n)\| \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $\varepsilon > 0$. Tomemos un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|x - x_n\| \leq \frac{\varepsilon/2}{\|T\|+C}$. Habiendo fijado dicho valor de n , tomemos $K \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq K$ se tiene $\|T(x_n) - T_k(x_n)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. A partir de las desigualdades precedentes vemos que para todo $k \geq K$ es

$$\|T(x) - T_k(x)\| \leq (\|T\| + C) \frac{\varepsilon/2}{\|T\| + C} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ era arbitrario, esto muestra que $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k(x) = T(x)$. □

1.2. Espacios de Hilbert

*Dr. von Neumann, ich möchte gern wissen, was ist dann eigentlich ein Hilbertscher Raum?*² —
David Hilbert (citado en [8])

Recordamos que un **producto interno** sobre un espacio vectorial E es una aplicación $\langle -, - \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ tal que para cualesquiera $x, x_0, x_1 \in E$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ se tiene

$$\begin{aligned} \langle x_0 + \lambda x_1, x \rangle &= \langle x_0, x \rangle + \lambda \langle x_1, x \rangle \\ \langle x_0, x_1 \rangle &= \overline{\langle x_1, x_0 \rangle} \end{aligned}$$

(en particular, $\langle x, x_0 + \lambda x_1 \rangle = \langle x, x_0 \rangle + \bar{\lambda} \langle x, x_1 \rangle$ y $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$) y

$$\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$$

Todo producto interno sobre E induce una norma, dada por la fórmula

$$(1.2.1) \quad \|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Por lo tanto todo espacio con producto interno es en particular un espacio normado, con la norma inducida por el producto interno mediante dicha (1.2.1).

OBSERVACIÓN 29. Al igual que sucede con las normas en un espacio normado, todo producto interno sobre un espacio es continuo (en ambas variables) respecto a la métrica inducida por la norma (0.0.5).

DEFINICIÓN 30. Sea E un espacio vectorial con producto interno $\langle -, - \rangle$. Decimos que es un **espacio de Hilbert** si el espacio normado asociado es un espacio de Banach. En otras palabras, E es un espacio de Hilbert si y sólo si E es completo con la métrica inducida por la norma $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

²«Dr. von Neumann, me gustaría mucho saber: ¿qué es [realmente] un espacio de Hilbert?»

EJEMPLO 31. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Entonces $L^2(X)$ es un espacio de Hilbert, con el producto interno dado por

$$\langle f, g \rangle := \int_X f \bar{g} d\mu$$

(La norma inducida es claramente la norma definida en el Ejemplo 4). En particular, ℓ^2 es un espacio de Hilbert, con producto interno dado por

$$\langle (x_n)_{n \geq 0}, (y_n)_{n \geq 0} \rangle := \sum_{n \geq 0} x_n \bar{y}_n$$

y análogamente para $\ell^2(\mathbb{Z})$.

DEFINICIÓN 32. Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert. Dado un subconjunto $X \subset \mathcal{H}$, definimos su **complemento ortogonal** X^\perp como

$$X^\perp := \{x' \in \mathcal{H} \mid \forall x \in X, \langle x, x' \rangle = 0\}$$

OBSERVACIÓN 33. Es claro que X^\perp es cerrado y que $X^\perp = \langle X \rangle^\perp = \overline{\langle X \rangle}^\perp$, y de hecho X^\perp es un complemento de $\overline{\langle X \rangle}$.

Una base de un espacio vectorial E es un conjunto linealmente independiente de vectores $(b_i)_{i \in I}$ tal que todo elemento de E puede expresarse como una combinación lineal de los $(b_i)_{i \in I}$. En este sentido, es un hecho conocido que todo espacio vectorial admite una base. Sin embargo, al hacer análisis querríamos tener una noción distinta de base, que admita «combinaciones lineales infinitas». Los espacios de Hilbert ofrecen una noción muy cómoda de «bases» de este estilo, llamadas «bases de Hilbert»:

DEFINICIÓN 34. Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert. Un conjunto $\mathcal{B} \subset \mathcal{H}$ se dice **ortonormal** si para cualesquiera $b, b' \in \mathcal{B}$ se tiene

$$\langle b, b' \rangle = \delta_{b, b'} \stackrel{\text{i.e.}}{=} \begin{cases} 0 & \text{si } b \neq b' \\ 1 & \text{si } b = b' \end{cases}$$

Es fácil ver que todo conjunto ortonormal es linealmente independiente. Un conjunto ortonormal es una **base de Hilbert** (o **base ortonormal**, o simplemente **base**³) si cumple cualquiera de las condiciones equivalentes de la siguiente Proposición:

PROPOSICIÓN 35. Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert y sea $\mathcal{B} \subset \mathcal{H}$ un conjunto ortonormal. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $\mathcal{B}^\perp = \{0\}$

(b) Para todo $x \in E$ se tiene

$$x = \sum_{b \in \mathcal{B}} \langle x, b \rangle b$$

(con una cantidad a lo sumo numerable de coeficientes $\langle x, b \rangle$ no nulos)

(c) $\langle \mathcal{B} \rangle$ es denso en \mathcal{H} .

En caso de que valgan estas afirmaciones, es

$$\|x\|^2 = \sum_{b \in \mathcal{B}} |\langle x, b \rangle|^2$$

DEMOSTRACIÓN. Para (a) \implies (b) véase [6, Theorem 11.3.4]. Las implicaciones (b) \implies (c) \implies (a) son inmediatas. Por último,

$$\|x\|^2 = \left\langle \sum_{b \in \mathcal{B}} \langle x, b \rangle b, \sum_{b' \in \mathcal{B}} \langle x, b' \rangle b' \right\rangle = \sum_{b, b' \in \mathcal{B}} \langle x, b \rangle \overline{\langle x, b' \rangle} \underbrace{\langle b, b' \rangle}_{=\delta_{b, b'}} = \sum_{b \in \mathcal{B}} |\langle x, b \rangle|^2$$

□

³Sin embargo, las bases de Hilbert en general no son bases en el sentido del álgebra lineal («bases de Hamel»)

Así como tenemos una buena noción de «base», tenemos también una buena noción de «dimensión»:

PROPOSICIÓN 36. *Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert y sea $\mathcal{B}' \subset \mathcal{H}$ un conjunto ortonormal. Entonces \mathcal{B}' puede ser extendido a una base de Hilbert \mathcal{B} de \mathcal{H} . En particular, todo espacio de Hilbert \mathcal{H} posee una base de Hilbert \mathcal{B} . Además, el cardinal $|\mathcal{B}|$ es independiente de la base elegida, y es llamado la **dimensión de Hilbert** de \mathcal{H} . Si \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 son dos espacios de Hilbert con la misma dimensión de Hilbert, existe un isomorfismo lineal $T : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ tal que $\langle Tx, Tx' \rangle = \langle x, x' \rangle$ para todo par de vectores $x, x' \in \mathcal{H}_1$. En particular, T es una isometría suryectiva y por lo tanto un homeomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN. [6, Proposition 11.3.2, Proposition 11.3.5, Corollary 11.3.6]. □

DEFINICIÓN 37. Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert. Decimos que \mathcal{H} es **separable** si su dimensión de Hilbert es a lo sumo numerable.

OBSERVACIÓN 38. Por la Proposición 36, los espacios de Hilbert separables de dimensión infinita son todos isométricamente isomorfos.

Finalmente introducimos la importante noción de la aplicación **adjunta** de una aplicación lineal acotada entre espacios de Hilbert:

PROPOSICIÓN 39. *Sean \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 dos espacios de Hilbert, y sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ una aplicación lineal acotada entre ellos. Entonces existe una única aplicación lineal $T^* : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1$ tal que*

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$$

para todo par de vectores $x \in \mathcal{H}_1$ y $y \in \mathcal{H}_2$. Esta aplicación se llama la **adjunta** de T , y es también acotada: $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$. Además, si $T, T' \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, tenemos

$$(T^*)^* = T$$

$$(1.2.2) \quad \|T^*\|^2 = \|T\|^2 = \|T^*T\|$$

y

$$(1.2.3) \quad (T + \lambda T')^* = T^* + \bar{\lambda} T'^*$$

y si \mathcal{H}_3 es un tercer espacio de Hilbert y $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$, se tiene

$$(ST)^* = T^*S^*.$$

DEMOSTRACIÓN. [6, Theorem 11.4.3, Theorem 11.4.4]. □

EJEMPLO 40. Consideremos el «operador shift» en ℓ^2 , dado por

$$S : (x_0, x_1, x_2, \dots) \rightarrow (0, x_0, x_1, \dots)$$

Su adjunto es el «operador **coshift**» dado por

$$S^* : (x_0, x_1, x_2, \dots) \rightarrow (x_1, x_2, x_3, \dots)$$

como el lector puede verificar.

EJEMPLO 41. Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert y sea \mathcal{B} una base de Hilbert de \mathcal{H} . Tomemos un subconjunto $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ de la base. Consideremos el subespacio cerrado $\mathcal{H}' := \overline{\langle \mathcal{B}' \rangle}$. Con el producto interno heredado de \mathcal{H} , este subespacio es nuevamente un espacio de Hilbert (por el Ejemplo 13) con base de Hilbert \mathcal{B}' . Consideremos el operador $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ dado por

$$x = \sum_{b \in \mathcal{B}} \langle x, b \rangle b \mapsto P(x) := \sum_{b' \in \mathcal{B}'} \langle x, b' \rangle b'$$

Por otro lado, sea $\iota \in \mathcal{L}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$ la inclusión. Entonces es $P^* = \iota$, como el lector puede verificar.

EJEMPLO 42. Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert y sea $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ una **proyección ortogonal**, esto es, un operador idempotente tal que $\text{im}(P)^\perp = \text{ker}(P)$. Entonces es $P^* = P$ (en otras palabras, P es **autoadjunto**), como el lector puede verificar.

OBSERVACIÓN 43. Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert y sea \mathcal{H}' un subespacio cerrado de \mathcal{H} . Por el Ejemplo 13, \mathcal{H}' es nuevamente un espacio de Hilbert (con el producto interno heredado de \mathcal{H}). Por la Proposición 36 podemos tomar una base de Hilbert \mathcal{B}' de \mathcal{H}' , y extenderla a una base de Hilbert \mathcal{B} de \mathcal{H} . Luego podemos definir la proyección ortogonal a \mathcal{H}' como el operador $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ dado por

$$x = \sum_{b \in \mathcal{B}} \langle x, b \rangle b \mapsto P(x) := \sum_{b' \in \mathcal{B}'} \langle x, b' \rangle b'$$

(la diferencia con el Ejemplo 41 es que aquí el codominio es nuevamente \mathcal{H}).

EJEMPLO 44. Sean \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 espacios de Hilbert. Si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ es de rango finito, también lo es $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$. En efecto, si $\text{im}(T)$ es de dimensión finita, es un subespacio cerrado (por la Proposición 18), por lo cual la Observación 43 implica la existencia de una proyección ortogonal $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$ con imagen $\text{im}(T)$. Luego, por el Ejemplo 42 y la Proposición 39 tenemos

$$T^* = (PT)^* = T^*P^* = T^*P$$

y como P tiene rango finito, lo mismo ocurre con $T^*P = T^*$.

OBSERVACIÓN 45. Supongamos ahora que tenemos dos espacios de Hilbert \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 con bases ortonormales $\mathcal{B}_1 = \{b_j \mid j \in \mathcal{J}\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{b'_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ respectivamente. Entonces podemos representar a T (respecto a las bases indicadas) mediante una «matriz $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$ » cuya «entrada (i, j) » es el i -ésimo coeficiente de $T(b_j)$ respecto a \mathcal{B}_2 . Más precisamente, tenemos una asignación

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(T) : \mathcal{I} \times \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{C}$$

dada por

$$(i, j) \mapsto \langle T(b_j), b'_i \rangle$$

En particular, la « j -ésima columna» de dicha matriz representa al vector $T(b_j)$. Es claro que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(T + \lambda T') = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(T) + \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(T')$$

(donde la suma y el producto por escalares del lado derecho están dados entrada por entrada) y es un ejercicio sencillo verificar que $\text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(T^*)$ es la «transpuesta conjugada» de $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(T)$, esto es, que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(T^*)(j, i) = \overline{\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(T)(i, j)}$$

Por último, notemos que $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(T)$ captura toda la información de T (esto es, que la aplicación $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(-) : \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \rightarrow \mathbb{C}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ es inyectiva): en efecto, como T es continua y $\langle \mathcal{B}_1 \rangle$ es denso en \mathcal{H}_1 , para conocer T basta con conocer $T|_{\langle \mathcal{B}_1 \rangle}$, y como T es lineal basta con conocer los valores de T en los vectores de \mathcal{B}_1 . Finalmente, para conocer los distintos valores $T(b_j)$, $j \in \mathcal{J}$ basta con conocer sus coeficientes $\langle T(b_j), b'_i \rangle$ respecto a \mathcal{B}_2 , que son precisamente las entradas de $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(T)$.

Este tipo de representaciones matriciales nos será útil más adelante, y escribiremos simplemente $\text{Mat}(-)$ cuando las bases de Hilbert estén claras por el contexto.

1.3. Operadores compactos

En mi gobierno se acabarán los operadores —Alberto A. Fernández

A continuación definimos una clase importante de operadores, que podemos considerar en cierto sentido como los «operadores pequeños».

DEFINICIÓN 46. Sean E_1 y E_2 espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ una aplicación lineal acotada. Decimos que es **compacta** si y sólo si $\overline{T(B(0, 1)_{E_1})}$ es compacto. En particular, todas las aplicaciones lineales acotadas de rango finito son compactas. Notamos $\mathcal{K}(E_1, E_2) \subset \mathcal{L}(E_1, E_2)$ al subconjunto de las aplicaciones compactas. Si $E_1 = E_2 = E$, escribimos simplemente $\mathcal{K}(E)$.

PROPOSICIÓN 47. Sean E_1 y E_2 espacios de Banach. Los operadores compactos forman un subespacio cerrado $\mathcal{K}(E_1, E_2) \subset \mathcal{L}(E_1, E_2)$. Además, dados espacios de Banach E_0 y E_3 y aplicaciones $A \in \mathcal{L}(E_0, E_1)$, $T \in \mathcal{K}(E_1, E_2)$ y $B \in \mathcal{L}(E_2, E_3)$, se tiene $BTA \in \mathcal{K}(E_0, E_3)$. En particular, $\mathcal{K}(E)$ es un ideal bilátero cerrado del álgebra $\mathcal{L}(E)$.

DEMOSTRACIÓN. [12, pp. 227-8]. \square

LEMA 48. Si $T \in \mathcal{L}(E)$ es un operador compacto, entonces $\ker(\text{Id}_E - T)$ es un subespacio cerrado de dimensión finita, $\text{im}(\text{Id}_E - T)$ es un espacio cerrado de codimensión finita, y de hecho estos dos números coinciden:

$$\dim \ker(\text{Id}_E - T) = \dim \text{coker}(\text{Id}_E - T)$$

DEMOSTRACIÓN. [12, Lemma 7.9, Theorem 7.17, Lemma 7.18]. \square

En los espacios de Hilbert, los operadores compactos admiten la siguiente caracterización sencilla:

PROPOSICIÓN 49. Sean \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 dos espacios de Hilbert. Entonces una aplicación $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ es compacta si y sólo si es un límite de aplicaciones acotadas de rango finito.

DEMOSTRACIÓN. [12, Proposition 7.6]. \square

COROLARIO 50. Sean \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 dos espacios de Hilbert y sea $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Entonces $T^* \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$.

DEMOSTRACIÓN. Esto se sigue inmediatamente combinando la Proposición 49 con el Ejemplo 44 y utilizando las ecuaciones (1.2.2) y (1.2.3) de la Proposición 39. \square

Funciones sobre \mathbb{T}

*You've been
Winding me up too long
I'm over my head, is it day or night?*
— «Winding Me Up», The Alan Parsons Project

2.1. Definición elemental del número de giros

Esta sección está dedicada a responder la siguiente pregunta: dada una curva cerrada

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

¿cuántas veces gira en torno al origen? Aquí queremos contar como positivas todas las vueltas completadas en sentido antihorario y como negativas todas las vueltas completadas en sentido horario, pretendiendo en última instancia obtener un número entero que represente la *cantidad neta* de giros, vale decir, la cantidad de giros positivos menos la de giros negativos. Una manera de intentar llevar esto a cabo es escribiendo a nuestra curva en «forma polar»,

$$(2.1.1) \quad \gamma(s) = |\gamma(s)|e^{i\theta(s)}$$

para cierta función continua $\theta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Si conseguimos esto, entonces el número de giros será¹

$$(2.1.2) \quad \frac{\theta(1) - \theta(0)}{2\pi}$$

ya que por cada vuelta recorrida en sentido positivo, $\theta(s)$ crece 2π unidades, mientras que por cada vuelta recorrida en sentido negativo, $\theta(s)$ disminuye 2π unidades. (Aquí estamos utilizando implícitamente la hipótesis de la continuidad de θ).

Notemos que (2.1.1) equivale a

$$\frac{\gamma(s)}{|\gamma(s)|} = e^{i\theta(s)}$$

para todo $s \in [0, 1]$, o equivalentemente,

$$(2.1.3) \quad N\gamma = p \circ \theta$$

donde $N\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}$ es la curva normalizada $s \mapsto \frac{\gamma(s)}{|\gamma(s)|}$ y $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$ es el revestimiento $\theta \mapsto e^{i\theta}$.

OBSERVACIÓN 51. Notemos que p tiene período 2π , y que de hecho $p(\lambda) = p(\lambda')$ si y sólo si existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\lambda + 2k\pi = \lambda'$.

Elijamos un $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tal que $p(\theta_0) = N\gamma(0)$, esto es, un «argumento» para $\gamma(0)$. Como p es un revestimiento, existe un único levantamiento de $N\gamma$ a lo largo de p con condición inicial θ_0 [9, Corollary 11.14], esto es, una única función continua

$$\theta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$(2.1.4) \quad \theta(0) = \theta_0 \quad p \circ \theta = N\gamma$$

¹Se trata de un número entero porque $e^{i\theta(1)} = \gamma(1) = \gamma(0) = e^{i\theta(0)}$ y en consecuencia $\theta(1) - \theta(0) \in 2\pi\mathbb{Z}$.

y esta última condición es precisamente la que queríamos (2.1.3). Luego podemos tomar (2.1.2) como la definición del número de giros de γ , siempre y cuando mostremos que es independiente de la elección de θ_0 . Pues bien: si elegimos otro valor para θ_0 , digamos θ'_0 , obtenemos otra función continua

$$\theta' : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R},$$

que es la única que satisface las condiciones

$$(2.1.5) \quad \theta'(0) = \theta'_0 \quad p \circ \theta' = N\gamma$$

Juntando las condiciones (2.1.4) y (2.1.5), vemos que

$$p(\theta_0) = p \circ \theta(0) = N\gamma(0) = p \circ \theta'(0) = p(\theta'_0)$$

y por la Observación (51) esto implica que

$$\theta_0 + 2k\pi = \theta'_0$$

para cierto $k \in \mathbb{Z}$.

Pero entonces la función continua

$$\begin{aligned} \theta + 2k\pi : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\mapsto \theta(s) + 2k\pi \end{aligned}$$

posee condición inicial

$$(\theta + 2k\pi)(0) = \theta(0) + 2k\pi = \theta_0 + 2k\pi = \theta'_0$$

y también levanta a $N\gamma$ a lo largo de p , puesto que

$$p((\theta + 2k\pi)(s)) = p(\theta(s) + 2k\pi) = p(\theta(s)) = N\gamma(s)$$

En consecuencia, por la unicidad del levantamiento θ' , obtenemos la igualdad funcional

$$\theta' = \theta + 2k\pi$$

y por ende tenemos

$$\frac{\theta'(1) - \theta'(0)}{2\pi} = \frac{[\theta(1) + 2k\pi] - [\theta(0) + 2k\pi]}{2\pi} = \frac{\theta(1) - \theta(0)}{2\pi}$$

mostrando así que (2.1.2) es independiente del levantamiento elegido, como habíamos afirmado.

A continuación resumimos nuestras conclusiones:

PROPOSICIÓN 52. *Dada una curva cerrada $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^\times$, y dado $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tal que $e^{i\theta_0} = \frac{\gamma(0)}{|\gamma(0)|}$, existe una única función continua*

$$\theta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

con condición inicial $\theta(0) = \theta_0$ tal que

$$\gamma(s) = |\gamma(s)|e^{i\theta(s)}$$

para todo $s \in [0, 1]$. Además, la expresión $\frac{\theta(1) - \theta(0)}{2\pi}$ no depende de la elección de θ_0 .

DEFINICIÓN 53. Definimos pues el **número de giros de γ alrededor del 0** como

$$n(\gamma, 0) := \frac{\theta(1) - \theta(0)}{2\pi}$$

Más generalmente, dada una curva cerrada $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{z\}$, definimos su **número de giros alrededor de z** como

$$n(\gamma, z) := n(\gamma - z, 0)$$

donde $\gamma - z : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^\times$ es la curva cerrada dada por $s \mapsto \gamma(s) - z$. En otras palabras, para calcular el número de giros alrededor de z de una curva cerrada $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{z\}$, la trasladamos para obtener una curva cerrada $\gamma - z : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^\times$ que rodea al 0 de la misma manera en la que γ rodeaba a z , y calculamos el número de giros de esta nueva curva $\gamma - z$ alrededor del 0, lo cual ya sabemos cómo hacer.

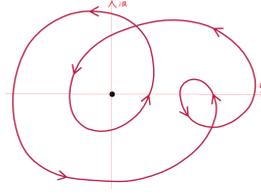


FIGURA 2.1.1. Esta curva tiene número de giros 2 respecto al 0

2.2. Forma normal homotópica

En esta sección demostraremos que si $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^\times$ es una curva cerrada con $n(\gamma, 0) = n$, entonces podemos «deformarla continuamente» (a través de otras curvas cerradas) a la curva cerrada $t \mapsto e^{i \cdot t 2\pi n} = p(t 2\pi n)$, la cual recorre el círculo $|n|$ veces a velocidad constante, y en sentido positivo (resp. negativo) si $n > 0$ (resp. si $n < 0$). En primer lugar debemos formalizar la noción de «deformación continua»:

DEFINICIÓN 54. Sean X y Y dos espacios topológicos y sean $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ dos funciones continuas. Una **homotopía** entre f_0 y f_1 es una aplicación continua $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tal que $H(-, 0) = f_0$ y $H(-, 1) = f_1$. Intuitivamente, se trata de una deformación continua de f_0 a f_1 , pasando por las funciones intermedias $f_t := H(-, t) : X \rightarrow Y$. Escribiremos en azul al «parámetro de deformación» $t \in [0, 1]$. En caso de existir una homotopía H entre f_0 y f_1 , decimos que f_0 es homotópica a f_1 (o que f_0 y f_1 son homotópicas) y escribimos $H : f_0 \simeq f_1$.

PROPOSICIÓN 55. La relación «homotópica a» es una relación de equivalencia.

DEMOSTRACIÓN. Toda función continua $f : X \rightarrow Y$ es homotópica a sí misma mediante la homotopía $H(x, t) := f(x)$, con lo cual la relación de homotopía es reflexiva. Por otro lado, dada una homotopía $H : f_0 \simeq f_1$, podemos exhibir una homotopía «inversa» $H^- : f_1 \simeq f_0$, definida por la fórmula $H^-(x, t) := H(x, 1 - t)$. Por último, supongamos que tenemos dos homotopías $H : f_0 \simeq f_1$ y $H' : f_1 \simeq f_2$. Entonces podemos «concatenarlas», recorriendo cada una al doble de velocidad para que todo entre en el intervalo temporal $[0, 1]$, obteniendo así una nueva homotopía $H' * H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ definida por la fórmula

$$(H' * H)(x, t) := \begin{cases} H(x, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H'(x, 2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Con esta definición, $H' * H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ resulta continua gracias al lema del pegado para dos cerrados, a saber: $X \times [0, \frac{1}{2}]$ y $X \times [\frac{1}{2}, 1]$, y claramente tenemos $H' * H : f_0 \simeq f_2$. \square

OBSERVACIÓN 56. Notemos que la cuestión de si dos funciones $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ son o no homotópicas depende fuertemente del codominio Y que tomemos. Por ejemplo, fijemos dos números reales $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Si tomamos $X = \{\star\}$ y $Y = \mathbb{R}$, entonces las funciones $f_0, f_1 : \star \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f_0 : \star \mapsto a$ y $f_1 : \star \mapsto b$ son homotópicas mediante la homotopía «convexa» $H(\star, t) := (1 - t)a + tb$. La misma homotopía sigue funcionando si tomamos $Y = [a, b]$, ya que tanto f_0 y f_1 como H se correstringen a $[a, b]$. Sin embargo, si tomamos $Y = [a, b] \setminus \{\frac{a+b}{2}\}$ (o más dramáticamente aún, si tomamos $Y = \{a, b\}$) no puede haber *ninguna* homotopía de $f_0 : \{\star\} \rightarrow Y$ a $f_1 : \{\star\} \rightarrow Y$, ya que tal homotopía nos daría un camino en $[a, b] \setminus \{\frac{a+b}{2}\}$ (resp. en $\{a, b\}$) entre $f_0(\star) = a$ y $f_1(\star) = b$, lo cual es imposible (por el Teorema de Bolzano).

TEOREMA 57. Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^\times$ una curva cerrada y sea $n := n(\gamma, 0)$ su número de giros alrededor del 0. Sea $\zeta_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{T} \subset \mathbb{C}^\times$ la curva cerrada $s \mapsto e^{i \cdot s 2\pi n}$. Entonces existe una homotopía

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

$$H : \gamma \simeq \zeta_n$$

tal que cada $H(-, t)$ es una curva cerrada.

DEMOSTRACIÓN. Probaremos nuestro teorema en tres pasos: primero deformaremos una curva cerrada $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^\times$ a su normalización $N\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{T} \subset \mathbb{C}^\times$. Luego deformaremos su normalización $N\gamma$ a una curva cerrada $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{T} \subset \mathbb{C}^\times$ que comienza y termina en el punto $1 \in \mathbb{T}$. Finalmente, deformaremos esta curva cerrada a la curva ζ_n , donde $n = n(\gamma, 0)$. Estas tres deformaciones se harán pasando únicamente por curvas cerradas. Al concatenarlas, habremos obtenido nuestra homotopía H .

En primer lugar, consideremos la homotopía

$$J : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

$$J : \gamma \simeq N\gamma$$

definida mediante

$$J(s, t) := (1 - t)\gamma(s) + tN\gamma(s)$$

La continuidad es clara (J es la «homotopía convexa» entre γ y $N\gamma$). La función se correstringe a \mathbb{C}^\times porque, para cada $s \in [0, 1]$, el segmento que une a $\gamma(s)$ con $N\gamma(s) = \frac{\gamma(s)}{|\gamma(s)|}$ no pasa por el 0. Además, es claro que cada «curva intermedia» $J(-, t) = (1 - t)\gamma(-) + tN\gamma(-)$ es una curva cerrada, ya que γ y $N\gamma$ lo son.

Ahora tomemos un θ_0 tal que $e^{i\theta_0} = N\gamma(0) = N\gamma(1)$ y consideremos la curva cerrada $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{T} \subset \mathbb{C}^\times$ dada por $s \mapsto e^{-it\theta_0}N\gamma(s)$. Esta curva no es más que el resultado de «girar» la curva $N\gamma$ para que comience y termine en $1 \in \mathbb{T}$.

Tenemos entonces una homotopía

$$K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{T} \subset \mathbb{C}^\times$$

$$K : N\gamma \simeq \sigma$$

dada por

$$K(s, t) := e^{-it\theta_0}N\gamma(s)$$

Nuevamente, cada curva intermedia $K(-, t) = e^{-it\theta_0}N\gamma$ es una curva cerrada, puesto que $N\gamma$ lo es.

Finalmente, aplicando la Proposición 52 a la curva σ y teniendo en cuenta que $\sigma(0) = 1 = e^{i0}$ (esto es, podemos tomar $\theta_0 = 0$) obtenemos una función continua $\theta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$(2.2.1) \quad \theta(0) = 0$$

y

$$\sigma(s) = |\sigma(s)|e^{i\theta(s)} = e^{i\theta(s)}$$

para todo $s \in [0, 1]$. Por definición, tenemos $n := n(\sigma, 0) = \frac{\theta(1) - \theta(0)}{2\pi} = \frac{\theta(1)}{2\pi}$, por lo cual

$$(2.2.2) \quad \theta(1) = 2\pi n$$

Consideremos la homotopía

$$L : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{T} \subset \mathbb{C}^\times$$

$$L : \sigma \simeq \zeta_n$$

dada por

$$L(s, t) = e^{i[(1-t)\theta(s) + ts2\pi n]}$$

Una vez más, cada curva intermedia $L(-, t)$ es cerrada:

$$L(0, t) \stackrel{(2.2.1)}{=} e^{i0} = 1 \quad L(1, t) \stackrel{(2.2.2)}{=} e^{i2\pi n} = 1$$

Finalmente, concatenamos las tres homotopías, obteniendo una homotopía

$$H := L * (K * J) : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

$$H : \gamma \simeq \zeta_n$$

tal que cada curva intermedia

$$H(-, t) = \begin{cases} J(-, 4t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ K(-, 4t - 1) & \text{si } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ L(-, 2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

es cerrada. □

2.3. Algunas tecnicas topológicas

En esta sección obtendremos ligeras variantes del Teorema 57, las cuales utilizaremos más adelante.

Consideremos la función continua

$$q : [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}$$

dada por $s \mapsto e^{i2\pi s}$. Dado que es una suryección continua con dominio compacto y codominio Hausdorff, es una aplicación cerrada [4, Chapter IX, Theorem 1.4] y por lo tanto una aplicación cociente [4, Chapter VI, 1.4]. Este cociente sólo identifica los elementos $0, 1 \in [0, 1]$ entre sí. (Esta aplicación aparecerá hasta el final de la monografía).

Sea ahora $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^\times$ una curva cerrada. Por definición esto significa que $\gamma(0) = \gamma(1)$, y por lo tanto γ se factoriza a través de dicho cociente, i.e. tenemos $\gamma = \tilde{\gamma} \circ q$ para una única función continua $\tilde{\gamma} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}^\times$. De esta forma obtenemos una correspondencia

$$\{\text{curvas cerradas } \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^\times\} \leftrightarrow \{\text{funciones continuas } \varphi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}^\times\}$$

dada en un sentido por $\gamma \mapsto \tilde{\gamma}$ y en el otro sentido por $\varphi \circ q \leftarrow \varphi$. Bajo esta correspondencia, nuestra familia de funciones (una por cada entero $n \in \mathbb{Z}$) $\zeta_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^\times, s \mapsto e^{i \cdot s \cdot 2\pi n}$ corresponde a la familia de funciones $\xi_n : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ dadas por $z \mapsto z^n$.

Como [0, 1] es localmente compacto y Hausdorff, la aplicación

$$q \times \text{id} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{T} \times [0, 1]$$

es nuevamente una función cociente [4, Chapter XII, Theorem 4.1], que para todo $t \in [0, 1]$ identifica $(0, t)$ con $(1, t)$.

Sea ahora $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^\times$ una homotopía entre curvas cerradas (digamos $H : \gamma \simeq \gamma'$) a través de otras curvas cerradas. Por definición esto significa que $H(0, t) = H(1, t)$ para todo $t \in [0, 1]$, y por lo tanto H se factoriza a través del cociente $q \times \text{id}$, i.e. tenemos $H = \tilde{H} \circ (q \times \text{id})$ para una única función continua $\tilde{H} : \mathbb{T} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^\times$. De esta forma obtenemos una correspondencia

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{ll} \text{homotopías entre curvas cerradas} & H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^\times \\ \text{a través de curvas cerradas} & H : \gamma \simeq \gamma' \end{array} \right\} \\ & \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \text{homotopías} & \tilde{H} : \mathbb{T} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^\times \\ & \tilde{H} : \tilde{\gamma} \simeq \tilde{\gamma}' \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Las observaciones anteriores nos dan la siguiente variación del Teorema 57:

TEOREMA 58. *Sea $\varphi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ una función continua y sea $n := n(\varphi \circ q, 0)$ el número de giros de $\varphi \circ q : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^\times$ alrededor del 0. Sea $\xi_n : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ la función continua $z \mapsto z^n$. Entonces existe una homotopía*

$$\begin{aligned} \tilde{H} : \mathbb{T} \times [0, 1] & \rightarrow \mathbb{C}^\times \\ \tilde{H} : \varphi & \simeq \xi_n \end{aligned}$$

Si X es un espacio localmente compacto Hausdorff, entonces dar una homotopía $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ entre f_0 y f_1 equivale (por la ley exponencial [4, Chapter XII, Theorem 3.1]) a dar una aplicación continua $H^\sharp : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}(X, Y)$ tal que $H^\sharp(0) = f_0$ y $H^\sharp(1) = f_1$. Esto no es más que un camino entre f_0 y f_1 en el espacio de funciones $\mathcal{C}(X, Y)$. Si Y además es un espacio métrico entonces la topología de $\mathcal{C}(X, Y)$ coincide con la topología de la convergencia uniforme sobre compactos [4,

Chapter XII, Theorem 7.2]. En particular, si el espacio [Hausdorff localmente compacto] X ya es de por sí compacto, entonces la topología de $\mathcal{C}(X, Y)$ es la inducida por la «métrica máximo»

$$d(f, f') := \max_{x \in X} |f(x) - f'(x)|$$

Si además $Y = \mathbb{C}$ con la topología métrica estándar, entonces la topología compacto-abierta de $\mathcal{C}(X, \mathbb{C}) = C(X)$ viene inducida por la *norma* máximo, ya mencionada en el Ejemplo 6. Tomando $X = \mathbb{T}$ y considerando la homotopía \hat{H} del Teorema 58 postcompuesta con la inclusión $\mathbb{C}^\times \xrightarrow{\subset} \mathbb{C}$, obtenemos el siguiente resultado:

COROLARIO 59. *Sea $\varphi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ una función continua y sea $n := n(\varphi \circ q, 0)$ el número de giros de $\varphi \circ q : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^\times$ alrededor del 0. Sea $\xi_n : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ la función continua $z \mapsto z^n$. Existe un camino en el espacio de Banach $C(\mathbb{T})$ que conecta a la función $\varphi \in C(\mathbb{T})$ con la función $\xi_n \in C(\mathbb{T})$ mediante funciones nunca nulas.*

2.4. Teoría de la medida sobre \mathbb{T}

Si X es un subconjunto abierto en \mathbb{R}^n , visto como un espacio de medida con los conjuntos Lebesgue-medibles y la medida de Lebesgue, entonces las [clases de] funciones (a valores complejos) suaves con soporte compacto $C_c^\infty(X)$ conforman un subespacio denso de $L^p(X)$ [12, Proposition 2.29]. En consecuencia, lo mismo ocurre con cualquier subespacio aún más grande, como el de las funciones meramente continuas con soporte compacto, $C_c(X)$. En particular, tomando $X = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ tenemos:

AFIRMACIÓN 60. El subespacio $C_c((0, 1))$ de $L^p((0, 1))$ es denso.

Como $\{0, 1\}$ tiene medida nula en $[0, 1]$, y dos funciones en $L^p([0, 1])$ que sólo difieren en $\{0, 1\}$ pertenecen a la misma clase, podemos identificar $L^p((0, 1))$ con $L^p([0, 1])$. Al hacer esto, $C_c((0, 1))$ queda identificado con el subespacio

$$\{f \in C([0, 1]) \subset L^p([0, 1]) \mid \exists \delta > 0 : \text{supp}(f) \subset (\delta, 1 - \delta)\}$$

Por lo tanto este subespacio es denso en $L^p([0, 1])$. Un subespacio más grande es

$$C_{\text{per},0}([0, 1]) := \{f \in C([0, 1]) \subset L^p([0, 1]) \mid f(0) = f(1) = 0\}$$

y otro aún más grande es

$$C_{\text{per}}([0, 1]) := \{f \in C([0, 1]) \subset L^p([0, 1]) \mid f(0) = f(1)\}$$

Así pues, llegamos la siguiente conclusión:

LEMA 61. *El subespacio $C_{\text{per}}([0, 1])$ de $L^p([0, 1])$ es denso.*

A continuación dotaremos al círculo unidad \mathbb{T} de una medida (su medida natural²) y demostraremos algunas de sus propiedades, que serán cruciales en las secciones siguientes. Para empezar, definimos la siguiente σ -álgebra:

$$\Sigma := \{A \subset \mathbb{T} \mid q^{-1}(A) \text{ es Lebesgue-medible en } [0, 1]\}$$

donde $q : [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}$ es como en la sección anterior. (En particular, todos los abiertos de \mathbb{T} resultan medibles). Se trata de una σ -álgebra pues tomar preimágenes preserva el subconjunto vacío, los complementos, las uniones y las intersecciones, y los conjuntos Lebesgue-medibles forman una σ -álgebra sobre $[0, 1]$. Por la definición de Σ , una función $\varphi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ es medible si y sólo si $\varphi \circ q : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ lo es (y en particular toda función continua $\varphi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ es medible).

Por último definimos la medida $\mu : \Sigma \rightarrow [0, +\infty]$ mediante

$$\mu(A) = |q^{-1}(A)|_{\text{Leb}}$$

²Más específicamente, su «medida de Haar normalizada». Acá la construiremos de manera *ad hoc*. Para la teoría general, véase por ejemplo [6, Chapter 16].

donde $|Z|_{\text{Leb}}$ denota la medida de Lebesgue de $Z \subset [0, 1]$. Como tomar preimágenes preserva al subconjunto vacío y a las uniones e intersecciones, μ es en efecto una medida. (De aquí en más, \mathbb{T} tendrá siempre esta medida).

OBSERVACIÓN 62. Si $O \subset [0, 1]$ es un abierto no vacío, entonces existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $(a, b) \subset O$, por lo cual $|O|_{\text{Leb}} \geq |(a, b)|_{\text{Leb}} = b - a > 0$. Luego, si $A \subset \mathbb{T}$ es un abierto no vacío, como $q : [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}$ es una suryección continua, tenemos que $q^{-1}(A)$ es un abierto no vacío de $[0, 1]$, y por lo tanto $\mu(A) = |q^{-1}(A)|_{\text{Leb}} > 0$. Llegado este punto, hemos verificado todas las hipótesis de la Observación 7, y por consiguiente

$$\|\varphi\|_{\infty} = \|\varphi\|_{\text{máx}}$$

para toda $\varphi \in C(\mathbb{T})$. Usaremos esta identidad más adelante sin mayor comentario.

Por otro lado, tenemos

$$\int_{\mathbb{T}} \varphi d\mu = \int_{[0,1]} \varphi \circ q$$

para toda φ simple, y por lo tanto (por los argumentos habituales de teoría de la medida) para toda φ medible. Esto nos da un isomorfismo isométrico entre $L^p(\mathbb{T})$ y $L^p([0, 1])$, dado por $\varphi \mapsto \varphi \circ q$. Para $p = 2$, este isomorfismo es un isomorfismo de espacios de Hilbert³:

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \psi \rangle_{L^2(\mathbb{T})} &= \int_{\mathbb{T}} \varphi \bar{\psi} d\mu \\ &= \int_{[0,1]} (\varphi \bar{\psi}) \circ q \\ &= \int_{[0,1]} (\varphi \circ q) (\bar{\psi} \circ q) \\ &= \langle \varphi \circ q, \bar{\psi} \circ q \rangle_{L^2([0,1])} \end{aligned}$$

Bajo este isomorfismo, $C(\mathbb{T})$ se corresponde con $C_{\text{per}}([0, 1])$, de lo cual obtenemos el siguiente resultado:

COROLARIO 63. $C(\mathbb{T})$ es denso en $L^2(\mathbb{T})$.

Estamos ahora en condiciones de probar el siguiente teorema, que es una de las piedras angulares del Análisis de Fourier:

TEOREMA 64. El conjunto de funciones $\xi_n : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z^n$ ($n \in \mathbb{Z}$) forma una base ortonormal de $L^2(\mathbb{T})$, a la cual llamamos la **base de Fourier**.

DEMOSTRACIÓN. Veamos primero que se trata de un conjunto ortonormal. Por las observaciones precedentes, esto equivale a afirmar que las funciones $\zeta_n = \xi_n \circ q : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $s \mapsto e^{i \cdot s 2\pi n}$ forman un conjunto ortonormal en $L^2([0, 1])$. Y en efecto:

$$\begin{aligned} \langle \zeta_n, \zeta_m \rangle_{L^2([0,1])} &= \int_{[0,1]} \zeta_n \bar{\zeta}_m \\ &= \int_0^1 e^{i \cdot s 2\pi n} e^{-i \cdot s 2\pi m} ds \\ &= \int_0^1 e^{i \cdot s 2\pi (n-m)} ds \\ &= \begin{cases} \left. \frac{e^{i \cdot s 2\pi (n-m)}}{i \cdot 2\pi (n-m)} \right|_{s=0}^{s=1} & \text{si } n \neq m \\ \int_0^1 1 ds & \text{si } n = m \end{cases} \\ &= \delta_{n,m} \end{aligned}$$

³Alternativamente, se puede utilizar el hecho de que, por la «Identidad de Polarización», el producto interno en un espacio de Hilbert está determinado por la norma, y que por lo tanto toda isometría preserva el producto interno.

Ahora bien: el subespacio $\langle \xi_n, n \in \mathbb{Z} \rangle$ e de $L^2(\mathbb{T})$ generado por los elementos $\xi_n, n \in \mathbb{Z}$ es una subálgebra de $C(\mathbb{T})$ cerrada por conjugación, que contiene a las constantes (pues contiene a la función constante $\xi_0 = 1$) y que separa puntos (pues $\xi_1 : z \mapsto z$ los separa). Por lo tanto, la versión compleja del Teorema de Stone-Weierstrass [4, Chapter XIII, Theorem 3.3] implica que $\langle \xi_n, n \in \mathbb{Z} \rangle$ es denso en $C(\mathbb{T})$ (con la norma máximo). Como se satisfacen las hipótesis de la Observación 7, la última parte del Ejemplo 10 implica que $\langle \xi_n, n \in \mathbb{Z} \rangle$ también es denso en $C(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$ con la «norma 2». A su vez, $C(\mathbb{T})$ es denso en $L^2(\mathbb{T})$ (Corolario 63). Luego concluimos que $\langle \xi_n, n \in \mathbb{Z} \rangle$ es denso en $L^2(\mathbb{T})$. \square

De aquí en más, siempre utilizaremos esta base para $L^2(\mathbb{T})$. Los coeficientes de un vector $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$ respecto a esta la base de Fourier reciben un nombre especial:

DEFINICIÓN 65. Dado $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$, para cada $n \in \mathbb{Z}$ definimos el **n -ésimo coeficiente de Fourier** de φ como

$$\varphi_n := \langle \varphi, \xi_n \rangle \stackrel{\text{i.e.}}{=} \int_{\mathbb{T}} \varphi \overline{\xi_n} d\mu$$

Luego

$$\varphi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi_n \xi_n$$

y llamamos a este desarrollo el **desarrollo de Fourier** de φ .

Operadores de Fredholm

3.1. Operadores de Fredholm entre espacios vectoriales

En primer lugar definiremos los operadores de Fredholm entre espacios vectoriales (sin presencia de una norma). En cierto sentido que se hará específico más adelante, estos son los operadores «casi inversibles».

DEFINICIÓN 66. Sean V_1 y V_2 dos espacios vectoriales. Decimos que una aplicación lineal $T \in \text{Hom}(V_1, V_2)$ es **de Fredholm** si su núcleo y conúcleo son de dimensión finita, y en ese caso definimos su **índice de Fredholm** (o simplemente **índice**) como¹

$$\text{ind}(T) = \dim \text{coker}(T) - \dim \ker(T)$$

OBSERVACIÓN 67. Si V_1, V_2 son ambos de dimensión finita, entonces todas las aplicaciones lineales $V_1 \rightarrow V_2$ son de Fredholm, y su índice es siempre $\dim(V_2) - \dim(V_1)$. Si sólo uno de ellos es de dimensión finita, entonces ninguna aplicación lineal $V_1 \rightarrow V_2$ es de Fredholm. En consecuencia, este concepto recién se vuelve interesante en el caso en que ambos espacios vectoriales son de dimensión infinita. Por ejemplo, todo isomorfismo lineal es una aplicación de Fredholm con índice 0; el operador «shift» $S \in \text{End}(\ell^p)$ es un operador de Fredholm con índice 1, y el shift iterado n veces es un operador de Fredholm con índice n . Por otro lado, el operador «coshift» $(x_0, x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_1, x_2, \dots)$ es de Fredholm con índice -1 , y al iterarlo n veces obtenemos un operador de Fredholm con índice $-n$.

En particular, los espacios ℓ^p admiten operadores de Fredholm de todos los índices. La misma idea funciona en cualquier espacio de Hilbert de dimensión infinita (sea o no separable): si \mathcal{H} tiene dimensión infinita, podemos tomar una base ortonormal \mathcal{B} de \mathcal{H} y escribirla como una unión disjunta $\mathcal{B} = \mathcal{B}' + \mathcal{B}''$, con \mathcal{B}' numerable (digamos $\mathcal{B}' = \{b_0, b_1, \dots, \}$). Luego podemos definir los operadores «shift» y «coshift» de la forma usual en \mathcal{B}' , y como la identidad en \mathcal{B}'' . Es fácil ver que esto sigue dando operadores de Fredholm con los índices deseados.

A continuación probaremos un importante resultado algebraico sobre las aplicaciones lineales de Fredholm. Para ello utilizaremos el siguiente lema del álgebra homológica:

LEMA 68. («Lema de la serpiente»). Dado un diagrama de espacios vectoriales y aplicaciones lineales de la forma

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & U_0 & \xrightarrow{T_0} & U_1 & \xrightarrow{T_1} & U_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & U'_0 & \xrightarrow{T'_0} & U'_1 & \xrightarrow{T'_1} & U'_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

tal que

$$T'_0 \alpha = \beta T_0 \quad T'_1 \beta = \gamma T_1$$

(esto es, el diagrama «conmuta») y tal que ambas filas son **sucesiones exactas cortas**², entonces tenemos una sucesión **exacta**³ de la forma

$$0 \rightarrow \ker(\alpha) \rightarrow \ker(\beta) \rightarrow \ker(\gamma) \rightarrow \text{coker}(\alpha) \rightarrow \text{coker}(\beta) \rightarrow \text{coker}(\gamma) \rightarrow 0$$

¹En general se suele tomar la diferencia opuesta, $\dim \ker(T) - \dim \text{coker}(T)$ como la definición del índice. Aquí tomaremos esta definición porque nos evita insertar un signo en el enunciado del Teorema del Índice.

²Esto es, T_0 y T'_0 son inyectivas, T_1 y T'_1 son suryectivas, y se tiene $\text{im}(T_0) = \ker(T_1)$ e $\text{im}(T'_0) = \ker(T'_1)$

³Esto es, el núcleo de cada flecha es la imagen de la flecha anterior

DEMOSTRACIÓN. [1, Ch. III, Section 7]. □

LEMA 69. *Dada una sucesión exacta finita $W_0 \rightarrow W_1 \rightarrow \dots \rightarrow W_m$ de espacios vectoriales de dimensión finita, se tiene*

$$\sum_{i=0}^m (-1)^i \dim W_i = 0$$

DEMOSTRACIÓN. Esta es una generalización del teorema de rango-nulidad, y se puede demostrar fácilmente haciendo inducción en m y usando dicho teorema. Para una versión más general, véase [1, Ch. VI, Proposition 3.13]. □

TEOREMA 70. **Propiedad «2 de 3» y aditividad del índice.** *Si dos de las tres aplicaciones $T \in \text{Hom}(V_1, V_2)$, $S \in \text{Hom}(V_2, V_3)$ y $ST \in \text{Hom}(V_1, V_3)$ son de Fredholm, la tercera también lo es, y se tiene*

$$\text{índ}(ST) = \text{índ}(S) + \text{índ}(T)$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & V_1 & \xrightarrow{(\text{Id}_{V_1} \quad T)} & V_1 \oplus V_2 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} T \\ -\text{Id}_{V_2} \end{pmatrix}} & V_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow T & & \downarrow \begin{pmatrix} ST & 0 \\ 0 & \text{Id}_{V_2} \end{pmatrix} & & \downarrow S & & \\ 0 & \longrightarrow & V_2 & \xrightarrow{(S \quad \text{Id}_{V_2})} & V_3 \oplus V_2 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \text{Id}_{V_2} \\ -S \end{pmatrix}} & V_3 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Se verifica fácilmente que el diagrama conmuta y que sus dos filas son sucesiones exactas cortas. Además,

$$\ker \begin{pmatrix} ST & 0 \\ 0 & \text{Id}_{V_2} \end{pmatrix} \cong \ker(ST)$$

y

$$\text{coker} \begin{pmatrix} ST & 0 \\ 0 & \text{Id}_{V_2} \end{pmatrix} \cong \text{coker}(ST)$$

Por lo tanto el lema de la serpiente nos da una sucesión exacta de la forma

$$(3.1.1) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \ker(T) & \rightarrow & \ker(ST) & \rightarrow & \ker(S) \\ & & \rightarrow & & \text{coker}(T) & \rightarrow & \text{coker}(ST) & \rightarrow & \text{coker}(S) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Un hecho fácilmente verificable sobre las sucesiones exactas de espacios vectoriales $W_0 \rightarrow W_1 \rightarrow \dots \rightarrow W_m$ es que, dado un espacio vectorial W_n de la sucesión, si sus dos espacios vectoriales «vecinos» W_{n-1} y W_{n+1} son de dimensión finita, entonces W_n también es de dimensión finita. Esto establece la propiedad «2 de 3»: por ejemplo, si T y ST son de Fredholm, entonces son de dimensión finita todos los espacios vectoriales de (3.1.1), excepto quizás $\ker(S)$ y $\text{coker}(S)$. Pero al estar éstos «rodeados» por espacios vectoriales de dimensión finita, deben ser también de dimensión finita, y por lo tanto S debe ser de Fredholm. (Los otros dos casos de la propiedad «2 de 3» son similares). Finalmente, si dos de las tres aplicaciones S , T y ST (y por lo tanto también la restante) son de Fredholm, entonces la sucesión (3.1.1) consiste enteramente de espacios vectoriales de dimensión finita, con lo cual podemos aplicar el Lema 69, obteniendo así la relación

$$0 - \ker(T) + \ker(ST) - \ker(S) + \text{coker}(T) - \text{coker}(ST) + \text{coker}(S) - 0 = 0$$

esto es,

$$\text{índ}(T) + \text{índ}(S) - \text{índ}(ST) = 0$$

□

3.2. Operadores de Fredholm acotados entre espacios de Banach

Pasamos ahora a estudiar operadores de Fredholm acotados entre espacios de Banach.

Notación: Si E_1 y E_2 son dos espacios de Banach, notaremos $\mathcal{F}(E_1, E_2) \subset \mathcal{L}(E_1, E_2)$ al subconjunto de las aplicaciones acotadas de Fredholm. En el caso $E_1 = E_2 = E$, escribimos simplemente $\mathcal{F}(E)$.

OBSERVACIÓN 71. Este subconjunto *no* es un subespacio vectorial en general: por ejemplo, $0 \in \mathcal{F}(E_1, E_2)$ si y sólo si E_1 y E_2 son de dimensión finita.

PROPOSICIÓN 72. Sean E_1 y E_2 dos espacios de Banach. Si $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ es una aplicación acotada tal que $\dim \text{coker}(T) < \infty$ (por ejemplo, si T es de Fredholm) entonces $\text{im}(T)$ es un subespacio cerrado de E_2 .

DEMOSTRACIÓN. Pasando al cociente $\frac{E_1}{\ker(T)}$ de ser necesario (ver Ejemplo 14), podemos asumir que $T : E_1 \rightarrow E_2$ es inyectivo. Como $\text{im}(T)$ es de codimensión finita, tiene un complemento algebraico W de dimensión finita (ver Proposición 18). En particular, W es un espacio de Banach. Consideremos la aplicación lineal acotada

$$S : E_1 \oplus W \rightarrow E_2 \\ (x, w) \mapsto Tx + w$$

Como $\text{im}T \oplus W = E_2$, la aplicación S es suryectiva. Por otra parte, su núcleo son los pares (x, w) tales que $Tx = -w$. Como $\text{im}(T) \cap W = \{0\}$ es un complemento de $\text{im}T$, esto sólo puede pasar si $Tx = w = 0$, y como T es inyectiva, esto sólo sucede cuando $x = w = 0$. Por lo tanto S es también inyectiva, y en consecuencia es un isomorfismo lineal acotado entre dos espacios de Banach. Luego S es un homeomorfismo (por el Teorema de la Inversa Acotada), y en consecuencia el subespacio $\text{im}(T) = S(E_1 \times \{0\})$ es cerrado en E_2 . \square

TEOREMA 73. (Atkinson). Sean E_1 y E_2 dos espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ una aplicación lineal acotada entre ellos. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

- (i) T es de Fredholm.
- (ii) Existe un $S \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$ tal que $\text{Id}_{E_1} - ST$ e $\text{Id}_{E_2} - TS$ son ambos de rango finito (« T es inversible salvo operadores de rango finito»).
- (iii) Existe un $S \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$ tal que $\text{Id}_{E_1} - ST$ e $\text{Id}_{E_2} - TS$ son ambos compactos (« T es inversible salvo operadores compactos»).

DEMOSTRACIÓN. (i) \implies (ii). (Quizás algunos lectores encuentren útil consultar la Figura 3.2.1, que intenta ser una descripción esquemática de los distintos (sub)espacios vectoriales involucrados).

Supongamos que $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ es de Fredholm. Por un lado, esto significa que $\ker(T)$ tiene dimensión finita, con lo cual admite un complemento E'_1 en E_1 (Proposición 18). Por otro lado, significa que $\text{im}(T)$ tiene codimensión finita, y además es un subespacio cerrado de E_2 (por la Proposición 72), con lo cual admite un complemento finito-dimensional W en E_2 (nuevamente por la Proposición 18).

Sea $P \in \mathcal{L}(E_1)$ la proyección a $\ker(T)$ a lo largo de E'_1 y sea $Q \in \mathcal{L}(E_2)$ la proyección a $\text{im}(T)$ a lo largo de W (ver Corolario 20). Notemos que las proyecciones P y $\text{Id}_{E_2} - Q$ son de rango finito.

Sea $T' : E'_1 \rightarrow \text{im}(T)$ la aplicación lineal que resulta de restringir T a E'_1 y correstringirla a $\text{im}(T)$. Por un lado,

$$\ker(T') = \ker(T|_{E'_1}) = \ker(T) \cap E'_1 = \{0\},$$

por lo cual T' es inyectiva. Por otro lado,

$$\text{im}(T) = T(E_1) = T(E'_1 \oplus \ker(T)) = T(E'_1) + T(\ker(T)) = T(E'_1) = \text{im}(T'),$$

por lo cual T' es suryectiva. Siendo $T' : E'_1 \rightarrow \text{im}(T)$ un isomorfismo lineal acotado entre espacios de Banach, su inversa $S' : \text{im}(T) \rightarrow E'_1$ es también acotada (por el Teorema de la Inversa Acotada).

Luego podemos definir

$$S := \iota S' Q|_{\text{im}(T)} \in \mathcal{L}(E_2, E_1),$$

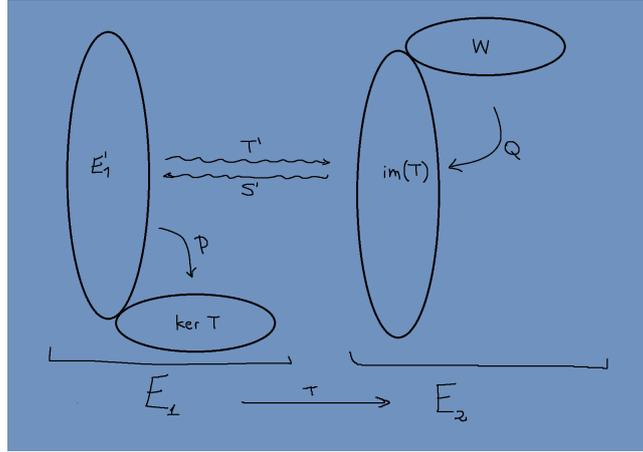


FIGURA 3.2.1.

donde $\iota : E_1' \rightarrow E_1$ es la inclusión. Luego se verifican fácilmente las identidades

$$\text{Id}_{E_1} - ST = P$$

e

$$\text{Id}_{E_2} - TS = \text{Id}_{E_2} - Q$$

evaluando en $\ker(T)$ y E_1' (resp. en $\text{im}(T)$ y W).

(i) \implies (iii).

Esta implicación es inmediata.

(iii) \implies (i).

Supongamos ahora que existe $S \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$ tal que $\text{Id}_{E_1} - ST$ e $\text{Id}_{E_2} - TS$ son compactos. Entonces del Lema 48 obtenemos:

$$\dim \ker(T) \leq \dim \ker(ST) = \dim \ker(\text{Id}_{E_1} - (\text{Id}_{E_1} - ST)) < \infty$$

$$\dim \text{coker}(T) \leq \dim \text{coker}(TS) = \dim \text{coker}(\text{Id}_{E_2} - (\text{Id}_{E_2} - TS)) < \infty$$

□

COROLARIO 74. («Fredholm más compacto es Fredholm»). Sean E_1 y E_2 espacios de Banach. Si $T \in \mathcal{F}(E_1, E_2)$ y $K \in \mathcal{K}(E_1, E_2)$ entonces $T + K \in \mathcal{F}(E_1, E_2)$.

DEMOSTRACIÓN. Si T es de Fredholm, entonces por el Teorema 73 existe un $S \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$ tal que $\text{Id}_{E_1} - ST \in \mathcal{K}(E_1)$ e $\text{Id}_{E_2} - TS \in \mathcal{K}(E_2)$. Luego por la Proposición 47 tenemos

$$\text{Id}_{E_1} - S(T + K) = \underbrace{\text{Id}_{E_1} - ST}_{\in \mathcal{K}(E_1)} - \underbrace{SK}_{\in \mathcal{K}(E_1)} \in \mathcal{K}(E_1)$$

e

$$\text{Id}_{E_2} - (T + K)S = \underbrace{\text{Id}_{E_2} - TS}_{\in \mathcal{K}(E_2)} - \underbrace{KS}_{\in \mathcal{K}(E_2)} \in \mathcal{K}(E_2)$$

Usando nuevamente el Teorema 73, esto nos dice que $T + K$ es de Fredholm. □

OBSERVACIÓN 75. Siguiendo la idea de que los operadores compactos son «pequeños», $T + K$ es a veces llamado una «**perturbación compacta**» de T .

TEOREMA 76. (Dieudonné). Continuidad del índice. Sean E_1 y E_2 dos espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{F}(E_1, E_2)$ una aplicación acotada entre ellos. Entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que toda aplicación $T' \in B(T, \varepsilon)_{\mathcal{L}(E_1, E_2)}$ es de Fredholm con índice $\text{ind}(T') = \text{ind}(T)$. En otras palabras, $\mathcal{F}(E_1, E_2)$ es

abierto en $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ e $\text{índ} : \mathcal{F}(E_1, E_2) \rightarrow \mathbb{Z}$ es localmente constante y por lo tanto constante en las componentes (arco)conexas⁴ de $\mathcal{F}(E_1, E_2)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea E'_1 un complemento para $\ker(T)$, sea $\iota : E'_1 \rightarrow E_1$ la inclusión y sea $Q : E_2 \rightarrow \text{im}(T)$ una proyección (correstringida). Notemos que tanto ι como Q son de Fredholm. En primer lugar, notemos que

$$QT\iota \in \mathcal{GL}(E'_1, \text{im}(T)).$$

Además, recordemos que $\mathcal{GL}(E'_1, \text{im}(T))$ es abierto en $\mathcal{L}(E'_1, \text{im}(T))$ y notemos que

$$\|QT'\iota - QT\iota\| \leq \|Q\| \cdot \|T' - T\| \cdot \|\iota\| \rightarrow 0 \text{ cuando } T' \rightarrow T$$

Luego ha de existir un $\varepsilon > 0$ tal que $QT'\iota \in \mathcal{GL}(E'_1, \text{im}(T))$ para todo $T' \in B(T, \varepsilon)_{\mathcal{L}(E_1, E_2)}$. En particular, para todo $T' \in B(T, \varepsilon)_{\mathcal{L}(E_1, E_2)}$, la aplicación $QT'\iota$ es de Fredholm y tiene índice 0. Luego, usando dos veces la propiedad «2 de 3» del Teorema 70, vemos que T' es también de Fredholm, y aplicando una vez más el Teorema 70 vemos que

$$\text{índ}(Q) + \text{índ}(T') + \text{índ}(\iota) = \text{índ}(QT'\iota) = 0 = \text{índ}(QT\iota) = \text{índ}(Q) + \text{índ}(T) + \text{índ}(\iota)$$

y por lo tanto

$$\text{índ}(T') = \text{índ}(T)$$

para todo $T' \in B(T, \varepsilon)_{\mathcal{L}(E_1, E_2)}$. □

COROLARIO 77. Si $T \in \mathcal{F}(E_1, E_2)$, entonces $\text{índ}(T + K) = \text{índ}(T)$ para cualquier $K \in \mathcal{K}(E_1, E_2)$.

DEMOSTRACIÓN. Para todo $s \in \mathbb{R}$, es $sK \in \mathcal{K}(E_1, E_2)$. Por el Corolario 74, la asignación $s \in [0, 1] \mapsto T + sK$ define entonces un camino en $\mathcal{F}(E_1, E_2)$ entre T y $T + K$. Luego T y $T + K$ están en la misma componente (arco)conexa y por consiguiente poseen el mismo índice de Fredholm, por el Teorema 76. □

OBSERVACIÓN 78. Sean E_1 y E_2 espacios de Banach de dimensión infinita. Dado un operador de Fredholm $T \in \mathcal{F}(E_1, E_2)$ no es difícil ver que podemos incrementar su núcleo y su conúcleo arbitrariamente mediante perturbaciones compactas, esto es, que para todo $N > 0$ existe un operador compacto $K \in \mathcal{K}(E_1, E_2)$ con $\dim \ker(T + K) \geq N$. Por lo tanto, al variar $T \in \mathcal{F}(E_1, E_2)$ dentro de una misma componente conexa, el núcleo y el conúcleo varían arbitrariamente. Sin embargo, el Teorema 76 nos asegura que estos efectos se cancelan exactamente: cada vez que el núcleo gana (*resp.* pierde) una dimensión, el conúcleo también gana (*resp.* pierde) una dimensión, i.e. la imagen pierde (*resp.* gana) una dimensión, logrando así mantener constante al índice en dicha componente.

OBSERVACIÓN 79. Si \mathcal{H} es un espacio de Hilbert de dimensión infinita, entonces el índice es un invariante completo del conjunto $\pi_0(\mathcal{F}(\mathcal{H}))$ de componentes (arco)conexas de $\mathcal{F}(\mathcal{H})$. Un bosquejo de la demostración es el siguiente: $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ es un monoide topológico con respecto a la multiplicación, y esta estructura de monoide topológico induce una estructura de monoide en $\pi_0(\mathcal{F}(\mathcal{H}))$. Por la aditividad y la continuidad del índice, si consideramos al grupo aditivo \mathbb{Z} como un monoide topológico (con la topología discreta), el morfismo $\text{índ} : \mathcal{F}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{Z}$ resulta un morfismo de monoides topológicos, y por consiguiente induce un morfismo de monoides $\text{índ} : \pi_0(\mathcal{F}(\mathcal{H})) \rightarrow \pi_0(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Queremos ver que este último morfismo es un isomorfismo. La suryectividad está dada por la Observación 67, por lo cual sólo resta ver la inyectividad. Por el Teorema de Atkinson, el monoide $\pi_0(\mathcal{F}(\mathcal{H}))$ resulta ser de hecho un grupo, de modo que para chequear la inyectividad basta con ver que $\text{índ} : \pi_0(\mathcal{F}(\mathcal{H})) \rightarrow \mathbb{Z}$ tiene núcleo trivial. Esto equivale a la afirmación de que todos los operadores de Fredholm de índice 0 sobre \mathcal{H} están en la misma componente (arco)conexa (a saber, la componente conexa de $\text{Id}_{\mathcal{H}}$). Usando técnicas similares a las de nuestra demostración del Teorema de Atkinson, vemos que todo operador de índice 0 puede ser convertido en un operador inversible mediante una perturbación compacta (y las perturbaciones compactas permanecen dentro de la

⁴Como $\mathcal{F}(E_1, E_2)$ es abierto en $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ y $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ es localmente arcoconexo (de hecho, localmente convexo, por ser un espacio normado), sus componentes arcoconexas coinciden con sus componentes conexas, y cada una de dichas componentes es también abierta.

misma componente conexa, gracias a la «técnica del segmento» que usamos al demostrar el Corolario 77). Luego basta con ver que $\mathcal{GL}(\mathcal{H})$ es arcoconexo. Un célebre teorema debido a N. Kuiper establece que $\mathcal{GL}(\mathcal{H})$ es de hecho contráctil [7, 10].

Ahora bien, \mathbb{Z} no es más que la completación del monoide \mathbb{N} a un grupo (el «grupo de Grothendieck» de \mathbb{N}), y el monoide \mathbb{N} puede ser identificado con el monoide $\text{Vect}(\{\star\})$ de clases de isomorfismos de fibrados vectoriales sobre el espacio de un punto $\{\star\}$ (con la operación de suma directa). En general, dado un espacio compacto X , el grupo de Grothendieck del monoide $\text{Vect}(X)$ de fibrados vectoriales sobre X se denota $K_0(X)$. En particular, $\mathbb{Z} \cong K_0(\{\star\})$. Por otra parte, $\pi_0(\mathcal{F}(\mathcal{H}))$ no es más que el conjunto de clases de homotopía de funciones continuas $\star \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{H})$, esto es, $\pi_0(\mathcal{F}(\mathcal{H})) \cong \text{homot}(\star, \mathcal{F}(\mathcal{H}))$. Luego nuestro isomorfismo $\text{índ} : \pi_0(\mathcal{F}(\mathcal{H})) \rightarrow \mathbb{Z}$ puede ser escrito como

$$\text{índ} : \text{homot}(\star, \mathcal{F}(\mathcal{H})) \rightarrow K_0(\star)$$

Resulta que se pueden definir «índices generalizados»

$$\text{índ} : \text{homot}(X, \mathcal{F}(\mathcal{H})) \rightarrow K_0(X)$$

para todo espacio compacto razonable X , y que éstos vuelven a ser biyectivos. Este notable resultado se conoce como el teorema de Atiyah-Jänich [10].

El Teorema del Índice

4.1. Operadores de multiplicación

PROPOSICIÓN 80. Para cada $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, tenemos un operador acotado $M_\varphi \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{T}))$ dado por

$$M_\varphi(f) = \varphi f$$

cuya norma es

$$\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$$

(En particular, para todo $n \in \mathbb{Z}$ es $\|M_{\xi_n}\| = 1$). Este operador se denomina **operador de multiplicación con símbolo** φ .

La matriz de M_φ respecto a la base de Fourier es constante en las diagonales, y su entrada (i, j) es el $(i - j)$ -ésimo coeficiente de Fourier de φ .

El morfismo isométrico $L^\infty(\mathbb{T}) \rightarrow \mathcal{L}(L^2(\mathbb{T}))$ dado por $\varphi \mapsto M_\varphi$ es un morfismo de álgebras y satisface

$$M_{\bar{\varphi}} = M_\varphi^*$$

para toda función $\varphi \in C(\mathbb{T})$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Para cualquier $f \in L^2(\mathbb{T})$, tenemos que

$$\int_{\mathbb{T}} |M_\varphi(f)|^2 d\mu = \int_{\mathbb{T}} |\varphi f|^2 d\mu \leq \int_{\mathbb{T}} \|\varphi\|_\infty^2 |f|^2 d\mu = \|\varphi\|_\infty^2 \int_{\mathbb{T}} |f|^2 d\mu < \infty$$

Esto establece que $M_\varphi(f) \in L^2(\mathbb{T})$ y que

$$\|M_\varphi(f)\|_2 \leq \|\varphi\|_\infty \|f\|_2$$

Luego $M_\varphi \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{T}))$ con

$$(4.1.1) \quad \|M_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty$$

Queremos ver que 4.1.1 es de hecho una igualdad. Si $\varphi = 0$, esto es inmediato. Supongamos entonces que $\varphi \neq 0$ (en particular, $\|\varphi\|_\infty > 0$). Fijemos un $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon \leq \|\varphi\|_\infty$. Luego el conjunto

$$A := |\varphi|^{-1}((\|\varphi\|_\infty - \varepsilon, \infty)) \subset \mathbb{T}$$

tiene medida no nula en \mathbb{T} , y su función característica χ_A satisface

$$(4.1.2) \quad \|\chi_A\|_2^2 = \int_{\mathbb{T}} |\chi_A|^2 d\mu = \int_{\mathbb{T}} \chi_A d\mu = \mu(A) > 0$$

lo cual significa que χ_A es un vector no nulo en $L^2(\mathbb{T})$. La idea es mostrar que cuando aplicamos M_φ a χ_A obtenemos un vector al menos $\|\varphi\|_\infty - \varepsilon$ veces más grande. Como $|\varphi| > \|\varphi\|_\infty - \varepsilon \geq 0$ sobre A , vale la siguiente desigualdad funcional:

$$|\varphi| \chi_A \geq (\|\varphi\|_\infty - \varepsilon) \chi_A \geq 0$$

Tomando módulos cuadrados, obtenemos

$$|M_\varphi(\chi_A)|^2 = |\varphi \chi_A|^2 = \|\varphi \chi_A\|_2^2 \geq |(\|\varphi\|_\infty - \varepsilon) \chi_A|^2$$

e integrando sobre \mathbb{T} nos queda

$$\begin{aligned} \|M_\varphi(\chi_A)\|_2^2 &= \int_{\mathbb{T}} |M_\varphi(\chi_A)|^2 d\mu \\ &\geq \int_{\mathbb{T}} |(\|\varphi\|_\infty - \varepsilon) \chi_A|^2 d\mu \\ &= \int_{\mathbb{T}} (\|\varphi\|_\infty - \varepsilon)^2 \chi_A d\mu \\ &= (\|\varphi\|_\infty - \varepsilon)^2 \mu(A) \\ &= (\|\varphi\|_\infty - \varepsilon)^2 \|\chi_A\|_2^2 \quad (\text{por 4.1.2}) \end{aligned}$$

esto es,

$$\|M_\varphi(\chi_A)\|_2 \geq (\|\varphi\|_\infty - \varepsilon) \|\chi_A\|_2$$

En consecuencia

$$\|M_\varphi\| \geq \left\| M_\varphi \left(\frac{\chi_A}{\|\chi_A\|_2} \right) \right\|_2 = \frac{\|M_\varphi(\chi_A)\|_2}{\|\chi_A\|_2} \geq \|\varphi\|_\infty - \varepsilon$$

y como podemos tomar $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño, obtenemos la desigualdad que nos faltaba:

$$\|M_\varphi\| \geq \|\varphi\|_\infty$$

Por otro lado,

$$\text{Mat}(M_\varphi)_{i,j} = \langle M_\varphi(\xi_j), \xi_i \rangle = \int_{\mathbb{T}} \varphi \xi_j \overline{\xi_i} d\mu = \int_{\mathbb{T}} \overline{\varphi \xi_i} \xi_j d\mu = \langle \varphi, \xi_{i-j} \rangle$$

lo cual establece que la matriz de M_φ respecto a la base de Fourier es la indicada.

La linealidad

$$M_{\varphi+\lambda\psi} = M_\varphi + \lambda M_\psi$$

y la multiplicatividad

$$M_{\varphi\psi} = M_\varphi M_\psi$$

son obvias, como también lo es la preservación del elemento neutro:

$$M_1 = \text{Id}_{L^2(\mathbb{T})}$$

Por último, al ser

$$\langle M_\varphi(f), g \rangle = \langle \varphi f, g \rangle = \int_{\mathbb{T}} \varphi f \overline{g} d\mu = \int_{\mathbb{T}} f \overline{\varphi g} d\mu = \langle f, \overline{\varphi} g \rangle = \langle f, M_{\overline{\varphi}} g \rangle$$

concluimos que $M_{\overline{\varphi}} = M_\varphi^*$. □

4.2. Espacio de Hardy y operadores de Toeplitz

Comenzamos definiendo al espacio de Hilbert más importante de nuestra monografía:

DEFINICIÓN 81. El subespacio cerrado

$$H^2 := \overline{\langle \xi_n : n \geq 0 \rangle} \subset L^2(\mathbb{T})$$

se denomina **espacio de Hardy**, y es un espacio de Hilbert (con el producto interno heredado de $L^2(\mathbb{T})$) por la Proposición 13. En otras palabras, H^2 es el subespacio de aquellas funciones $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$ cuyos coeficientes de Fourier negativos $\varphi_k, k < 0$ son todos nulos, o equivalentemente de aquellas funciones $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$ cuyo desarrollo de Fourier es de la forma $\varphi = \sum_{n \geq 0} \varphi_n \xi_n$.

Definimos también el subespacio vectorial

$$H^\infty := H^2 \cap L^\infty(\mathbb{T}) \subset L^\infty(\mathbb{T})$$

OBSERVACIÓN 82. El espacio de Hardy también puede ser concebido como el espacio de las funciones holomorfas en el disco abierto \mathbb{D} tales que los «valores cuadrados medios» $\int_{z \in \mathbb{T}} |f(rz)|^2 d\mu$ satisfacen

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \int_{z \in \mathbb{T}} |f(rz)|^2 d\mu < \infty$$

Aquí sin embargo no utilizaremos esta perspectiva. Para la demostración de esta equivalencia y otros resultados en este sentido, véase [14].

PROPOSICIÓN 83. *Para cualquier par de funciones $\varphi \in H^\infty$ y $\psi \in H^2$, tenemos $\varphi\psi \in H^2$. (En otras palabras, es $H^\infty \cdot H^2 \subset H^2$). En particular, H^∞ es una subálgebra cerrada de $L^\infty(\mathbb{T})$.*

DEMOSTRACIÓN. Como H^∞ es la preimagen de H^2 bajo la inclusión acotada $\iota : H^\infty \rightarrow H^2$ (ver Ejemplo 10), H^∞ resulta cerrado en $L^\infty(\mathbb{T})$. Para ver que se trata de una subálgebra, necesitamos ver que $H^\infty \cdot H^\infty \subset H^\infty$. Comenzamos notando que para cada función $\varphi \in H^\infty$ y cada $n \geq 0$, tenemos

$$M_\varphi(\xi_n) \stackrel{\text{i.e.}}{=} \varphi\xi_n \in H^2$$

ya que los coeficientes de Fourier negativos $(\varphi\xi_n)_k, k < 0$ están dados por

$$\langle \varphi\xi_n, \xi_k \rangle = \int_{\mathbb{T}} \varphi\xi_n \overline{\xi_k} d\mu = \int_{\mathbb{T}} \overline{\varphi\xi_{k-n}} d\mu = \langle \varphi, \xi_{k-n} \rangle = 0 \quad (k < 0)$$

(puesto que $k - n < 0$ siempre que $k < 0$ y $n \geq 0$, y por hipótesis $\varphi \in H^\infty \subset H^2$). Luego por linealidad tenemos

$$M_\varphi(\langle \xi_n, n \geq 0 \rangle) \subset H^2$$

y por continuidad del operador M_φ (Proposición 80) es

$$\varphi \cdot H^2 = M_\varphi(H^2) = M_\varphi(\overline{\langle \xi_n, n \geq 0 \rangle}) \subset \overline{M_\varphi(\langle \xi_n, n \geq 0 \rangle)} \subset \overline{H^2} = H^2$$

Como esto vale para cada $\varphi \in H^\infty$, concluimos que $H^\infty \cdot H^2 \subset H^2$, y en particular

$$H^\infty \cdot H^\infty \subset H^\infty \cdot H^2 \subset H^2$$

Como $L^\infty(\mathbb{T})$ está cerrado bajo la multiplicación (Ejemplo 5), tenemos también

$$H^\infty \cdot H^\infty \subset L^\infty(\mathbb{T}) \cdot L^\infty(\mathbb{T}) \subset L^\infty(\mathbb{T})$$

Luego juntando estas dos inclusiones obtenemos

$$H^\infty \cdot H^\infty \subset H^2 \cap L^\infty(\mathbb{T}) = H^\infty$$

como queríamos demostrar. \square

Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert separable y sea $e_n, n \geq 0$ una base ortonormal de \mathcal{H} . El ejemplo más inmediato de un operador de Fredholm de índice 1 es el operador shift $S : e_n \mapsto e_{n+1}$ y el ejemplo más inmediato de un operador de índice -1 es su adjunto, el operador coshift $S^* : e_{n+1} \mapsto e_n, e_0 \mapsto 0$. Podemos ver a \mathcal{H} como el espacio de Hardy H^2 mediante la correspondencia $e_n \longleftrightarrow \xi_n$. Haciendo esta identificación, el operador shift corresponde al operador M_{ξ_1} , restringido y correstringido a H^2 . (Este operador está bien definido, puesto que $M_{\xi_1}(H^2) \subset H^2$). Querríamos realizar el operador coshift de una forma similar, utilizando $M_{\xi_{-1}}$. Lamentablemente la restricción de $M_{\xi_{-1}}$ a H^2 no se correstringe a H^2 . Para remediar esto, utilizaremos la proyección ortogonal (correstringida) $P : L^2(\mathbb{T}) \rightarrow H^2$, dada explícitamente por

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n \mapsto \sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

(De aquí en más, P siempre denotará esta proyección en específico, con codominio H^2). Podemos entonces definir el operador

$$T_{\xi_{-1}} := PM_{\xi_{-1}|_{H^2}} \in \mathcal{L}(H^2)$$

y vemos rápidamente que este operador manda ξ_{n+1} en ξ_n y ξ_0 en 0, realizando así el operador coshift. Aún más, la restricción $M_{\xi_1} : H^2 \rightarrow H^2$ que habíamos utilizado para realizar el operador shift coincide con el operador

$$T_{\xi_1} := PM_{\xi_1|H^2} \in \mathcal{L}(H^2)$$

Esto nos motiva a definir, para cada $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, el operador

$$T_\varphi := PT_\varphi|H^2 \in \mathcal{L}(H^2)$$

llamado **operador de Toeplitz con símbolo φ** .

A continuación damos las principales propiedades de estos operadores:

PROPOSICIÓN 84. *Para cada $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, tenemos un operador acotado $T_\varphi \in \mathcal{L}(H^2)$ dado por*

$$T_\varphi(f) = P(\varphi f)$$

cuya norma es

$$\|T_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$$

(En particular, para todo $n \in \mathbb{Z}$ es $\|T_{\xi_n}\| = 1$).

La matriz de T_φ respecto a la base $\{\xi_n, n \geq 0\}$ es igual a la matriz de M_φ respecto a la base de Fourier $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$, excepto en que sus entradas están indexadas por $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y no por $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

El morfismo isométrico $L^\infty(\mathbb{T}) \rightarrow \mathcal{L}(H^2)$ dado por $\varphi \mapsto T_\varphi$ es lineal y satisface

$$T_\varphi^* = T_{\bar{\varphi}}$$

para toda función $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$. La multiplicatividad vale salvo operadores compactos cuando uno de los dos símbolos es continuo. En otras palabras, para cualquier par de funciones $\varphi \in C(\mathbb{T})$ y $\psi \in L^\infty(\mathbb{T})$, se tiene

$$T_{\varphi\psi} - T_\varphi T_\psi \in \mathcal{K}(H^2)$$

y

$$T_{\psi\varphi} - T_\psi T_\varphi \in \mathcal{K}(H^2)$$

Por último, para cualquier par de funciones $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ y $\psi \in H^\infty$ y se tienen las relaciones de multiplicatividad estricta

$$T_{\varphi\psi} = T_\varphi T_\psi$$

y

$$T_{\bar{\psi}\varphi} = T_{\bar{\psi}} T_\varphi$$

DEMOSTRACIÓN. La segunda afirmación, sobre la forma de la matriz, es autoevidente. Como $\|P\| = 1$, tenemos

$$\|T_\varphi\| = \|PM_\varphi|H^2\| \leq \|P\| \|M_\varphi|H^2\| \leq \|M_\varphi\| = \|\varphi\|$$

La desigualdad contraria será más ardua de probar. Sea ι es la inclusión de H^2 en $L^2(\mathbb{T})$. Consideremos la sucesión de operadores

$$(M_{\xi_{-k}} \iota T_\varphi P M_{\xi_k})_{k \geq 0} \subset \mathcal{L}(L^2(\mathbb{T}))$$

La matriz de $\iota T_\varphi P$ respecto a la base de Fourier tiene soporte en el cuadrante $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (esto es, sus entradas con alguna coordenada negativa son todas nulas), y en dicho cuadrante coincide con la matriz de T_φ (esto es, su entrada (i, j) -ésima es φ_{i-j} para $i, j \geq 0$).

La matriz de $M_{\xi_{-k}} \iota T_\varphi P M_{\xi_k}$ es exactamente igual, sólo que corrida k unidades hacia arriba y hacia la izquierda (esto es, su entrada (i, j) -ésima es $\varphi_{(i+k)-(j+k)} = \varphi_{i-j}$ para $i, j \geq -k$ y 0 en caso contrario). En particular, mirando la j -ésima columna para los sucesivos valores de k , vemos que

$$(M_{\xi_{-k}} \iota T_\varphi P M_{\xi_k})(\xi_j) = \sum_{i \geq -k}^{\infty} \varphi_{i-j} \xi_i$$

por lo cual

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow \infty} (M_{\xi_{-k}} \iota T_\varphi P M_{\xi_k})(\xi_j) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i \geq -k}^{\infty} \varphi_{i-j} \xi_i \\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \varphi_{i-j} \xi_i \\
&= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \varphi_i \xi_{i+j} \\
&= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \varphi_i \xi_i \xi_j \\
&= \varphi \xi_j \\
&= M_\varphi(\xi_j)
\end{aligned}$$

Por lo tanto es

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M_{\xi_{-k}} \iota T_\varphi P M_{\xi_k}(\psi) = M_\varphi(\psi)$$

para toda combinación lineal $\psi \in \langle \xi_n, n \in \mathbb{Z} \rangle$. Pero además tenemos

$$\|M_{\xi_{-k}} \iota T_\varphi P M_{\xi_k}\| \leq \|M_{\xi_{-k}}\| \|\iota\| \|T_\varphi\| \|P\| \|M_{\xi_k}\| = \|T_\varphi\|$$

lo cual nos habilita a aplicar el Lema 28 (con $C := \|T_\varphi\|$). Usando dicho Lema concluimos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M_{\xi_{-k}} \iota T_\varphi P M_{\xi_k}(\psi) = M_\varphi(\psi)$$

para todo $\psi \in \overline{\langle \xi_n, n \in \mathbb{Z} \rangle} = L^2(\mathbb{T})$. Luego obtenemos la desigualdad que nos faltaba:

$$\begin{aligned}
\|M_\varphi\| &= \sup_{\|\psi\|=1} \|M_\varphi(\psi)\| \\
&\leq \sup_{\|\psi\|=1} \left\| \lim_{k \rightarrow \infty} M_{\xi_{-k}} \iota T_\varphi P M_{\xi_k}(\psi) \right\| \\
&= \sup_{\|\psi\|=1} \lim_{k \rightarrow \infty} \|M_{\xi_{-k}} \iota T_\varphi P M_{\xi_k}(\psi)\| \\
&\leq \sup_{\|\psi\|=1} \sup_{k \geq 0} \|M_{\xi_{-k}} \iota T_\varphi P M_{\xi_k}(\psi)\| \\
&\leq \sup_{\|\psi\|=1} \sup_{k \geq 0} \|M_{\xi_{-k}} \iota T_\varphi P M_{\xi_k}\| \|\psi\| \\
&= \sup_{k \geq 0} \|M_{\xi_{-k}} \iota T_\varphi P M_{\xi_k}\| \\
&\leq \|T_\varphi\|
\end{aligned}$$

Que la asignación $\varphi \mapsto T_\varphi$ sigue siendo lineal es inmediato. Por el ejemplo 41, $\iota \in \mathcal{L}(H^2, L^2(\mathbb{T}))$ es la adjunta de $P \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{T}), H^2)$, por lo cual

$$(T_\varphi)^* = (P M_\varphi \iota)^* = (P M_\varphi \iota)^* = \iota^* M_\varphi^* P^* = P M_{\bar{\varphi}} \iota = T_{\bar{\varphi}}$$

Consideremos ahora la proyección ortogonal $\tilde{P} := \iota P \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{T}))$. Se trata de un operador autoadjunto (Ejemplo 42). Afirmamos que para toda $\varphi \in C(\mathbb{T})$ es

$$(4.2.1) \quad [\tilde{P}, M_\varphi] \stackrel{\text{i.e.}}{=} \tilde{P} M_\varphi - M_\varphi \tilde{P} \in \mathcal{K}(L^2(\mathbb{T}))$$

En efecto, consideremos el conjunto $\mathcal{A} \subset C(\mathbb{T})$ de aquellas $\varphi \in C(\mathbb{T})$ que satisfacen (4.2.1). Es claro que \mathcal{A} forma un subespacio, y de hecho una subálgebra ya que los operadores compactos forman un

ideal bilátero (Proposición 47) y

$$\begin{aligned}
[\tilde{P}, M_{\varphi\varphi'}] &= [\tilde{P}, M_{\varphi}M_{\varphi'}] \\
&= \tilde{P}M_{\varphi}M_{\varphi'} - M_{\varphi}M_{\varphi'}\tilde{P} \\
&= \tilde{P}M_{\varphi}M_{\varphi'} - M_{\varphi}\tilde{P}M_{\varphi'} + M_{\varphi}\tilde{P}M_{\varphi'} - M_{\varphi}M_{\varphi'}\tilde{P} \\
&= [\tilde{P}, M_{\varphi}]M_{\varphi'} + M_{\varphi}[\tilde{P}, M_{\varphi'}]
\end{aligned}$$

Esta subálgebra está cerrada por conjugación, ya que el adjunto de un operador compacto es nuevamente un operador compacto (Corolario 50) y

$$\begin{aligned}
[\tilde{P}, M_{\overline{\varphi}}] &= [\tilde{P}^*, M_{\varphi}^*] \\
&= \tilde{P}^*M_{\varphi}^* - M_{\varphi}^*\tilde{P}^* \\
&= (M_{\varphi}\tilde{P})^* - (\tilde{P}M_{\varphi})^* \\
&= -[(\tilde{P}M_{\varphi})^* - (M_{\varphi}\tilde{P})^*] \\
&= -(\tilde{P}M_{\varphi} - M_{\varphi}\tilde{P})^* \\
&= -[\tilde{P}, M_{\varphi}]^*
\end{aligned}$$

Además, \mathcal{A} es cerrada en $C(\mathbb{T})$ puesto que no es más que la preimagen del subespacio cerrado $\mathcal{K}(L^2(\mathbb{T}))$ bajo la asignación continua $\varphi \mapsto [\tilde{P}, M_{\varphi}]$ de $C(\mathbb{T})$ en $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{T}))$. Por último $[\tilde{P}, M_{\xi_1}] = \tilde{P}M_{\xi_1} - M_{\xi_1}\tilde{P}$ es de rango 1, dado que $(\tilde{P}M_{\xi_1} - M_{\xi_1}\tilde{P})(\xi_n) = 0$ para $n \neq -1$. En particular tenemos $\xi_1 \in \mathcal{A}$, con lo cual la subálgebra $\mathcal{A} \subset C(\mathbb{T})$ separa puntos. Por el teorema de Stone-Weierstrass complejo [4, Chapter XIII, Theorem 3.3], es entonces

$$\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}} = C(\mathbb{T}),$$

probando nuestra afirmación. De (4.2.1) obtenemos (usando la relación evidente $P\tilde{P} = P$):

$$\begin{aligned}
T_{\varphi\psi} - T_{\varphi}T_{\psi} &= PM_{\varphi\psi}\iota - (PM_{\varphi}\iota)(PM_{\psi}\iota) \\
&= P\tilde{P}M_{\varphi}M_{\psi}\iota - PM_{\varphi}\tilde{P}M_{\psi}\iota \\
&= P[\tilde{P}, M_{\varphi}]M_{\psi}\iota \in \mathcal{K}(H^2)
\end{aligned}$$

y (usando la relación evidente $\tilde{P}\iota = \iota$)

$$\begin{aligned}
T_{\psi\varphi} - T_{\psi}T_{\varphi} &= PM_{\psi\varphi}\iota - (PM_{\psi}\iota)(PM_{\varphi}\iota) \\
&= PM_{\psi}M_{\varphi}\tilde{P}\iota - PM_{\psi}\tilde{P}M_{\varphi}\iota \\
&= PM_{\psi}[M_{\varphi}, \tilde{P}]\iota \\
&= -PM_{\psi}[\tilde{P}, M_{\varphi}]\iota \in \mathcal{K}(H^2)
\end{aligned}$$

para toda función $\psi \in L^{\infty}(\mathbb{T})$.

Por último, si $\psi \in H^{\infty}$, tenemos $\psi \cdot H^2 \subset H^2$ (Proposición 83), y en consecuencia $\tilde{P}M_{\psi}\iota = M_{\psi}\iota$. De esto se desprende que

$$\begin{aligned}
T_{\varphi}T_{\psi} &= PM_{\varphi}\iota PM_{\psi}\iota \\
&= PM_{\varphi}\tilde{P}M_{\psi}\iota \\
&= PM_{\varphi}M_{\psi}\iota \\
&= PM_{\varphi\psi}\iota \\
&= T_{\varphi\psi}
\end{aligned}$$

Como $\varphi \in L^{\infty}(\mathbb{T})$ es arbitraria, también tenemos $T_{\overline{\varphi}}T_{\psi} = T_{\overline{\varphi\psi}}$, y conjugando resulta $T_{\psi}^*T_{\overline{\varphi}}^* = T_{\overline{\varphi\psi}}^*$, esto es,

$$T_{\overline{\psi}}T_{\varphi} = T_{\overline{\psi\varphi}}$$

□

En particular, la multiplicatividad salvo compactos vale siempre que trabajemos con símbolos continuos, dándonos el siguiente resultado:

COROLARIO 85. *Si $\psi \in C(\mathbb{T})$ no se anula en ningún punto, entonces T_ψ es un operador de Fredholm.*

DEMOSTRACIÓN. Si ψ no se anula, tenemos $\psi^{-1} \in C(\mathbb{T})$, y por la Proposición 84 vemos que $T_{\psi^{-1}}$ es inversa de T_ψ salvo compactos. Luego, por el Teorema de Atkinson, T_ψ es un operador de Fredholm. \square

(Más adelante veremos que vale la vuelta: si T_ψ es un operador de Fredholm con símbolo continuo, entonces ψ nunca se anula).

Llegamos así al primero de nuestros dos principales teoremas:

TEOREMA 86. (Teorema del Índice). *Si $\varphi \in C(\mathbb{T})$ no se anula, entonces T_φ es un operador de Fredholm y su índice es $\text{ind}(T_\varphi) = n(\varphi \circ q, 0)$, el número de giros de la curva cerrada $\varphi \circ q : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^\times$ alrededor del 0.*

DEMOSTRACIÓN. Escribamos $n := n(\varphi \circ q, 0)$. Por el Corolario 59 existe un camino en $C(\mathbb{T})$ que conecta a φ con ξ_n vía funciones nunca nulas, esto es, un camino en $C(\mathbb{T})^\times$. Por el Corolario 85, la aplicación continua $C^\times(\mathbb{T}) \rightarrow \mathcal{L}(H^2)$, $\varphi \mapsto T_\varphi$ toma valores en $\mathcal{F}(H^2)$. Luego, postcomponiendo nuestro camino con dicha aplicación, obtenemos un camino en $\mathcal{F}(H^2)$ que conecta a los operadores T_φ y T_{ξ_n} . Así pues, T_φ y T_{ξ_n} yacen en la misma componente conexa, con lo cual poseen el mismo índice:

$$\text{ind}(T_\varphi) = \text{ind}(T_{\xi_n}) = n$$

\square

Álgebras de Banach

5.1. Primeras definiciones

Dado un espacio de Banach E , su espacio de operadores $\mathcal{L}(E)$ no es meramente un espacio vectorial: es también un álgebra, con multiplicación dada por la composición. Además, por la Observación 8, la norma de $\mathcal{L}(E)$ es **submultiplicativa**, vale decir:

$$\|T'T\| \leq \|T'\| \|T\|$$

para cualesquiera $T, T' \in \mathcal{L}(E)$. Generalizando este fenómeno, introducimos la siguiente definición:

DEFINICIÓN 87. Un **álgebra de Banach (unital)** es un álgebra (unital) \mathcal{A} dotada de una norma que hace del espacio vectorial subyacente un espacio de Banach, tal que

$$\|x'x\| \leq \|x'\| \|x\|$$

para cualesquiera $x, x' \in \mathcal{A}$. (De esta condición se sigue fácilmente que el producto $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ es continuo). Decimos que \mathcal{A} es **normalizada** si además $\|1_{\mathcal{A}}\| = 1$.

Una ***-álgebra de Banach** es un álgebra de Banach \mathcal{A} dotada de una involución¹ $(-)^* : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ que satisface las condiciones

$$(x + \lambda x')^* = x^* + \bar{\lambda} x'^*$$

$$(x'x)^* = x^* x'^*$$

y

$$\|x^*\| = \|x\|$$

para todo par de vectores $x, x' \in \mathcal{A}$ y todo escalar $\lambda \in \mathbb{C}$. (De estas condiciones se sigue fácilmente que la involución $(-)^* : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ es continua y que $1_{\mathcal{A}}^* = 1_{\mathcal{A}}$). Una *-álgebra de Banach es una **C*-álgebra** si satisface además la «identidad C*»:

$$\|xx^*\| = \|x\|^2$$

(y por lo tanto también $\|x^*x\| = \|x^*(x^*)^*\| = \|x^*\|^2 = \|x\|^2$) para todo $x \in \mathcal{A}$.

Por ejemplo, para todo espacio de Banach E , el espacio de operadores $\mathcal{L}(E)$ forma un álgebra de Banach, y para todo espacio de Hilbert \mathcal{H} , el espacio de operadores $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ forma una C*-álgebra con la involución dada por tomar adjuntos (Proposición 39). Estas álgebras de Banach son no-conmutativas siempre que $\dim E > 1$ (resp. $\dim \mathcal{H} > 1$). A continuación exhibimos dos familias de álgebras de Banach (de hecho, C*-álgebras) conmutativas:

EJEMPLO 88. Dado un espacio topológico compacto X , el espacio de Banach $C(X)$ es un álgebra de Banach con la multiplicación punto a punto, y es de hecho una C*-álgebra con la involución dada por $f \mapsto \bar{f}$, como el lector puede verificar. (Si X no es compacto, $C_b(X)$ es un álgebra de Banach *no unital*).

EJEMPLO 89. Dado un espacio de medida X , el espacio de Banach $L^\infty(X)$ es un álgebra de Banach con la multiplicación punto a punto, y es de hecho una C*-álgebra con la involución dada por $f \mapsto \bar{f}$, como el lector puede verificar.

¹Dado un conjunto X , una involución [sobre X] es una aplicación $\omega : X \rightarrow X$ tal que $\omega \circ \omega = \text{Id}_X$.

EJEMPLO 90. Sea \mathcal{A} un álgebra de Banach y sea $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ una subálgebra cerrada. Entonces $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ es nuevamente un álgebra de Banach (y decimos que es una **subálgebra de Banach** de \mathcal{A}). Si \mathcal{A} es además una $*$ -álgebra de Banach (*resp.* C^* -álgebra) y la subálgebra \mathcal{A}' es $*$ -cerrada (esto es, para todo $x \in \mathcal{A}'$ se tiene $x^* \in \mathcal{A}'$) entonces \mathcal{A}' es también una $*$ -álgebra de Banach (*resp.* C^* -álgebra) y decimos que es una **$*$ -subálgebra de Banach** (*resp.* **C^* -subálgebra**) de \mathcal{A} .

Por ejemplo, H^∞ es una subálgebra de Banach de $L^\infty(\mathbb{T})$ por la Proposición 83, pero *no* es una C^* -subálgebra porque no es cerrada por conjugación.

EJEMPLO 91. Sea \mathcal{A} un álgebra de Banach. Dado un ideal cerrado $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$, el cociente \mathcal{A}/\mathcal{E} es nuevamente un álgebra de Banach. Si \mathcal{A} es una $*$ -álgebra y el ideal cerrado $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ es también $*$ -cerrado (esto es, para cada $x \in \mathcal{E}$ se tiene $x^* \in \mathcal{E}$), entonces la involución

$$(x + \mathcal{E})^* := x^* + \mathcal{E}$$

está bien definida en el cociente \mathcal{A}/\mathcal{E} , y con esta involución el cociente \mathcal{A}/\mathcal{E} es nuevamente una $*$ -álgebra de Banach.

Por ejemplo, si E es un espacio de Banach y $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$, por la Proposición 47 podemos tomar $\mathcal{E} = \mathcal{K}(E)$, y el cociente obtenido se denomina el **álgebra de Calkin** de E , y se denota $\text{Cal}(E)$.

OBSERVACIÓN 92. Por el Teorema de Atkinson vale la equivalencia

$$T \in \mathcal{F}(E) \iff [T] \in \text{Cal}(E)^\times$$

DEFINICIÓN 93. Sean \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 dos álgebras de Banach. Un **morfismo de álgebras de Banach** de \mathcal{A}_1 en \mathcal{A}_2 es un morfismo de álgebras (unitales), cuya aplicación lineal subyacente es acotada —en otras palabras, una aplicación $T \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ tal que $T(1_{\mathcal{A}_1}) = 1_{\mathcal{A}_2}$ y $T(x'x) = T(x')T(x)$ para todo par de elementos $x, x' \in \mathcal{A}_1$.

Si \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 son $*$ -álgebras de Banach, entonces un **morfismo de $*$ -álgebras de Banach** de \mathcal{A}_1 en \mathcal{A}_2 es un morfismo de álgebras de Banach $T : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ tal que $T(x^*) = T(x)^*$ para todo elemento $x \in \mathcal{A}_1$.

Si \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 son C^* -álgebras, un **morfismo de C^* -álgebras** de \mathcal{A}_1 en \mathcal{A}_2 es simplemente un morfismo $T : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ de $*$ -álgebras de Banach.

EJEMPLO 94. La Proposición 80 establece que el morfismo $L^\infty(\mathbb{T}) \rightarrow \mathcal{L}(L^2(\mathbb{T}))$, $\varphi \mapsto M_\varphi$ es un morfismo isométrico de C^* -álgebras.

EJEMPLO 95. En el contexto del Ejemplo 91, la proyección al cociente $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{E}$ es un morfismo de álgebras de Banach (*resp.* $*$ -álgebras de Banach).

5.2. La exponencial

Toda álgebra de Banach viene con una noción de «exponenciación»:

DEFINICIÓN 96. Sea \mathcal{A} un álgebra de Banach. La **aplicación exponencial** de \mathcal{A} es la aplicación

$$\exp_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$$

dada por

$$x \mapsto \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}$$

Esta serie converge para todo $x \in \mathcal{A}$, puesto que converge absolutamente (ver Lema 2).

PROPOSICIÓN 97. Sea \mathcal{A} un álgebra de Banach. Entonces

$$\exp_{\mathcal{A}}(0) = 1_{\mathcal{A}}$$

y si $x, y \in \mathcal{A}$ son tales que $xy = yx$, se tiene

$$\exp_{\mathcal{A}}(x) \exp_{\mathcal{A}}(y) = \exp_{\mathcal{A}}(x + y)$$

En particular,

$$\left. \begin{array}{l} \exp_{\mathcal{A}}(x) \exp_{\mathcal{A}}(-x) \\ \exp_{\mathcal{A}}(-x) \exp_{\mathcal{A}}(x) \end{array} \right\} = \exp_{\mathcal{A}}(x - x) = \exp_{\mathcal{A}}(0) = 1_{\mathcal{A}}$$

para todo $x \in \mathcal{A}$, por lo cual $\exp_{\mathcal{A}}$ toma valores en \mathcal{A}^{\times} .

Si \mathcal{A}' es una subálgebra de Banach de \mathcal{A} , tenemos

$$\exp_{\mathcal{A}'}(x) = \exp_{\mathcal{A}}(x)$$

para todo $x \in \mathcal{A}'$. En particular, $\exp_{\mathcal{A}}(x) \in \mathcal{A}'$ para todo $x \in \mathcal{A}'$.

Por último, si \mathcal{A} es una *-álgebra de Banach, entonces

$$\exp_{\mathcal{A}}(x^*) = \exp_{\mathcal{A}}(x)^*$$

DEMOSTRACIÓN. La primera propiedad se sigue inmediatamente de la definición. La segunda se demuestra usando la identidad binomial $(x + y)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} x^p y^{n-p}$ (la cual es válida porque x conmuta con y):

$$\begin{aligned} \exp_{\mathcal{A}}(x) \exp_{\mathcal{A}}(y) &= \sum_{p \geq 0} \frac{x^p}{p!} \sum_{q \geq 0} \frac{y^q}{q!} \\ &= \sum_{p, q \geq 0} \frac{x^p y^q}{p! q!} \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{p+q=n} \frac{x^p y^q}{p! q!} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{p+q=n} \frac{n! x^p y^q}{p! q!} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} x^p y^{n-p} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (x + y)^n \\ &= \exp_{\mathcal{A}}(x + y) \end{aligned}$$

(los reordenamientos están justificados por argumentos de convergencia absoluta mediante el Lema 2). La tercera afirmación es inmediata. La cuarta y última afirmación se sigue de la continuidad, aditividad y «multiplicatividad invertida» de la involución. \square

5.3. Teoría espectral para álgebras de Banach

A continuación generalizamos la discusión de la teoría espectral presentada en el Capítulo 1 al contexto de las álgebras de Banach. Para esto es necesario comenzar con un análogo de la construcción $\mathcal{GL}(E)$. Como $\mathcal{GL}(E)$ es precisamente el grupo de unidades $\mathcal{L}(E)^{\times}$, para un álgebra de Banach genérica \mathcal{A} este rol será tomado por su grupo de unidades \mathcal{A}^{\times} . Tenemos resultados análogos a los del Capítulo 1:

PROPOSICIÓN 98. Sea \mathcal{A} un álgebra de Banach. Entonces $B(1_{\mathcal{A}}, 1)_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}^{\times}$. En particular, como para todo $a \in \mathcal{A}^{\times}$ es

$$a = L_a(1_{\mathcal{A}}) \in \underbrace{L_a(B(1_{\mathcal{A}}, 1))}_{\text{abierto en } \mathcal{A}} \subset L_a(\mathcal{A}^{\times}) \subset \mathcal{A}^{\times}$$

(donde $L_a : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ es el homeomorfismo dado por $x \mapsto ax$, con inversa $L_{a^{-1}}$), el grupo de unidades \mathcal{A}^{\times} resulta abierto en \mathcal{A} .

DEMOSTRACIÓN. La demostración es completamente análoga al caso de los operadores (Lema 23, Proposición 24). \square

Nos servirá también tener el siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 99. Sea \mathcal{A} un álgebra de Banach. Entonces la inversión $\text{inv} : \mathcal{A}^\times \rightarrow \mathcal{A}^\times$, $a \mapsto a^{-1}$ es continua. (En particular, \mathcal{A} es un grupo topológico).

DEMOSTRACIÓN. Para todo $x \in B(0, 1)_{\mathcal{A}}$, el elemento $1_{\mathcal{A}} - x$ es inversible, y su inversa es la serie convergente $\sum_{n \geq 0} x^n$. (Esto se demuestra de la misma forma que en el Capítulo 1). Luego, si $\|y\| < 1$, resulta

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|(1+y)^{-1} - 1\| = \left\| \sum_{n \geq 1} (-y)^n \right\| \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \|(-y)^n\| \leq \sum_{n \geq 1} \|y\|^n = \frac{\|y\|}{1 - \|y\|} \rightarrow 0 \text{ cuando } \|y\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Luego, dado un $a \in \mathcal{A}^\times$, para todo $h \in \mathcal{A}$ suficientemente pequeño es $(x+h) \in \mathcal{A}^\times$ y

$$\begin{aligned} (a+h)^{-1} - a^{-1} &= (a(1+a^{-1}h))^{-1} - a^{-1} \\ &= ((1+a^{-1}h)^{-1}a^{-1}) - a^{-1} \\ &= [(1+a^{-1}h)^{-1} - 1]a^{-1} \rightarrow 0 \text{ cuando } h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

□

Llegado este punto, obtenemos la generalización que queríamos:

DEFINICIÓN 100. Sea \mathcal{A} un álgebra de Banach y sea $x \in \mathcal{A}$. Entonces definimos el **espectro** de x como el conjunto

$$\sigma_{\mathcal{A}}(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid x - \lambda 1 \notin \mathcal{A}^\times\}$$

y el **conjunto resolvente** de x como el complemento

$$\rho_{\mathcal{A}}(x) := \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{A}}(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid x - \lambda 1 \in \mathcal{A}^\times\}$$

PROPOSICIÓN 101. Sea \mathcal{A} un álgebra de Banach y sea $x \in \mathcal{A}$. Entonces $\sigma_{\mathcal{A}}(x)$ es un subconjunto compacto de \mathbb{C} .

DEMOSTRACIÓN. Igual que para el caso especial $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$ visto en el Capítulo 1 (Proposición 27). □

EJEMPLO 102. El espectro de $\varphi \in C(\mathbb{T})$ es

$$\begin{aligned} \sigma_{C(\mathbb{T})}(\varphi) &= \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \varphi - \lambda 1_{C(\mathbb{T})} \notin C(\mathbb{T})^\times\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\varphi - \lambda 1_{C(\mathbb{T})})(z) = 0 \text{ para algún } z \in \mathbb{T}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \varphi(z) - \lambda = 0 \text{ para algún } z \in \mathbb{T}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \varphi(z) = \lambda \text{ para algún } z \in \mathbb{T}\} \\ &= \text{im}(\varphi) \end{aligned}$$

Dada un álgebra de Banach \mathcal{A} y una subálgebra cerrada $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$, tenemos $\mathcal{A}'^\times \subset \mathcal{A}^\times \cap \mathcal{A}'$. Sin embargo, esta inclusión puede ser propia: puede haber elementos $a \in \mathcal{A}'$ que sean inversibles en \mathcal{A} pero no en \mathcal{A}' . Luego tenemos

$$\rho_{\mathcal{A}'}(x) \subset \rho_{\mathcal{A}}(x)$$

o equivalentemente

$$\sigma_{\mathcal{A}'}(x) \supset \sigma_{\mathcal{A}}(x)$$

y estas inclusiones en general son propias. Esto es, al pasar del álgebra de Banach \mathcal{A}' al álgebra de Banach más grande \mathcal{A} , el espectro de $x \in \mathcal{A}$ puede achicarse. Sin embargo, el siguiente teorema establece que aquellos elementos que estaban en el *borde* del espectro sobreviven a este achicamiento:

TEOREMA 103. (**Permanencia Espectral**). Sea \mathcal{A} un álgebra de Banach, sea \mathcal{A}' una subálgebra cerrada de \mathcal{A} y sea $x \in \mathcal{A}'$. Entonces

$$\partial \sigma_{\mathcal{A}'}(x) \subset \sigma_{\mathcal{A}}(x)$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $z \in \partial\sigma_{\mathcal{A}'}(x) \subset \sigma_{\mathcal{A}'}(x)$. Esto significa que podemos tomar escribir a z como el límite $z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ de una sucesión $(z_n)_{n \geq 0} \subset \rho_{\mathcal{A}'}(x)$. Esta última inclusión implica que

$$(x - z_n 1)^{-1} \in \mathcal{A}'$$

para todo $n \geq 0$. Si fuera $z \in \rho_{\mathcal{A}'}(x)$, tendríamos $x - z1 \in \mathcal{A}^\times$, y por la Proposición 99 sería

$$(x - z1)^{-1} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x - z_n 1 \right)^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (x - z_n 1)^{-1} \in \overline{\mathcal{A}'} = \mathcal{A}'$$

En consecuencia tendríamos $z \in \rho_{\mathcal{A}'}(x)$, contra lo supuesto. \square

Operadores de Toeplitz, de nuevo

6.1. La extensión de Toeplitz

Consideremos el conjunto $\{T_\varphi \mid \varphi \in C(\mathbb{T})\} \subset \mathcal{L}(H^2)$. Nos será útil considerar la subálgebra cerrada¹ \mathcal{T} generada por dicho conjunto. El álgebra \mathcal{T} se conoce como el **álgebra de Toeplitz**.

OBSERVACIÓN 104. Por la Proposición 84 sabemos que $T_\varphi^* = T_{\bar{\varphi}}$, por lo cual el conjunto generador $\{T_\varphi \mid \varphi \in C(\mathbb{T})\}$ está cerrado por tomar adjuntos. Luego es fácil ver que el álgebra de Toeplitz \mathcal{T} también está cerrada por tomar adjuntos. En otras palabras, \mathcal{T} resulta una *-subálgebra de la C^* -álgebra $\mathcal{L}(H^2)$, y por lo tanto es ella misma una C^* -álgebra.

PROPOSICIÓN 105. Sea \mathcal{T} la subálgebra cerrada de $\mathcal{L}(H^2)$ generada por los operadores de la forma T_φ , $\varphi \in C(\mathbb{T})$, y sea $[\mathcal{T}, \mathcal{T}]$ el ideal cerrado de $\mathcal{L}(H^2)$ generado por los conmutadores $T_\varphi T_\psi - T_\psi T_\varphi$ con $\varphi, \psi \in C(\mathbb{T})$. Entonces

$$[\mathcal{T}, \mathcal{T}] = \mathcal{K}(H^2)$$

DEMOSTRACIÓN. Primero, notemos que para cualesquiera $\varphi, \psi \in C(\mathbb{T})$ es

$$T_\varphi T_\psi - T_\psi T_\varphi = \underbrace{T_\varphi T_\psi - T_{\varphi\psi}}_{\in \mathcal{K}(H^2)} + \underbrace{T_{\psi\varphi} - T_\psi T_\varphi}_{\in \mathcal{K}(H^2)} \in \mathcal{K}(H^2)$$

por la Proposición 84. Luego el ideal cerrado $\mathcal{K}(H^2)$ contiene a los conmutadores, y por lo tanto al ideal cerrado generado² por éstos:

$$[\mathcal{T}, \mathcal{T}] \subset \mathcal{K}(H^2).$$

La otra inclusión es significativamente más difícil de demostrar. Por la Proposición 49 nos alcanza con mostrar que $T \in [\mathcal{T}, \mathcal{T}]$ cuando T es de rango finito, y por la Proposición 21 podemos asumir que T tiene rango 1. Como el conmutador

$$T_{\xi_{-1}} T_{\xi_1} - T_{\xi_1} T_{\xi_{-1}} = \text{Id}_{H^2} - T_{\xi_1} T_{\xi_{-1}}$$

es la proyección ortogonal a $\langle \xi_0 \rangle$, el operador

$$E_{ij} := T_{\xi_1}^i (T_{\xi_{-1}} T_{\xi_1} - T_{\xi_1} T_{\xi_{-1}}) T_{\xi_{-1}}^j \in [\mathcal{T}, \mathcal{T}]$$

está dado por $\xi_j \mapsto \xi_i$ y $\xi_{j'} \mapsto 0$ para todo $j' \neq j$. Consideremos la proyección ortogonal $P_N \in \mathcal{L}(H^2)$ a las primeras N coordenadas, esto es, la aplicación

$$x = \sum_{j \geq 0} x_j \xi_j \mapsto P_N(x) := \sum_{j=0}^N x_j \xi_j$$

Para cualquier $T \in \mathcal{L}(H^2)$, la matriz de $P_N T P_N$ respecto a la base $\{\xi_n \mid n \geq 0\}$ es la misma que la de T en el bloque $\llbracket 0, N \rrbracket \times \llbracket 0, N \rrbracket$, pero el resto de sus entradas son todas 0. Luego $P_N T P_N$ es una combinación lineal de los operadores E_{ij} y por lo tanto también pertenece a $[\mathcal{T}, \mathcal{T}]$. Como $[\mathcal{T}, \mathcal{T}]$ es cerrado (por definición), alcanza entonces con verificar que

$$(6.1.1) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} P_N T P_N = T$$

para todo operador $T \in \mathcal{L}(H^2)$ de rango 1.

¹Esto es, la clausura de la subálgebra generada por $\{T_\varphi \mid \varphi \in C(\mathbb{T})\}$

²Esto es, la clausura del ideal generado a nivel algebraico

Sea entonces $T \in \mathcal{L}(H^2)$ un operador de rango 1, con imagen $\text{im}(T) = \langle w \rangle$, $w \neq 0$. Esto implica que T está dado por $\xi_j \mapsto \lambda_j w$, para ciertos escalares $\lambda_j \in \mathbb{C}$. Sea $w = \sum_{i \geq 0} w_i \xi_i$ el desarrollo de Fourier de x . La (i, j) -ésima entrada de la matriz $\text{Mat}(T)$ es entonces $\text{Mat}(T)_{i,j} = \lambda_j w_i$. En particular, la i_0 -ésima fila de $\text{Mat}(T)$ es $(\lambda_j w_{i_0})_{j \geq 0}$, por lo cual $T^*(\xi_{i_0}) = \sum_{j \geq 0} \lambda_j w_{i_0} \xi_j$ y en particular $\sum_{j \geq 0} |\lambda_j w_{i_0}|^2 = \|T^*(\xi_{i_0})\|^2 < \infty$, esto es, $w_{i_0} \cdot (\lambda_j)_{j \geq 0} \in \ell^2$. Como $x \neq 0$, podemos elegir alguna coordenada $i_0 \in \mathbb{N}$ en la cual $w_{i_0} \neq 0$, y así concluir que $(\lambda_j)_{j \geq 0} \in \ell^2$. Finalmente, haciendo uso de la desigualdad de Cauchy-Schwarz (en su versión más elemental), vemos que

$$\begin{aligned}
\|(T - P_N T P_N)(x)\| &= \left\| T \left(\sum_{j \geq 0} x_j \xi_j \right) - P_N T \left(\sum_{j=0}^N x_j \xi_j \right) \right\| \\
&= \left\| \sum_{j \geq 0} x_j T(\xi_j) - P_N \sum_{j=0}^N x_j T(\xi_j) \right\| \\
&= \left\| (\text{Id}_{H^2} - P_N) \left(\sum_{j=0}^N x_j T(\xi_j) \right) - \sum_{j > N} x_j T(\xi_j) \right\| \\
&\leq \left\| (\text{Id}_{H^2} - P_N) \left(\sum_{j=0}^N x_j T(\xi_j) \right) \right\| + \left\| \sum_{j > N} x_j T(\xi_j) \right\| \\
&= \left\| (\text{Id}_{H^2} - P_N) \left(\sum_{j=0}^N x_j \lambda_j w \right) \right\| + \left\| \sum_{j > N} x_j \lambda_j w \right\| \\
&= \left| \sum_{j=0}^N x_j \lambda_j \right| \|(\text{Id}_{H^2} - P_N)(w)\| + \left| \sum_{j > N} x_j \lambda_j \right| \|w\| \\
&\leq \sqrt{\sum_{j=0}^N |x_j|^2} \sqrt{\sum_{j=0}^N |\lambda_j|^2} \|(\text{Id}_{H^2} - P_N)(w)\| + \sqrt{\sum_{j > N} |x_j|^2} \sqrt{\sum_{j > N} |\lambda_j|^2} \|w\| \quad (\text{C-S}) \\
&\leq \|x\| \|(\lambda_j)_{j \geq 0}\|_2 \sqrt{\sum_{i > N} |w_i|^2} + \|x\| \sqrt{\sum_{j > N} |\lambda_j|^2} \|w\| \\
&\leq \left(\|(\lambda_j)_{j \geq 0}\|_2 \underbrace{\sqrt{\sum_{i > N} |w_i|^2}}_{\rightarrow 0 \text{ cuando } N \rightarrow \infty} + \underbrace{\sqrt{\sum_{j > N} |\lambda_j|^2} \|w\|}_{\rightarrow 0 \text{ cuando } N \rightarrow \infty} \right) \|x\|
\end{aligned}$$

lo cual establece (6.1.1), concluyendo así la demostración. \square

Por el Corolario 50 y la Observación 104, $\mathcal{K}(H^2)$ es un ideal cerrado y $*$ -cerrado de la C^* -álgebra \mathcal{T} . Luego, por el Ejemplo 91, podemos ver al cociente $\frac{\mathcal{T}}{\mathcal{K}(H^2)} = \frac{\mathcal{T}}{[\mathcal{T}, \mathcal{T}]}$ como una $*$ -álgebra de Banach, de tal forma que la aplicación $\pi : \mathcal{T} \rightarrow \frac{\mathcal{T}}{\mathcal{K}(H^2)}$ resulta un morfismo de $*$ -álgebras de Banach. A continuación veremos que el cociente es nuevamente una C^* -álgebra³:

PROPOSICIÓN 106. *La asignación*

$$\begin{aligned}
\Lambda : C(\mathbb{T}) &\rightarrow \frac{\mathcal{T}}{\mathcal{K}(H^2)} \\
\varphi &\mapsto \pi(T_\varphi) = [T_\varphi]
\end{aligned}$$

define un isomorfismo isométrico de $*$ -álgebras. En particular, el cociente $\frac{\mathcal{T}}{\mathcal{K}(H^2)}$ es una C^* -álgebra.

³En realidad, esto vale en general para cocientes arbitrarios de C^* -álgebras [2]

DEMOSTRACIÓN. Ya vimos que la asignación $C(\mathbb{T}) \rightarrow \mathcal{T}$, $\varphi \mapsto T_\varphi$ era multiplicativa salvo operadores compactos, lo cual implica que al postcomponerla con π obtenemos una asignación multiplicativa. Por otro lado, tenemos

$$\Lambda(\varphi + \lambda\psi) = [T_{\varphi+\lambda\psi}] = [T_\varphi + \lambda T_\psi] = [T_\varphi] + \lambda[T_\psi] = \Lambda(\varphi) + \lambda\Lambda(\psi)$$

y

$$\Lambda(\bar{\varphi}) = [T_{\bar{\varphi}}] = [T_\varphi^*] = [T_\varphi]^* = \Lambda(\varphi)^*$$

para todo par de funciones $\varphi, \psi \in C(\mathbb{T})$ y todo escalar $\lambda \in \mathbb{C}$.

Veamos ahora que Λ es un isomorfismo isométrico. En primer lugar, si $T \in \mathcal{L}(H^2)$ es de rango finito $n \in \mathbb{N}$, por la Proposición 21 lo podemos escribir como

$$T(x) = \sum_{i=1}^n \phi^i(x) y^i$$

para ciertos funcionales lineales acotados $\phi^1, \dots, \phi^n \in (H^2)^*$ y ciertos vectores $y^1, \dots, y^n \in H^2$. Para cada $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ y cada $i \geq 0$, sea $y_i^k := \langle y^k, \xi_i \rangle$ el i -ésimo coeficiente de Fourier de y^k . Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} \|T_{\xi_{-N}} T(x)\| &= \left\| \sum_{k=1}^n \phi^k(x) T_{\xi_{-N}}(y^k) \right\| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \left\| \phi^k(x) T_{\xi_{-N}}(y^k) \right\| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \|\phi^k\| \|x\| \|T_{\xi_{-N}}(y^k)\| \\ &= \left(\sum_{k=1}^n \|\phi^k\| \sqrt{\sum_{i \geq N} |y_i^k|^2} \right) \|x\| \end{aligned}$$

y en consecuencia

$$\|T_{\xi_{-N}} T\| \leq \sum_{k=1}^n \|\phi^k\| \sqrt{\sum_{j \geq N} |y_j^k|^2} \rightarrow 0 \text{ cuando } N \rightarrow \infty$$

Sea ahora $K \in \mathcal{K}(H^2)$ y fijemos un $\varepsilon > 0$. Por la Proposición 49 existe un T de rango finito tal que $\|K - T\| < \varepsilon$. Luego,

$$\|T_{\xi_{-N}} K\| \leq \|T_{\xi_{-N}} T\| + \|T_{\xi_{-N}}(K - T)\| \leq \|T_{\xi_{-N}} T\| + \|T_{\xi_{-N}}\| \|K - T\| < \|T_{\xi_{-N}} T\| + \varepsilon$$

con lo cual

$$0 \leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \|T_{\xi_{-N}} K T_{\xi_N}\| \leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \|T_{\xi_{-N}} K\| \|T_{\xi_N}\| \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \|T_{\xi_{-N}} T\| + \varepsilon = \varepsilon$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, concluimos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|T_{\xi_{-N}} K T_{\xi_N}\| = 0$$

Por último, sea $\varphi \in C(\mathbb{T})$. Para todo $N \in \mathbb{N}$, tenemos $\xi_N \in H^2$. Por los casos de multiplicatividad estricta de la Proposición 84,

$$T_{\xi_{-N}} T_\varphi T_{\xi_{-N}} = T_{\xi_N}^- T_\varphi T_{\xi_N} = T_{\xi_N}^- T_\varphi \xi_N = T_{\xi_N \varphi \xi_N}^- = T_\varphi$$

En consecuencia,

$$\|T_\varphi + K\| = \|T_{\xi_{-N}}\| \|T_\varphi + K\| \|T_{\xi_N}\| \geq \|T_{\xi_{-N}}(T_\varphi + K)T_{\xi_N}\| = \|T_\varphi + \underbrace{(T_{\xi_{-N}} K T_{\xi_N})}_{\rightarrow 0 \text{ cuando } N \rightarrow \infty}\|$$

y tomando límites

$$\|T_\varphi + K\| \geq \|T_\varphi\|$$

Esto vale para todo $K \in \mathcal{K}(H^2)$, y para $K = 0$ se alcanza la igualdad. Por ende tenemos

$$\|[T_\varphi]\| = \|T_\varphi\|$$

lo cual quiere decir que el morfismo $\Lambda : \varphi \mapsto [T_\varphi]$ es una isometría. En particular, Λ es inyectiva y su imagen es un espacio Banach. Por el Ejemplo 13, esto implica que $\text{im}(\Lambda)$ es cerrada en $\frac{\mathcal{T}}{\mathcal{K}(H^2)}$. Como Λ es un morfismo de álgebras y

$$1_{\frac{\mathcal{T}}{\mathcal{K}(H^2)}} = [1_{\mathcal{T}}] = [T_{\xi_0}] = \Lambda(\xi_0) \in \text{im}(\Lambda)$$

$\text{im}(\Lambda)$ es una subálgebra unital de $\frac{\mathcal{T}}{\mathcal{K}(H^2)}$. Pero $\text{im}(\Lambda)$ contiene a todos los elementos $\Lambda(\varphi) = [T_\varphi]$, los cuales generan (como álgebra cerrada) a $\frac{\mathcal{T}}{\mathcal{K}(H^2)}$ (puesto que los elementos T_φ generan a \mathcal{T} como álgebra cerrada, por definición). Juntando todo esto, concluimos que $\text{im}(\Lambda) = \frac{\mathcal{T}}{\mathcal{K}(H^2)}$. \square

OBSERVACIÓN. Podemos resumir gran parte de la discusión anterior en que tenemos siguiente «sucesión exacta corta»:

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(H^2) \xrightarrow{\subset} \mathcal{T} \xrightarrow{\Lambda^{-1} \circ \pi} C(\mathbb{T}) \longrightarrow 0$$

Como se trata de una sucesión exacta corta de espacios vectoriales, podemos deducir fácilmente que todo elemento de \mathcal{T} se escribe de forma única como $T_\varphi + K$, con $\varphi \in C(\mathbb{T})$ y $K \in \mathcal{K}(H^2)$. Si admitimos C^* -álgebras no unitales, entonces $\mathcal{K}(H^2)$ es una C^* -álgebra (no unital) por la Proposición 39, y podemos ver a esta sucesión exacta corta como una sucesión exacta corta de C^* -álgebras (ya que los morfismos son morfismos de C^* -álgebras). Más aún, esta sucesión «se parte» vía el morfismo isométrico de C^* -álgebras $C(\mathbb{T}) \rightarrow \mathcal{T}$ dado por $\varphi \mapsto T_\varphi$ (esto es, dicho morfismo es una inversa a derecha de $\Lambda^{-1} \circ \pi$). Luego podemos decir que \mathcal{T} es una «extensión [de C^* -álgebras] de $C(\mathbb{T})$ por $\mathcal{K}(H^2)$ ». Esta extensión (i.e. esta forma de ver a \mathcal{T} como una suerte de «producto semidirecto» entre $\mathcal{K}(H^2) \cong \mathcal{K}(\ell^2)$ y $C(\mathbb{T})$) es conocida como la **extensión de Toeplitz**.

En vista del ejemplo 102, obtenemos la siguiente consecuencia:

COROLARIO 107. Para toda función $\varphi \in C(\mathbb{T})$, se tiene

$$\sigma_{\mathcal{T}/\mathcal{K}(H^2)}([T_\varphi]) = \sigma_{\mathcal{T}/\mathcal{K}(H^2)}(\Lambda(\varphi)) = \sigma_{C(\mathbb{T})}(\varphi) = \text{im}(\varphi)$$

6.2. Operadores de Toeplitz inversibles

PROPOSICIÓN 108. Sea $\varphi \in C(\mathbb{T})$. Entonces T_φ es un operador de Fredholm si y sólo si $\varphi \in C(\mathbb{T})^\times$ (esto es, si y sólo si $0 \notin \varphi(\mathbb{T})$).

DEMOSTRACIÓN. Si $\varphi \in C(\mathbb{T})^\times$, entonces $T_{\varphi^{-1}}$ es inversa salvo compactos de T_φ , por lo cual T_φ es de Fredholm.

Por otro lado, como notamos en la Observación 92, si T_φ es de Fredholm entonces $[T_\varphi] = \Lambda(\varphi)$ es inversible en el «álgebra de Calkin»

$$\text{Cal}(H^2) := \mathcal{L}(H^2)/\mathcal{K}(H^2)$$

(A nivel estricto, $[T_\varphi] = \Lambda(\varphi)$ es un elemento de $\mathcal{T}/\mathcal{K}(H^2)$, pero podemos verlo como un elemento de $\mathcal{L}(H^2)/\mathcal{K}(H^2)$ de la forma obvia). Si $[T_\varphi]$ es inversible en $\text{Cal}(H^2)$, también lo es $[T_\varphi]^*$ y por consiguiente también lo es $[T_{|\varphi|^2}]$, ya que

$$[T_{|\varphi|^2}] = [T_{\bar{\varphi}\varphi}] = [T_{\bar{\varphi}}][T_\varphi] = [T_\varphi]^*[T_\varphi]$$

En particular,

$$0 \notin \sigma_{\text{Cal}(H^2)}([T_{|\varphi|^2}])$$

Por otro lado, como $\text{im}(|\varphi|^2) \subset \mathbb{R}$, tenemos

$$\text{im}(|\varphi|^2) = \partial \text{im}(|\varphi|^2) = \partial \sigma_{\mathcal{T}(H^2)/\mathcal{K}(H^2)}([T_{|\varphi|^2}]) \underset{\text{Permanencia Espectral}}{\subset} \sigma_{\text{Cal}(H^2)}([T_{|\varphi|^2}])$$

donde en la segunda igualdad hemos utilizado el Corolario 107. Luego $0 \notin \text{im}(|\varphi|^2)$ y por lo tanto φ nunca se anula. \square

Si bien todos los operadores inversibles $T \in \mathcal{GL}(H^2)$ son operadores de Fredholm de índice 0, no vale la vuelta: un operador de Fredholm de índice 0 no tiene por qué ser inversible. (Por ejemplo, todas las proyecciones ortogonales

$$\text{Id}_{H^2} - P_N : \sum_{i \geq 0} x_i \xi_i \mapsto \sum_{i > N} x_i \xi_i$$

son operadores de Fredholm de índice 0). Sin embargo, la siguiente Proposición muestra que la vuelta sí es válida *entre los operadores de la forma T_φ* :

PROPOSICIÓN 109. *Sea $\varphi \in C(\mathbb{T})$. Entonces T_φ es un operador de Fredholm de índice 0 si y sólo si T_φ es inversible.*

DEMOSTRACIÓN. Si T_φ es inversible, entonces es automáticamente un operador de Fredholm de índice 0.

Si T_φ es de Fredholm de índice 0, entonces φ nunca se anula (Corolario 108) y por lo tanto el Teorema del Índice nos da

$$0 = \text{ind}(T_\varphi) = n(\varphi \circ q, 0)$$

lo cual por definición significa que al escribir a $\varphi \circ q$ en forma polar

$$\varphi \circ q(s) = |\varphi \circ q(s)| e^{i\theta(s)}$$

(con $\theta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua), se tiene $\frac{\theta(1) - \theta(0)}{2\pi} = 0$, esto es,

$$\theta(1) = \theta(0)$$

Luego θ se factoriza a través de $q : [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}$, dándonos una función continua $\tilde{\theta} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\theta = \tilde{\theta} \circ q$. En consecuencia es

$$\varphi \circ q(s) = |\varphi \circ q(s)| e^{i\tilde{\theta}(q(s))}$$

para todo $s \in [0, 1]$, y como q es suryectiva, esto implica que

$$\varphi(z) = \underbrace{|\varphi(z)|}_{>0} e^{i\tilde{\theta}(z)} = e^{\log |\varphi(z)| + i\tilde{\theta}(z)}$$

para todo $z \in \mathbb{T}$. Si definimos

$$\psi \in C(\mathbb{T}) \subset L^\infty(\mathbb{T})$$

como

$$\psi(z) := \log |\varphi(z)| + i\tilde{\theta}(z)$$

obtenemos entonces

$$\varphi(z) = e^{\psi(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \psi^k(z)$$

Además, esta convergencia es uniforme (por el clásico «criterio M» de Weierstrass). Esto significa que

$$\exp_{L^\infty(\mathbb{T})}(\psi) \stackrel{\text{i.e.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \psi^k = \varphi$$

como elementos de $L^\infty(\mathbb{T})$.

La idea ahora es aproximar a $\psi \in L^\infty(\mathbb{T})$ por algún «polinomio trigonométrico», esto es, alguna combinación lineal de la forma

$$\psi_0 = \sum_{i=-N}^N a_i \xi_i = \underbrace{\sum_{i=0}^N a_i \xi_i}_{\psi_0^+} + \underbrace{\sum_{i=-N}^{-1} a_i \xi_i}_{\psi_0^-}$$

Notemos que, sin importar cuáles coeficientes elijamos, tendremos

$$\psi_0^+, \overline{\psi_0^-} \in H^2 \cap C(\mathbb{T}) \subset H^2 \cap L^\infty(\mathbb{T}) = H^\infty$$

Como H^∞ es una subálgebra de Banach de $L^\infty(\mathbb{T})$ (Ejemplo 90), tenemos

$$(6.2.1) \quad \overline{\exp(\psi_0^-)} = \exp(\overline{\psi_0^-}) \in H^\infty$$

por la Proposición 97.

Por los casos de multiplicatividad estricta de la Proposición 84 y las primeras dos afirmaciones de la Proposición 97, tenemos

$$\left. \begin{aligned} T_{\exp(-\psi_0^+)} T_{\exp(\psi_0^+)} &= T_{\exp(-\psi_0^+) \exp(\psi_0^+)} \\ T_{\exp(\psi_0^+)} T_{\exp(-\psi_0^+)} &= T_{\exp(\psi_0^+) \exp(-\psi_0^+)} \end{aligned} \right\} = T_{\exp(0)} = T_{\xi_0} = \text{Id}_{H^2}$$

y

$$\left. \begin{aligned} T_{\exp(-\psi_0^-)} T_{\exp(\psi_0^-)} &= T_{\exp(-\psi_0^-) \exp(\psi_0^-)} \\ T_{\exp(\psi_0^-)} T_{\exp(-\psi_0^-)} &= T_{\exp(\psi_0^-) \exp(-\psi_0^-)} \end{aligned} \right\} = T_{\exp(0)} = T_{\xi_0} = \text{Id}_{H^2}$$

con lo cual

$$(6.2.2) \quad T_{\exp(\psi_0^+)}, T_{\exp(\psi_0^-)} \in \mathcal{GL}(H^2)$$

Ahora bien: la función

$$\begin{aligned} \Upsilon : L^\infty(\mathbb{T}) &\rightarrow \mathcal{L}(H^2) \\ \psi' &\mapsto T_{\exp(\psi - \psi')} \end{aligned}$$

es continua y su valor en ψ pertenece al abierto $\mathcal{GL}(H^2)$:

$$\Upsilon(\psi) = T_{\exp(0)} = T_{\xi_0} = \text{Id}_{H^2} \in \mathcal{GL}(H^2)$$

Como los polinomios trigonométricos son densos en $L^\infty(\mathbb{T})$, debe existir un polinomio trigonométrico ψ_0 tal que

$$(6.2.3) \quad \Upsilon(\psi_0) \stackrel{\text{i.e.}}{=} T_{\exp(\psi - \psi_0)} \in \mathcal{GL}(H^2)$$

Luego, por (6.2.2) y (6.2.3) concluimos que

$$\begin{aligned} T_\varphi &= T_{\exp(\psi)} \\ &= T_{\exp(\psi_0^- + \psi - \psi_0 + \psi_0^+)} \\ &= T_{\exp(\psi_0^-)} \exp(\psi - \psi_0) \exp(\psi_0^+) \\ &= T_{\exp(\psi_0^-)} T_{\exp(\psi - \psi_0)} T_{\exp(\psi_0^+)} \in \mathcal{GL}(H^2) \end{aligned}$$

donde para la tercera igualdad hemos usado la segunda afirmación de la Proposición 97 (recordemos que el álgebra $L^\infty(X)$ es conmutativa) y para la última igualdad hemos usado (6.2.1) junto con los casos de multiplicatividad estricta de la Proposición 80. \square

6.3. Caracterización del espectro

Finalmente llegamos a la culminación de nuestro trabajo:

TEOREMA 110. *Sea $\varphi \in C(\mathbb{T})$. Entonces*

$$\sigma(T_\varphi) = \varphi(\mathbb{T}) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \varphi(\mathbb{T}) \mid n(\varphi \circ q, \lambda) \neq 0\}$$

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, si $\lambda \in \varphi(\mathbb{T})$, entonces la función $\varphi - \lambda$ se anula, y luego el operador $T_\varphi - \lambda \text{Id}_{H^2} = T_{\varphi - \lambda}$ no es inversible puesto que ni siquiera es de Fredholm (Proposición 108). Sea entonces $\lambda \notin \varphi(\mathbb{T})$. Como la función $\varphi - \lambda$ nunca se anula, el operador $T_\varphi - \lambda \text{Id}_{H^2} = T_{\varphi - \lambda}$ es de Fredholm. Luego es un operador no inversible si y sólo si su índice de Fredholm es distinto de 0 (Proposición 109). Pero por el Teorema del Índice es

$$\text{ind}(T_{\varphi - \lambda}) = n((\varphi - \lambda)q, 0) = n(\varphi \circ q - \lambda, 0) = n(\varphi \circ q, \lambda)$$

\square

OBSERVACIÓN 111. Como \mathbb{T} es compacto, $\varphi(\mathbb{T})$ es siempre un subconjunto cerrado de \mathbb{C} . Luego la imagen de φ divide al plano en regiones abiertas: las distintas componentes (arco)conexas de $\mathbb{C} \setminus \varphi(\mathbb{T})$. El número $n(\varphi \circ q, \lambda)$ no varía al mover λ dentro de una misma componente arcoconexa⁴. Luego el espectro de T_φ es la imagen de φ más algunas regiones, a saber, aquellas alrededor de las cuales φ gira una cantidad no nula de veces.

No se conoce una caracterización análoga para operadores de Toeplitz T_φ en el caso general $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, aunque H. Widom ha demostrado que sus espectros son siempre conexos [16].

⁴Este es un hecho geométrico elemental, ¡pero también podemos demostrarlo usando el Teorema 110! En efecto, si Ω es una componente arcoconexa de $\mathbb{C} \setminus \varphi(\mathbb{T})$, entonces $\varphi - \lambda$ no se anula para ningún $\lambda \in \Omega$, y por consiguiente la aplicación continua $\Omega \rightarrow \mathcal{L}(H^2)$ dada por $\lambda \mapsto T_{\varphi-\lambda}$ toma valores en $\mathcal{F}(H^2)$. Postcomponiendo esta aplicación (correstringida a $\mathcal{F}(H^2)$) con el índice $\text{índ} : \mathcal{F}(H^2) \rightarrow \mathbb{Z}$, obtenemos (por la continuidad del índice) una aplicación continua $\Omega \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por

$$\lambda \mapsto \text{índ}(T_{\varphi-\lambda}) = n(\varphi \circ q, \lambda)$$

Pero como Ω es conexa, esta aplicación debe ser constante.

Epílogo

Aquí incluimos algunas referencias, con la esperanza de que le sean útiles al lector interesado en aprender más sobre estos temas. Varias de las demostraciones fueron tomadas de los libros [2, 11, 13]. Mientras que los primeros dos son clásicos muy recomendables sobre teoría espectral y C^* -álgebras, el último es un libro mucho más elemental, pero excelentemente escrito, e incluye una generalización de nuestro Teorema del Índice para operadores de Toeplitz cuyos símbolos son funciones a valores matriciales. Sin embargo, la generalización máxima del Teorema del Índice es el Teorema de Atiyah-Singer, para el cual dirigimos al lector a las referencias [5, 10]. Este teorema tiene entre sus corolarios a la versión generalizada del Teorema de Gauss-Bonnet (debida a Chern), al Teorema de la Signatura de Hirzebruch, a la versión generalizada del Teorema de Riemann-Roch (debida a Hirzebruch y a Grothendieck) y por supuesto a nuestro humilde Teorema del Índice. La demostración original del Teorema de Atiyah-Singer usa herramientas de la así llamada K -teoría topológica. Varias de estas herramientas fueron luego generalizadas al mundo de las C^* -álgebras. Para la K -teoría de C^* -álgebras, véase [5, 15].

Bibliografia

- [1] Aluffi, P. (2021) *Algebra: Chapter 0*. Providence, RI: American Mathematical Society (Graduate Studies in Mathematics).
- [2] Arveson, W. (2002) *A Short Course on Spectral Theory*. New York: Springer. (Graduate Texts in Mathematics)
- [3] Ciesielski, K. (2007) 'On Stefan Banach and some of his results', *Banach Journal of Mathematical Analysis*, 1(1), pp. 1–10. doi:10.15352/bjma/1240321550.
- [4] Dugundji, J. (1989) *Topology*. Boston: Allyn and Bacon.
- [5] Higson, N. and Roe, J. (2004) *Analytic K-homology*. Oxford: Oxford University Press
- [6] Junghenn, H.D. (2018) *Principles of real analysis: Measure, integration, functional analysis, and applications*. Boca Raton: CRC Press.
- [7] Illusie, L. (1964) 'Contractibilité du groupe linéaire des espaces de Hilbert de dimension infinie', *Séminaire Bourbaki* 9, pp. 105-113
- [8] Krantz's Krantz, S.G. (2006) *Mathematical apocrypha redux: More stories and anecdotes of mathematicians and the mathematical*. Washington DC USA: Mathematical Association of America.
- [9] Lee, J.M. (2013) *Introduction to topological manifolds*. New York: Springer. (Graduate Texts in Mathematics)
- [10] Mukherjee, A. (2013) *Atiyah-Singer index theorem: An introduction*. New Delhi: Hindustan Book Agency. (Texts and Readings in Mathematics)
- [11] Murphy, G.J. (2004) *C*-algebras and operator theory*. Boston: Academic Press.
- [12] Neerven, J. van (2022) *Functional analysis*. Cambridge: Cambridge University Press. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics)
- [13] Roe, J. (2015) *Winding around: The winding number in topology, geometry, and analysis*. Providence, RI: American Mathematical Society.
- [14] Shapiro, J.H. (2007) *Composition operators and classical function theory*. New York: Springer.
- [15] Wegge-Olsen, N.E. (2004) *K-theory and C*-algebras: A friendly approach*. Oxford: Oxford University Press
- [16] Widom, H. (1964) 'On the spectrum of a Toeplitz operator', *Pacific Journal of Mathematics*, 14(1), pp. 365–375. doi:10.2140/pjm.1964.14.365.