NOTICIERO

ISSN 1514-9595 (web)

Miradas Matemáticas

Combinando vaguedad con incertidumbre

Manuela Busaniche

Universidad Nacional del Litoral - CONICET

Resumen

En este artículo presentamos de manera informal y simplificada las ideas para determinar una semántica algebraica de un sistema lógico modal y difuso definido a partir de una semántica relacional.

Introducción

La lógica es la disciplina que estudia la forma de los razonamientos válidos. Los sistemas lógicos que trataremos en este artículo son sistemas proposicionales: se expresan en un lenguaje formal (simbólico) y permiten la representación de enunciados (o proposiciones) mediante fórmulas. Dos aspectos son fundamentales en el estudio lógico: el aspecto sintáctico, que consiste en lograr modelar la forma de los razonamientos mediante reglas que manipulen simbólicamente los enunciados y establezcan cómo a partir de ciertas premisas (axiomas o hipótesis) otros enunciados resultan válidos; y el aspecto semántico, que es dar una interpretación de lo que se considera una proposición verdadera en el sistema. Uno de los desafíos más importantes en lógica es lograr modelar un sistema con una sintaxis y una semántica compatibles: es decir, los enunciados válidos en el sistema sintáctico coincidan con los que se interpretan como verdaderos semánticamente. Pero hay otras técnicas interesantes para abordar el estudio de una lógica, como la que llevaremos a cabo en este artículo, que consiste en comparar dos semánticas distintas para un mismo sistema.

Desde sus primeros tratamientos, ya en la antigua Grecia hasta los grandes avances impulsados por los progresos informáticos actuales, sistemas de lógicas que modelan diversos tipos de razonamientos se han desarrollado, dando lugar a múltiples técnicas y herramientas que permiten abordar su estudio. Los más conocidos e investigados son los que modelan la lógica clásica, que es la lógica con la que razonamos en matemática. Pero otros sistemas han cobrado gran interés por su capacidad de formalizar razonamientos más generales.

Tal es el caso de las lógicas modales, que son desarrolladas para razonar bajo distintos tipos de incertidumbre. Las mismas se obtienen extendiendo un sistema proposicional (usualmente el clásico) con operadores que permiten interpretar nociones como creencia, posibilidad, conocimiento, obligaciones, tiempo ([1], [10]). Otro tipo de formalismo interesante es el que proponen los sistemas de lógicas difusas y multivaluadas[1] que permiten manipular información vaga o imprecisa asignando a los enunciados valores de verdad intermedios, es decir, interpretan que un enunciado puede tener un determinado grado de verdad que mida cuán verdadero o cuán falso es ([4], [8]).

Tanto las lógicas modales como las multivaluadas y difusas han evolucionado de manera independiente en paralelo, y es en los últimos años donde surge con gran ímpetu la necesidad de contar con sistemas que manejen a la vez incertidumbre y vaguedad.

Es por esto que, muchos grupos de investigación estudian sistemas de lógicas que comparten las dos características: son modales y difusas. Desde el punto de vista formal, el gran desafío que plantean estos sistemas es su interpretación, puesto que las semánticas que mejor se adecúan a los sistemas modales son semánticas relacionales, basadas en marcos de Kripke, mientras que para el manejo de sistemas de lógicas difusas las semánticas algebraicas han demostrado ser el instrumento correcto para su interpretación.

En este artículo trataremos de mostrar de manera muy simplificada e informal el problema de combinar ambas semánticas para comprender ciertos sistemas que sean a la vez modales y difusos. Presentaremos el desafío para investigar este tipo de lógicas y mostraremos un ejemplo concreto.

1. ¿Qué tipo de enunciados pretendemos modelar?

Los sistemas proposicionales multivaluados y difusos posibilitan el modelado de enunciados que no son necesariamente verdaderos o falsos, asignando grados de verdad intermedios que permiten la comparación de la verdad de los mismos. Generalmente se toma el grado de verdad como un valor mayor o igual que cero (falso) y menor o igual que uno (verdadero). Estos cálculos interpretan de manera eficiente predicados difusos del tipo *ser alto* o *estar caliente.* Es intuitivamente claro que el enunciado *la temperatura es alta en Santa Fe* debería tener un grado de verdad mayor al enunciado *la temperatura es alta en Bariloche,* y este último un grado de verdad mayor a *la temperatura es alta en Ushuaia*.

Por otro lado, los sistemas de lógicas modales son útiles para modelar formas de razonamientos a partir de datos inciertos, ya sea por el conocimiento que se tenga o porque involucren una creencia o posibilidad.

Así, un sistema que sea a la vez modal y difuso permitiría el manejo de enunciados del tipo *se conoce que la temperatura es alta* o *es posible que el agua esté caliente* con mayor precisión que un sistema clásico.

2. ¿Cómo está compuesto un lenguaje modal y difuso?

Los cálculos proposicionales difusos que presentaremos están basados en un lenguaje proposicional formado por un conjunto numerable $Var = \{x_1, x_2, \ldots\}$ de variables

[1] Si bien hay diversos sistemas de lógicas difusas y multivaluadas, las lógicas multivaluadas que aquí trataremos son casos particulares de sistemas difusos.

proposicionales y los conectivos $\{*, \to, \wedge, \vee, 0, 1\}$ [2]. En estos cálculos los conectivos se interpretan usualmente como: $*$ conjunción fuerte, $\to$ implicación, $\wedge$ conjunción débil[3], $\vee$ disyunción. También es usual interpretar a las constantes 0 y 1 respectivamente como la falsedad y la verdad. Para el tratamiento modal, se le suman al sistema los operadores modales. En los ejemplos que aquí veremos hemos elegido solo sumar un operador modal $\Box$ de necesidad. Es decir, la fórmula $\Box\varphi$ se lee *es necesario* φ. Dependiendo del sistema que se precise investigar se pueden agregar la cantidad de operadores modales que se requieran.

El conjunto $Form_{\Box}$ de fórmulas proposicionales se obtiene aplicando de manera recursiva un número finito de veces las siguientes reglas:

- $Var \subseteq Form_{\Box}$ y $0, 1 \in Form_{\Box}$;
- si $\varphi, \psi \in Form_{\Box}$, entonces $\varphi \star \psi \in Form_{\Box}$, donde $\star \in \{*, \to, \wedge, \vee\}$;
- si $\varphi \in Form_{\Box}$, entonces $\Box\varphi \in Form_{\Box}$.

3. ¿Qué álgebras son la base de las semánticas algebraicas de sistemas multivaluados y difusos?

La teoría de lógicas algebrizables es una teoría profunda y técnicamente compleja que, bajo ciertas hipótesis, provee un mecanismo para establecer una sintaxis (axiomática tipo Hilbert) de un cálculo si se conoce a priori su semántica algebraica (ver [6] y [12]).

Las lógicas multivaluadas y difusas que aquí tratamos cuentan con semánticas algebraicas muy estudiadas, basadas en retículos residuados. Para una comprensión general y más informal del tema, haremos un abuso de notación, identificando los conectivos lógicos y los operadores algebraicos que los interpretarán con los mismos símbolos. Un retículo residuado acotado y conmutativo (o simplemente retículo residuado [7]) es una estructura algebraica $\mathbf{A} = \langle A, *, \to, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ que consta de un universo (conjunto no vacío) A, operadores binarios $*, \to, \wedge, \vee$ y constantes $0, 1 \in A$ que satisfacen:

- $\langle A; *, 1\rangle$ es un monoide conmutativo: $*$ es una operación binaria conmutativa en A para la cual 1 es el elemento neutro;
- $\langle A; \vee, \wedge, 1, 0\rangle$ es un retículo, con elemento mayor 1 y menor 0;
- si $x, y, z \in A$ entonces $x * y \leq z$ si y solo si $x \leq y \to z$ donde $\leq$ es el orden dado por la estructura de retículo.

Las álgebras de Boole, las álgebras de Heyting, las MV-álgebras y las BL-álgebras son ejemplos conocidos de retículos residuados. Estas clases de álgebras son, respectivamente, las semánticas algebraicas de la lógica clásica, la intuicionista, la lógica multivaluada de Łukasiewicz y la lógica básica (Basic Logic). Un retículo residuado se dice completo si para cada subconjunto $S \subseteq A$ el ínfimo y el supremo de S existen.

[2] El lector interesado puede ver la justificación en la elección de los conectivos en [8].
[3] En el cálculo clásico ambas conjunciones coinciden, por esto se trabaja con un solo conectivo conjunción.

4. ¿Cómo extender estas estructuras para trabajar con operadores modales?

Al trabajar con operadores modales agregamos a nuestro lenguaje algebraico un operador unario $\Box$, así como lo hemos agregado como conectivo para formar las fórmulas. Un retículo residuado modal (el nombre lo hemos puesto solo para este trabajo), será una estructura $\langle \mathbf{A}, \Box \rangle = \langle A, *, \to, \wedge, \vee, \Box, 0, 1 \rangle$ donde $\mathbf{A} = \langle A, *, \to, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ es un retículo residuado y $\Box : A \to A$ es un operador unario.

Para caracterizar algebraicamente el sistema modal y difuso, nuestro desafío consiste en determinar las relaciones entre el nuevo operador modal y los operadores existentes, que dependerán de las propiedades particulares que pretendemos que nuestro operador satisfaga. Por ejemplo, en la mayoría de los sistemas que estudiamos suelen ser verdaderas las identidades $\Box 1 = 1$ y $\Box(x \wedge y) = \Box x \wedge \Box y$.

Una ecuación en el lenguaje de retículos residuados modales es una expresión en el lenguaje proposicional $\mathcal{L} = \langle Var, *, \to, \wedge, \vee, \Box, 0, 1 \rangle$ del tipo

$$\varphi = \psi$$

donde φ y ψ son términos en el lenguaje. Pretendemos que este compendio sea un resumen informal, por esto optamos por no entrar en detalles precisos, y dado el abuso de lenguaje que hemos hecho, podemos pensar que φ y ψ son fórmulas en $Form_\Box$. Una cuasiecuación es una expresión del tipo

$$\text{si } \varphi_1 = \psi_1 \text{ y } \varphi_2 = \psi_2 \text{ y } \ldots \text{ y } \varphi_n = \psi_n \text{ entonces } \varphi = \psi$$

formada por ecuaciones. Una cuasivariedad de álgebras $\mathcal{Q}$ es una clase de álgebras del mismo tipo que es cerrada bajo un conjunto de cuasiecuaciones, esto es, todas las álgebras en $\mathcal{Q}$ satisfacen un conjunto de cuasiecuaciones y toda álgebra que satisfaga este conjunto de cuasiecuaciones está en $\mathcal{Q}$. Hay múltiples cuasivariedades de retículos residuados modales, que dependen de las cuasiecuaciones que las caracterizan.

Sea $\mathbf{M} = \langle \mathbf{A}, \Box \rangle$ un retículo residuado modal. Una función $v : Form_\Box \to \mathbf{M}$ será llamada valuación si preserva todos los conectivos. Fijemos una cuasivariedad $\mathcal{Q}$ de retículos residuados modales y sea $\varphi \in Form_\Box$.

Decimos que φ es *verdadera en* $\mathcal{Q}$ si para cada $\mathbf{M} \in \mathcal{Q}$ y para cada valuación $v : Form_\Box \to \mathbf{M}$ se satisface que $v(\varphi) = 1$.

Nuestro propósito es encontrar quasivariedades de retículos residuados modales que sean la semántica algebraica de sistemas lógicos modales y difusos. Estos sistemas van a estar determinados por otra semántica que estudiaremos a continuación.

5. Semántica de Kripke

Los sistemas de lógicas modales históricamente se han interpretado a partir de semánticas relacionales (o de mundos posibles) conocidas como semánticas de Kripke ([11]). Para nuestro objetivo presentamos una versión de las mismas que generaliza a la versión clásica.

Sea $\mathbf{A} = \langle A, *, \to, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ un retículo residuado. Un *marco de Kripke* **A***-valuado* es una estructura $\langle W, R\rangle$ donde W es un conjunto no vacío, cuyos elementos se llaman *mundos posibles* y $R : W \times W \to \mathbf{A}$ es una relación binaria no clásica en W, conocida como la relación de accesibilidad ([8]). De acuerdo al problema que se intente modelar la relación R podrá tener distintas características. En el ejemplo que daremos trabajaremos con una relación en general, sin ninguna restricción. Los lectores familiarizados con la noción clásica de marco de Kripke podrán notar que esta noción es un caso particular de marco de Kripke **A**-valuado, en donde el retículo residuado **A** es el álgebra de Boole de dos elementos, por lo que R es simplemente una relación binaria.

Dado un marco de Kripke **A**-valuado $\langle W, R\rangle$, definimos un modelo de Kripke **A**-valuado $\mathcal{M} = \langle W, R, e\rangle$ añadiendo al marco una función $e : Var \times W \to \mathbf{A}$, que se extiende al conjunto de fórmulas interpretando los conectivos $*, \to, \wedge, \vee, 0, 1$ como los correspondientes operadores en **A** y el operador modal $\Box$ por:

$$e(\Box\varphi, w) = \inf_{w' \in W}\{R(w, w') \to e(\varphi, w')\}.$$

Si bien la interpretación del conectivo $\Box$ puede resultar arbitraria, y aquí no presentaremos una justificación de su elección, podemos notar que el valor de la fórmula $\Box\varphi$ en un mundo depende del valor de la fórmula φ en todo mundo w' y el grado de accesibilidad del mundo que se está considerando a w'.

Si el retículo residuado **A** es completo, el modelo está bien definido.[4] Diremos que una fórmula $\varphi \in Form_\Box$ es verdadera en el modelo $\mathcal{M} = \langle W, R, e\rangle$ si para todo $w \in W$ se tiene que $e(\varphi, w) = 1$.

La *lógica minimal modal* **A***-valuada* se define semánticamente como el conjunto de fórmulas verdaderas en todo modelo de Kripke **A**-valuado.

Algunas consideraciones:

- Para cada retículo residuado completo **A** se tiene una lógica minimal modal **A**-valuada, por lo que estamos en presencia de distintos sistemas que dependen del retículo elegido. Se puede generalizar esta definición para clases de álgebras en lugar de una sola álgebra fija.
- La definición de una lógica, desde un punto de vista semántico, puede variar (incluso tener distintos nombres). Hemos decidido presentar una definición sencilla, sin involucrar los conceptos de consecuencia, que suelen ser los que se tienen en cuenta para este tipo de definiciones y análisis lógicos. Un sistema similar basado en la noción de consecuencia puede verse en [2].
- Estamos determinando un sistema lógico a partir de su semántica. Al definirlo de esta manera desconocemos una sintaxis para el mismo. Si logramos encontrar una semántica algebraica equivalente tendremos mecanismos para determinar una sintaxis estilo Hilbert.
- Dada nuestra pretensión de exponer de manera sencilla y simplificada el tema, hemos optado por considerar sistemas en donde la relación R no tiene restricciones.

[4] Aquí también resaltamos la analogía con el caso clásico. Si **A** es el álgebra de Boole con dos elementos, R es simplemente una relación binaria, por lo que si $S = \{w' : R(w, w') = 1\}$ entonces $e(\Box\varphi, w) = \inf_S\{e(\varphi, w')\}$.

6. Comparando las dos semánticas.

Como se mencionó previamente, contar con una semántica algebraica para un sistema lógico facilita la caracterización axiomática del sistema formal, y permite estudiar propiedades del mismo.

Intentaremos mostrar una de las ideas para encontrar una semántica algebraica apropiada para la lógica minimal modal **A**-valuada. Esto implica encontrar una cuasivariedad de retículos residuados modales cuyas fórmulas verdaderas coincidan con las fórmulas verdaderas de la lógica modal.

Dado un retículo residuado **A**, para cada conjunto no vacío W podemos definir el álgebra de funciones $\mathbf{A}^W$ con dominio W y codominio **A** y las operaciones $*, \to, \wedge, \vee, 0, 1$ definidas punto a punto. Dado un marco de Kripke **A**-valuado $\langle W, R\rangle$ definimos un operador unario $\Box$ para cada $\overline{x} \in A^W$ como

$$\Box\overline{x}(i) = \bigwedge_{j \in W} \{R(i,j) \to \overline{x}(j)\}.$$

El álgebra $\langle \mathbf{A}^W, \Box\rangle$ se llamará álgebra complex sobre **A** determinada por el marco $\langle W, R\rangle$ (notar que $\langle \mathbf{A}^W, \Box\rangle$ es un retículo residuado modal).

Es muy fácil ver que si $\mathcal{M} = \langle W, R, e\rangle$ es un modelo de Kripke **A**-valuado, la función $v_e : Form_\Box \to \mathbf{A}^W$ dada por

$$v_e(\varphi)(w) := e(\varphi, w)$$

es una valuación sobre el retículo residuado modal $\mathbf{M} = \langle \mathbf{A}^W, \Box\rangle$. Recíprocamente, si $v : Form_\Box \to \mathbf{A}^W$ es una valuación en $\langle \mathbf{A}^W, \Box\rangle$, entonces la aplicación $e_v : Form_\Box \times W \to \mathbf{A}$ dada por

$$e_v(\varphi, w) := v(\varphi(w))$$

determina un modelo de Kripke **A**-valuado $\langle W, R, e\rangle$ sobre el marco $\langle W, R\rangle$.

Concretamente:

> Las valuaciones en las álgebras complex sobre un retículo residuado **A** están en correspondencia biyectiva con los modelos de Kripke **A**-valuados.

Objetivo: para obtener una semántica algebraica del sistema de lógica minimal modal **A**-valuado debemos determinar la cuasivariedad de retículos residuados modales generada por las álgebras complex sobre **A**. Obtener una caracterización correcta y completa de una cuasivariedad de álgebras conociendo solo a las álgebras generadoras es una tarea difícil, que requiere un análisis profundo de las álgebras complex, de sus propiedades y que no siempre tiene éxito. Ese es uno de nuestros desafíos actuales para distintos sistemas específicos modales y difusos.

7. Ejemplo: Lógica minimal modal sobre la cadena Ł$_3$

Ofrecemos un ejemplo sencillo de una semántica algebraica para una lógica modal y multivaluada. Dada la complejidad de los cálculos, no presentamos demostraciones, solo mostramos los resultados para este ejemplo que fue estudiado en [3].

Tomamos el álgebra cuyo universo es

$$Ł_3 = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\},$$

con el orden heredado de los reales (por lo que $\wedge$, $\vee$, 0, y 1 quedan determinados) y las operaciones

$$a \to b = \text{mín}\{1, 1-a+b\} \qquad a * b = \text{máx}\{0, (a+b)-1\}.$$

El álgebra $\mathbf{Ł}_3 = \langle Ł_3, *, \to, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ se conoce como la MV-cadena de tres elementos y es un retículo residuado finito. Posee otras operaciones adicionales que se definen a partir de las anteriores: $\neg a = a \to 0 = 1 - a$ y $a \oplus b = \neg(\neg a * \neg b) = \text{mín}\{1, a+b\}$ (ver detalles en [4]).

Esta cadena $\mathbf{Ł}_3$ genera una cuasivariedad MV_3 de álgebras[5] que constituyen la semántica algebraica del cálculo proposicional tres valuado de Łukasiewicz, uno de los cálculos multivaluados más sencillos y con mayor cantidad de aplicaciones.

A continuación daremos una caracterización de la cuasivariedad generada por las álgebras complex determinadas por marcos de Kripke $Ł_3$-valuados, esto es, de la mínima cuasivariedad que contenga todas las álgebras complex de la forma $\langle \mathbf{Ł}_3^W, \Box\rangle$ con $\langle W, R\rangle$ un marco de Kripke $Ł_3$-valuado.

Abreviamos $x * x = x^2$ y $x \oplus x = 2x$. Un álgebra $\langle \mathbf{A}, \Box\rangle$ es una ML$_3$-álgebra si $\mathbf{A} \in MV_3$ y $\Box$ es un operador unario que satisface:

(M$_1$) $\Box 1 = 1$,

(M$_2$) $\Box(x \wedge y) = \Box x \wedge \Box y$,

(M$_3$) Si $(2x \wedge y^2) \to 2z = 1$ entonces $(2(\Box x) \wedge (\Box y)^2) \to 2(\Box z) = 1$,

(M$_4$) Si $(2x \wedge y^2) \to z^2 = 1$ y $2y \to 2z = 1$ entonces $(2(\Box x) \wedge (\Box y)^2) \to (\Box z)^2 = 1$.

Denotamos por $\mathbb{ML}_3$ la cuasivariedad de ML$_3$-álgebras.

> La quasivariedad $\mathbb{ML}_3$ es la semántica algebraica de la lógica minimal modal sobre $Ł_3$, esto es, la lógica determinada por los modelos de Kripke $Ł_3$-valuados.

La forma de obtener las ecuaciones y cuasiecuaciones depende tanto del álgebra sobre la que se evalúa, como de las características de la relación R de los marcos. Eso escapa a la complejidad de esta presentación, y es parte del trabajo de los matemáticos que hacemos lógica algebraica: caracterizar los sistemas, comprender sus propiedades, estudiar sus alcances y compararlos con otros ya existentes.

8. Conclusiones

La demanda de sistemas lógicos que puedan razonar de manera eficiente con enunciados que sean a la vez vagos e inciertos se hace imperiosa en los tiempos actuales en los que grandes volúmenes de información deben procesarse de forma precisa.

Los sistemas de lógicas modales multivaluadas y difusas son una herramienta para modelar este razonamiento. Si bien este tipo de sistemas pueden plantearse y estudiarse de maneras muy diversas, el estudio de semánticas algebraicas ofrece un contexto seguro y con múltiples posibilidades de aplicaciones.

Nuestro objetivo en este artículo es presentar de manera sintética e informal las semánticas posibles para el análisis de sistemas de lógicas modales y difusas, y el problema que se debe abordar al tratar de trabajar con dos tipos de semánticas distintas. Aunque

[5] MV_3 es en realidad una variedad de álgebras, puesto que se puede caracterizar por ecuaciones.

la noción de relación de consecuencia lógica es fundamental a la hora de plantear los sistemas, su comprensión escapa a la brevedad y simpleza de este texto. También obviamos detallar características deseables de los sistemas, o especificidades a la hora de modelar los conectivos lógicos. Dejamos para el lector interesado algunas referencias (la bibliografía es inmensa) donde profundizar el conocimiento del tema: [2], [5], [9].

La autora del artículo quiere agradecer a Marilina Carena por la invitación para esta publicación y a Miguel Andrés Marcos por sus aportes para mejorar el texto.

Referencias

[1] P. Blackburn, M. Rijke and Y. Venema (2001). *Modal Logic.* Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, 53. Cambridge University Press, Cambridge.

[2] F. Bou, F. Esteva, L. Godo and R. Rodriguez (2011). On the minimum many-valued modal logic over a finite residuated lattice. *Journal of Logic and Computation*, 5:21, 739–790.

[3] M. Busaniche, P. Cordero and R. Rodriguez (2022). Algebraic semantics for the minimum many-valued modal logic over $Ł_n$. *Fuzzy Sets and Systems*, 431: 94–109.

[4] R. Cignoli, I. D'Ottaviano and D. Mundici (2000). *Algebraic foundations of many-valued reasoning.* Trends in Logic-Studia Logica Library, 7. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[5] M.C. Fitting (1991 and 1992). Many-valued modal logics and Many-valued modal logics II. *Fundamenta Informaticae*, 15 (3-4): 235–254 and 17 (1-2): 55–73.

[6] J.M. Font (2016). *Abstract Algebraic Logic: An Introductory Textbook.* Studies in Logic, Mathematical Logic and Foundations, Vol 60, College Pub.

[7] N. Galatos, P. Jipsen, T. Kowalski and H. Ono (2007). *Residuated lattices: an algebraic glimpse at substructural logics.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 151. Elsevier B. V., Amsterdam.

[8] P. Hájek (1998). *Metamathematics of fuzzy logic.* Trends in Logic-Studia Logica Library, 4. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[9] G. Hansoul and B. Teheux (2013). Extending Lukasiewicz logics with a modality: Algebraic approach to relational semantics, *Studia Logica,* 101(3): 505–545.

[10] R. Jansana (1990). *Una introducción a la lógica modal.* Editorial Tecnos, Madrid.

[11] S. Kripke (1963). Semantical analysis of modal logic. I. Normal modal propositional calculi. *Z. Math. Logik Grundlagen Math.* 9, 67–96.

[12] T. Moraschini (2021). Algebraic Logic, class notes of the Master in Pure and Applied Logic, Department of Philosophy, University of Barcelona.

Ir al índice general