NOTICIERO

ISSN 1514-9595 (web)

Miradas Matemáticas

Entrelazando bases

Carlos Cabrelli

Universidad de Buenos Aires - IMAS - CONICET

Motivación

En procesamiento de señales, una señal continua usualmente se discretiza tomando muestras a través de sensores equi-espaciados o distribuidos con algún criterio. La información recogida por los sensores debe ser suficiente para reconstruir la señal. Otro requerimiento, sobre todo en presencia de ruido, es que la reconstrucción sea estable. O sea, que una pequeña perturbación en las muestras no impacte excesivamente la reconstrucción.

En ciertas aplicaciones en procesamiento distribuido se presenta la siguiente situación: supongamos que tenemos dos líneas de sensores que notamos por $A = \{a_i\}$ y $B = \{b_i\}$, donde a_i y b_i son los sensores del nodo i. Ambas líneas tienen la propiedad de reconstrucción estable. Es decir, si se tienen muestras de una señal tomadas por los sensores de la línea A, esta señal puede ser reconstruida de manera estable. Lo mismo ocurre con la línea B.

Supongamos ahora que una señal es muestreada, pero en cada nodo se activa solo uno de los dos sensores, según algún criterio, pero no siempre de la misma línea.

¿Se podrá en este caso reconstruir la señal a partir de esta información?

En otras palabras, si se forma una sola línea entrelazando sensores de A y de B, (uno en cada nodo), ¿esta nueva línea constituye todavía un conjunto de reconstrucción estable?

Bases entrelazadas, definición y una caracterización

El hecho que la línea de sensores sea un conjunto de muestreo estable se traduce matemáticamente en términos de *marcos* en espacios de Hilbert. Los marcos son generalizaciones de la noción de base (ver [3] para más detalles).

En esta nota nos ocuparemos del caso particular en que los marcos son bases del espacio.

Definición: *Sea n un número natural, y sean $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{w_1, \dots, w_n\}$ dos bases de $\mathbb{C}^n$, $I = \{1, \dots, n\}$. Se dice que $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ están* ***entrelazadas*** *si para todo $J \subset I$ el conjunto $\{v_j\}_{j\in J} \cup \{w_j\}_{j\in I\setminus J}$ es una base de $\mathbb{C}^n$.*

La caracterización de bases entrelazadas pareciera ser un problema sencillo de resolver, pero como veremos enseguida presenta serias dificultades.

La primera observación, que es fácil de comprobar, es que la relación de entrelazamiento es reflexiva y simétrica, pero *no* transitiva. Por otro lado, el entrelazamiento en general depende del orden. Por ejemplo, la base canónica de $\mathbb{C}^n$ está entrelazada con ella misma, pero nunca con una permutación de ella. Esto motiva que estudiemos el siguiente problema: *dadas dos bases, ¿cuándo existe una permutación de una de ellas que está entrelazada con la otra?*

Si dos bases están entrelazadas y le aplicamos a ambas un isomorfismo (el mismo a las dos), entonces sus imágenes, que también son bases, están entrelazadas. Luego, podemos restringirnos, sin perder generalidad, a estudiar cuándo una base está entrelazada con la base canónica.

Pregunta: *dada una base ortogonal, ¿existe siempre una permutación que esté entrelazada con la base canónica?*

Si agrupamos los vectores de una base como columnas de una matriz, decir que esa base está entrelazada con la base canónica es equivalente a ver que si elegimos cualquier $J \subset I$ y para cada $j \in J$ reemplazamos la j-ésima columna de la matriz por el j-ésimo vector de la base canónica, la matriz sigue siendo inversible.

Luego, la pregunta puede parafrasearse como: dada una matriz unitaria, ¿existe una permutación de sus columnas que la entrelaza con la base canónica? O también, dada una matriz unitaria, ¿existe una permutación de sus columnas tal que la sustitución de $\#J$ de sus columnas por las correspondientes de la base canónica la deje inversible para cualquier subconjunto J de I?

En lo que sigue vamos a dar una caracterización de bases entrelazadas que nos servirá para estudiar sus propiedades y construir ejemplos y contraejemplos.

Sea $A = \{a_{i,j}\}$ en $\mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz cuadrada. Una submatriz cuadrada de A se dice **central** si es de la forma $A_J = \{a_{i,j}\}_{i,j\in J}$ para algún subconjunto $J \subset I$. Notar que cada elección de $J \subseteq I$, no vacío, define una submatriz central. O sea que A tiene $2^n - 1$ submatrices centrales. En particular, los elementos de la diagonal son submatrices centrales.

Ahora, dadas dos bases $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{w_1, \dots, w_n\}$ de $\mathbb{C}^n$, denotemos por $A = \{a_{i,j}\}$ a la matriz de cambio de base, i.e.

$$w_i = a_{1,i}v_1 + \cdots + a_{n,i}v_n, \qquad \text{para todo } i \in I.$$

Teorema ([2]). *Dos bases de $\mathbb{C}^n$ están entrelazadas si y solo si todas las submatrices centrales de la matriz de cambio de base son inversibles.*

Es interesante que la propiedad de entrelazamiento pueda ser puesta en términos de propiedades de una matriz.

La clase *W*

Notemos por W la clase de matrices cuadradas con coeficientes complejos tal que todas sus submatrices centrales son inversibles, y por W_n las de orden n, o sea

$$W_n = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} \colon A \in W\}.$$

Observar que cuando una de las bases consideradas es la canónica, los vectores columnas de la matriz de cambio de base son los vectores de la otra base. O sea, si $\mathcal{B}_1$ es la base canónica y $\mathcal{B}_2 = \{w_1, \dots, w_n\}$, entonces $Ae_i = w_i,\ i = 1, \dots, n$. Teniendo en cuenta este comentario, el problema de estudiar bases entrelazadas se reduce a estudiar cuándo una matriz pertenece a la clase W. O sea, dadas dos bases, estas están entrelazadas si y solo si el isomorfismo que lleva una de ellas a la base canónica lleva la otra a una base, con vectores que son columnas de una matriz de W.

A continuación estudiaremos las propiedades de la clase W. Usando esta caracterización, la pregunta anterior puede ser reformulada de la siguiente forma: dada una matriz unitaria en $\mathbb{C}^{n\times n}$, ¿existe alguna permutación de sus columnas que la lleve a W_n? Como el lector puede verificar, el resultado es cierto en dimensiones 1 y 2. Para dimensiones mayores no lo sabemos.

Usando esta caracterización se puede ver que si una matriz está en la clase W, entonces su transpuesta y su adjunta también están en W. En particular, si las columnas de una matriz están entrelazadas con la base canónica, sus filas también. Estas propiedades se deducen fácilmente notando que las submatrices centrales de la transpuesta son la transpuesta de las submatrices centrales. Lo mismo para la adjunta.

Por otro lado, si A está en W, usando que la matriz identidad pertenece a W y multiplicando ambas por la inversa de A (A es inversible por pertenecer a W), queda que la inversa también está en W.

Vamos a describir ahora una propiedad interesante para las aplicaciones. Supongamos, por un momento, que se quiere codificar una señal discreta $x = (x_1, \dots, x_n)$ usando una matriz A. Sea $y = Ax$. Si A es inversible, x puede ser recuperado a través de la inversa de A aplicada a y. Pero si sabemos que A está en W entonces x puede ser recuperado a partir de $\{y_j\}_{j\in J} \cup \{x_j\}_{j\in I\setminus J}$ para cualquier conjunto de índices $J \subset I$.

Otra propiedad importante de la clase W_n como subconjunto de las matrices $M_n = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n}\}$ es que es un conjunto abierto, denso y tal que $M_n \setminus W_n$ tiene medida de Lebesgue cero. Para ver que es un conjunto abierto basta ver que $A \in M_n \setminus W_n$ si y solo si existe una submatriz central de A no inversible o sea

$$\prod_B \det(B) = 0,$$

sobre todas las submatrices centrales B de A. El lado izquierdo es un polinomio en varias variables cuyo conjunto de ceros tiene las propiedades mencionadas arriba.

Matrices de Fourier

En esta sección vamos a estudiar la pertenencia a la clase W para una familia de matrices muy importante en las aplicaciones.

Sea F_n la n-ésima matriz de Fourier, i.e. $F_n = \left[\frac{1}{\sqrt{n}} e^{2\pi jk/n}\right]_{j,k=0}^{n-1}$.

Estas matrices son unitarias y sus elementos son raíces de la unidad de orden n multiplicados por la constante $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Su importancia radica en que, vista como una transformación lineal, representa la transformada de Fourier en el grupo cíclico $\mathbb{Z}_n$. Podemos escribir $F_n x = \widehat{x}$ para $x \in \ell^2(\mathbb{Z}_n) = \mathbb{C}^n$.

En el caso de matrices de Fourier, se puede probar que la pertenencia a la clase W basta verificarla para submatrices centrales $\{A_J : 1 \in J\}$, o sea, submatrices que contengan al a_{11}, que en el caso de las matrices de Fourier es igual a $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Esta propiedad es fácil de probar sacando factores comunes de las filas y columnas de una submatriz central cualquiera que no contenga al elemento a_{11}.

Un teorema de Chebotarëv de 1926 afirma que si p es primo, entonces *toda* submatriz cuadrada de F_p es inversible. O sea que en el caso de p primo, F_p está en W. Esto dice que la base de Fourier (las columnas de F_p) está entrelazada con la base canónica de $\mathbb{C}^p$. Entonces, si reemplazamos algunas columnas de la matriz de Fourier por los vectores canónicos correspondientes, la matriz sigue siendo inversible. De aquí puede deducirse la siguiente propiedad: si p es primo, entonces todo $x \in \mathbb{C}^p$ puede reconstruirse a partir de cualquier entrelazado de las componentes de x y $\widehat{x}$.

Ahora nos preguntamos, ¿para qué valores de n, que no sean primos, F_n está en W? Se puede probar que si n tiene un cuadrado en su factorización, entonces F_n no está en W. ¿Será necesaria esta condición para la no pertenencia a W? O sea, si F_n no está en W, ¿necesariamente n tiene un cuadrado? No lo sabemos.

Otra pregunta que surge es la siguiente. Si p es primo, sabemos que F_p tiene la propiedad de que toda permutación de sus columnas sigue estando en W. Más aún, todas sus submatrices cuadradas son inversibles. De hecho, una matriz unitaria tiene todas sus permutaciones en W si y solo si todas sus submatrices cuadradas, no necesariamente centrales, están en W. ¿Serán las F_p con p primo las únicas matrices unitarias con esta propiedad?

El caso infinito dimensional

Este problema se extiende naturalmente al caso infinito dimensional. En particular, a espacios de Hilbert separables sobre los complejos. Aquí las cuestiones son más técnicas y quizás más difíciles. Notablemente muchas de las propiedades que se discutieron en las secciones anteriores siguen siendo válidas en este nuevo contexto, con las obvias modificaciones.

Veamos primero las definiciones. La extensión más natural de la noción de base a un espacio de Hilbert infinito dimensional $\mathcal{H}$ es la de *base de Riesz*. Hay otras nociones más generales que no vamos a considerar, como las bases de Schauder más apropiadas para los espacios de Banach, o la de marco (frame) que generaliza las bases en otra dirección. En todos estos casos la propiedad de entrelazamiento tiene sentido, y hay trabajos al respecto.

En esta nota nos concentraremos brevemente en el caso de bases de Riesz. Las bases de Riesz pueden verse como una generalización de las bases ortonormales de un espacio de Hilbert. En una base de Riesz cada vector se escribe como una serie con coeficientes únicos que converge incondicionalmente (o sea, sin importar el orden de los sumandos).

Sea I ahora un conjunto de índices numerable. Cada base de Riesz $\{v_k\}_{k\in I}$ tiene asociada una única base de Riesz $\{w_k\}_{k\in I}$ llamada **biortogonal**, que cumple que

$\langle v_k, w_j \rangle = \delta_{k,j}$. Para cada $v \in \mathcal{H}$ se tiene que

$$v = \sum_k \langle v, w_k \rangle \, v_k = \sum_k \langle v, v_k \rangle \, w_k.$$

Formalmente, decimos que una sucesión de vectores $\{v_k\}_{k\in I} \subset \mathcal{H}$ es una **base de Riesz** de $\mathcal{H}$ si existe un operador acotado y biyectivo de $\mathcal{H}$ en sí mismo, que manda una base ortonormal en los $\{v_k\}_{k\in I}$. O sea, las bases de Riesz son imágenes por isomorfismos de bases ortonormales. Si el isomorfismo no es isométrico, entonces se pierde la ortogonalidad. Equivalentemente, decimos que $\{v_k\}_{k\in I} \subset \mathcal{H}$ es una base de Riesz si es un conjunto *completo* en $\mathcal{H}$ tal que existen constantes $0 < A \leq B$ que satisfacen

$$A \sum_k |c_k|^2 \leq \left\| \sum_k c_k v_k \right\|_{\mathcal{H}}^2 \leq B \sum_k |c_k|^2 ,$$

para toda sucesión finita de escalares $\{c_k\}_k \subset \mathbb{C}$. Las constantes A y B se llaman constantes de la base.

Dos bases de Riesz $\{v_k\}_{k\in I}$ y $\{w_k\}_{k\in I}$ de $\mathcal{H}$, al igual que antes, se dicen **entrelazadas** si para cada $J \subset I$ el conjunto $\{v_k\}_{k\in J} \cup \{w_k\}_{k\in I\setminus J}$ sigue siendo base de Riesz.

En [1] se prueba el sorprendente resultado que si dos bases de Riesz están entrelazadas, entonces las constantes de Riesz de todos los entrelazamientos están uniformemente acotadas.

Veamos ahora algunos resultados de dimensión finita que se trasladan al caso infinito. Quizás el más importante sea el teorema de caracterización por matrices que vale con las siguientes modificaciones.

Dadas dos bases de Riesz $\{v_k\}_{k\in I}$ y $\{w_k\}_{k\in I}$ de $\mathcal{H}$, existe un operador acotado de **cambio de base**, $A\colon \ell^2(I) \to \ell^2(I)$, con $A = \{a_{i,j}\}$, tal que $w_i = \sum_j a_{j,i} v_j$, para $i = 1, \dots, n$.

Si $J \subset I$, uno puede definir el operador representado por la matriz $A_J = \{a_{i,j}\}_{i,j\in J} : \ell^2(J) \to \ell^2(J)$. A estos operadores los llamamos **centrales** y están acotados para todo $J \subset I$.

Entonces vale el **teorema**: *dos bases de Riesz en $\mathcal{H}$ están entrelazadas si y solo si los operadores centrales del operador de cambio de base son inversibles y con cotas uniformes por arriba y por abajo, i.e.* $0 < c_1\|v\| \leq \|A_J v\| \leq c_2\|v\|$, *para todo v en* $\overline{span}\,\{e_j : j \in J\}$.

Luego se puede considerar nuevamente la clase W y estudiar las propiedades de estos operadores. Para terminar, una propiedad interesante es la siguiente.

Supongamos que tenemos un operador acotado $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ y una base ortonormal $\{e_j\}_{j\in I}$ de $\mathcal{H}$. Si $A = \{a_{i,j}\}$ con $Te_j = \sum_{s\in I} a_{s,j} e_s$, entonces si A está en W vale la siguiente propiedad: si $M = \overline{span}\,\{e_j : j \in J\}$ y $N = \overline{span}\,\{e_j : j \in I \setminus J\}$, cada $v \in \mathcal{H}$ puede ser recuperado a partir de $P_M v$ y $P_N T v$, para todo $J \subseteq I$, donde P_M y P_N son las proyecciones ortogonales sobre los correspondientes subespacios.

Nota: *Este artículo constituye una descripción abreviada y de carácter expositorio sobre un tema en el que he estado trabajando en colaboración con Ursula Molter y Felipe Negreira. No he incluido demostraciones ni muchos detalles técnicos para hacer más amena la lectura y llegar pronto a la comprensión del problema y sus particularidades. Los interesados en profundizar en el tema pueden consultar el artículo [2]. Agradezco a las autoridades de la Unión Matemática Argentina por darme la oportunidad de difundir este tema.*

Referencias

[1] T. Bemrose, P.G. Casazza, K. Gröchenig, M.C. Lammers, R.G. Lynch (2016). *Weaving frames.* Oper. matrices, 10, 1093–1116.
`https://arxiv.org/pdf/1503.03947.pdf`

[2] C. Cabrelli, U. Molter, F. Negreira (2024). *Weaving Riesz bases.*
`https://arxiv.org/abs/2404.02229`

[3] Frame (linear algebra). Wikipedia.
`https://en.wikipedia.org/wiki/Frame_(linear_algebra).`

Ir al índice general