NOTICIERO

ISSN 1514-9595 (web)

Competencia Interuniversitaria de Matemática Argentina

Toda solución trae problemas, son los problemas los que nos llevan a la CIMA

Rocío Díaz Martín

Vanderbilt University, USA

Este breve fragmento pretende ser una invitación a la Competencia Interuniversitaria de Matemática Argentina: la CIMA. Les contaremos en pocas palabras su historia y su misión. De yapa, un problema y algunas soluciones.

La **CIMA**, como su nombre lo indica 😜, es la Competencia Interuniversitaria de Matemática Argentina. Desde el año 2013 ha tomado la posta de la **competencia Paenza**. Dicha competencia fue organizada por 25 años consecutivos, hasta el año 2011, por la Fundación Ernesto Paenza. Pero, ¿el matemático no se llama Adrián? Sí. Cuando muere el padre (Ernesto) del matemático (Adrián), su familia y amigos deciden rendirle homenaje. Dicho tributo fue muy original: se crea una fundación con su nombre desde la cual se organizó una competencia de resolución de problemas de matemática (*"la Paenza"*), con el propósito de llegar a todos los ámbitos universitarios del país en donde haya un departamento de matemática. Pasado un cuarto de siglo, cuando *"la Paenza"* llega a su fin, fue necesario darle continuidad al legado: allí se levanta la CIMA.

Un día en el año, generalmente en agosto, los delegados de las distintas sedes de la Argentina (y también de la república hermana del Uruguay), reciben al mismo tiempo las pruebas de la competencia. El sobre sellado, ha sido reemplazado por un email, pero el espíritu de transparencia es el mismo. Cada equipo participante, conformado por uno o dos estudiantes universitarios (no egresados previamente de alguna otra carrera), cuenta con 5 horas para pensar 6 problemas, desde las 9 de la mañana hasta las 2 de la tarde. En sus resoluciones no escriben sus nombres sino un código previamente asignado para que el jurado no los identifique y pueda tener algún sesgo. Las pruebas se escanean y, una vez corregidas, se eligen "ganadores": un podio con 5 escalones y cuantas menciones especiales considere apropiado otorgar el jurado. La premiación tiene lugar en la Reunión Anual de la UMA y toda la CIMA es hoy por hoy auspiciada por la UMA.

Este año realizaremos la 10ª edición. A modo de festejo hacemos extensiva la invitación a participar de la CIMA. El mayor regalo que nos podemos dar es el de consolidar la idea de que a la CIMA llegamos todos. No pretendemos ser sinónimo cumbre de un podio. Como describió el propio Adrián Paenza, “el objetivo no es ganar, sino el placer de tener problemas para pensar” (¡incluso una vez finalizado el tiempo de la prueba!). La idea es **disfrutar de la capacidad de pensar, de desafiarnos, solos o en equipos.** También Adrián Paenza comentó alguna vez que las frustraciones tienen su lugar en el juego, pero es eso, parte del juego como también lo son el poder darnos lugar a entrenarnos y el divertirnos buscando soluciones.

La CIMA se discontinuó durante los años 2020 y 2021 de pandemia, retomándose en 2022. En dicha edición, de modo excepcional y buscando suplir los años sin competencia, pudieron participar equipos con integrantes que se habían graduado en el período 2020–2022. Finalizamos esta nota con el primer problema de dicha prueba, que fue resuelto por la mayoría de los equipos que participaron. Los invitamos a pensar.

Problema

Consideremos un tetraedro en $\mathbb{R}^3$. Sobre cada cara se define un vector exterior ortogonal a ella, de magnitud igual a su área. Probar que la suma de los cuatros vectores es igual a 0.

Interpretación física. Brevemente, si pensamos en un gas dentro de un poliedro (en particular, dentro de un tetraedro) que está bajo presión constante, este ejerce en cada cara una fuerza que es es proporcional al área de la cara respectiva y perpendicular con dirección saliente/exterior. En ausencia de fuerzas externas, la suma de todas las fuerzas internas debe ser cero.

Soluciones de distintos equipos participantes en la CIMA

Por Julieta Améndola y Santiago Federico Giordani (UNICEN, Tandil).

Sean v_1, v_2, v_3, v_4 los vectores ortogonales a las caras C_1, C_2, C_3, C_4 del tetraedro (respectivamente) y sean e_1, e_2, e_3 los vectores canónicos de $\mathbb{R}^3$. Entonces

$$\sum_{j=1}^{4} v_j = \sum_{k=1}^{3} \left(\sum_{j=1}^{4} \langle v_j, e_k \rangle \right) e_k,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno canónico en $\mathbb{R}^3$. Fijado $k \in \{1, 2, 3\}$, si se interpreta e_k como el campo vectorial contante $(x, y, z) \mapsto e_k$ en $\mathbb{R}^3$. Notamos que $\langle v_j, e_k \rangle$ es exactamente la integral de superficie del campo e_k sobre la cara C_j del tetraedro. Luego,

$$\sum_{j=1}^{4} v_j = \sum_{k=1}^{3} \left(\sum_{j=1}^{4} \int_{C_j} e_k \cdot d\mathbf{S} \right) e_k = \sum_{k=1}^{3} \left(\int_{C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4} e_k \cdot d\mathbf{S} \right) e_k.$$

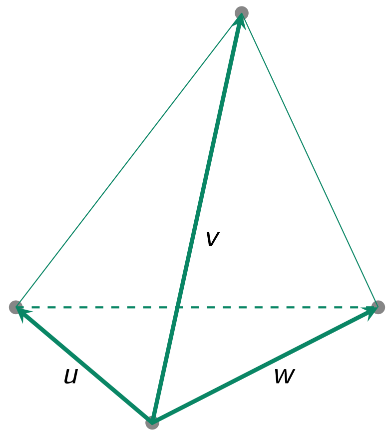
Usando el Teorema de la Divergencia se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{4} v_j &= \sum_{k=1}^{3} \left(\int_{C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4} e_k \cdot d\mathbf{S} \right) e_k = \sum_{k=1}^{3} \left(\int_{\text{Tetraedro}} \nabla \cdot e_k \, dV \right) e_k \\ &= \sum_{k=1}^{3} \left(\int_{\text{Tetraedro}} 0 \, dV \right) e_k = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3, \end{aligned}$$

donde $\nabla \cdot e_k = 0$ por ser e_k campo constante. De esta manera se prueba que $\sum_{j=1}^{4} v_j$ es el vector $(0, 0, 0)$.

Por los equipos Nicolás Agote y Sebastián Zaninovich (UBA), Mateo Alessi y Lian Choon Teo (UNCUYO), Benjamín Arias y Juan Ignacio Olazagoitia (UNR), Rocío Bernardini y Jerónimo Juan Misa (UBA), Mateo Carranza Vélez y Miguel Kalinowski (UNC), Sebastián Cherny y Carla Crucianelli (UBA), Mateo Chialvo y Mateo Marengo Cano (UNC), Franco De Rico y Gianni De Rico (UNR), Luigi Finetti y Bruno Giordano (UNC), Julián Garbulsky y Julia Zanette (UBA), Facundo García y Esteban Kuzmicich (UNR), Juan Ignacio Gargano y Franco Nicolás Rufolo (UBA), Enzo Giannotta y Francisco Valdez (UBA), Franco Iotti y Nicolás Antonio Martone (UBA), Leonardo Lanciano y Josefina Villar (UBA), Julián Masliah y Carlos Miguel Soto (UBA), Francesco Mozzatti y Matías Raimundez (UNR), Ivo Pajor y Gabriel Sac Himelfarb (UBA).

Se elige un vértice y se da nombre u, v, w a los tres vectores que tienen como punto de aplicación dicho vértice y que siguen tres aristas del tetraedro como muestra la figura.



Siguiendo la regla de la mano derecha, un vector ortogonal a la cara que contiene a u y a v está dado por el producto vectorial o “cruz” $v \times u$, el cual, por el orden elegido, apunta hacia afuera del tetraedro). Notando ahora que el área de la cara dada por v y u es la mitad del área del paralelogramo que generan dichos vectores, cuya área es $\|v \times u\|$, se tiene que la norma del vector perpendicular a esta cara que debemos considerar es $\frac{1}{2}\|v \times u\|$. Luego, el vector normal exterior es $\frac{1}{2}(v \times u)$.

De manera análoga, los vectores normales exteriores a las caras determinadas por v y w, u y w, y $v - u$ y $w - u$ son, respectivamente, $\frac{1}{2}w \times v$, $\frac{1}{2}u \times w$ y $\frac{1}{2}(v - u) \times (w - u)$. Finalmente, su suma es

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left[v \times u + w \times v + u \times w + (v-u) \times (w-u)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[v \times u + w \times v + u \times w + \underbrace{v \times w}_{-w \times v} - v \times u - u \times w + \underbrace{u \times u}_{0}\right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por los equipos Gabriel Ignacio Bernal Ribotta y Eros Pablo Girardi (UNL), Francisco Cirelli y Joaquín Fernandez (UBA), Dania Constanza Perez Vosahlo y Vicente Rafael Schkolnik Rivas (UNC).

La estrategia es similar a la de la solución anterior pero eligiendo un sistema de coordenadas para dar referencia a los cuatro vértices del tetraedro que muestra la Figura 1.

Usando propiedades del producto cruz se tiene que los cuatro vectores normales exteriores a cada una de las caras con magnitud igual al área de la cara respectiva están dados por:

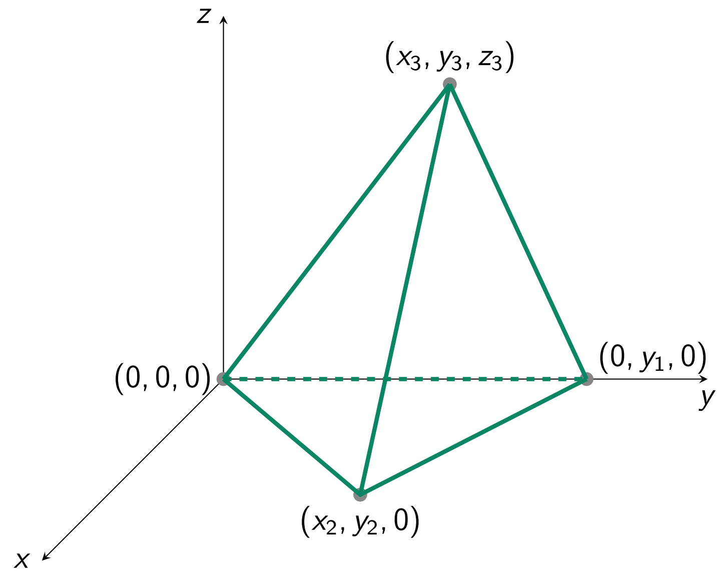


Figura 1: Tetraedro en un sistema de coordenadas.

- $\frac{1}{2}(x_2, y_2, 0) \times (x_3, y_3, z_3) = \frac{1}{2}(y_2 z_3, -x_2 z_3, x_2 y_3 - x_3 y_2)$
- $\frac{1}{2}(x_2, y_3 - y_1, z_3) \times (x_2, y_2 - y_1, 0) = \frac{1}{2}(z_3 y_1 - z_3 y_2, x_2 z_3, x_3 y_2 - x_3 y_1 - x_2 y_3 + x_2 y_1)$
- $\frac{1}{2}(0, y_1, 0) \times (x_2, y_2, 0) = \frac{1}{2}(0, 0, -x_2 y_1)$
- $\frac{1}{2}(x_3, y_3, z_3) \times (0, y_1, 0) = \frac{1}{2}(-z_3 y_1, 0, x_3 y_1)$

Sumando estos cuatro vectores obtenemos el vector nulo $(0, 0, 0)$.

Agradecimientos. Un gran agradecimiento a mis compañeros del jurado, Carlos Di Fiore, Luis Ferroni, Martín Mereb, Juan Pablo Rossetti (¡jurado desde la primera CIMA!) y Mauro Subils. También, y muy especialmente, a Diego Sulca. A todos quienes envían problemas a `problemas.cima@gmail.com`. Por último, pero no por menos importante, a quienes hacen posible el funcionamiento interno de la CIMA, a nuestras secretarias María Inés López Pujato y Lara Fernández.