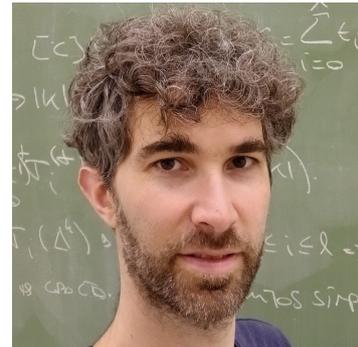


Miradas Matemáticas

Agujeros en poliedros aleatorios. Combinatoria, Topología y Probabilidad

Jonathan A. Barmak

FCEyN, Universidad de Buenos Aires - IMAS-CONICET



Resumen

Veremos cómo usar ideas combinatorias para probar que ciertos poliedros no tienen agujeros (grupos de homotopía) en determinadas dimensiones. En particular estudiaremos el comportamiento de complejos simpliciales aleatorios cuando la cantidad de vértices tiende a infinito.

1. Grupos de homotopía y poliedros

Un problema muy general y ubicuo en Matemática es el de reconocer cuándo dos objetos son iguales: el número racional $\frac{1}{2}$ coincide con $\frac{2}{4}$; el grupo $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$ es isomorfo a \mathbb{Z}_6 . Según el contexto y la manera en la que se describen los objetos, este problema puede ser extremadamente complicado. En Topología los objetos suelen ser espacios topológicos (pueden ser variantes o cosas muy distintas también). Y la palabra *iguales* puede tomar distintas formas: se puede referir a iguales salvo homeomorfismo, salvo homeomorfismo que preserve cierta estructura, salvo equivalencia homotópica, y otras. Dos espacios son homotópicamente equivalentes si podemos deformar continuamente uno en el otro. Los problemas asociados son muy difíciles, incluso en casos muy particulares. La conjetura de Poincaré, por ejemplo, dice toda variedad topológica M de dimensión 3 cerrada simplemente conexa, debe ser homeomorfa a la esfera S^3 de dimensión 3. Este problema fue planteado en 1904 y tardó casi 100 años en resolverse afirmativamente (Perelman, Hamilton y otros [9]). En parte la Topología algebraica busca estudiar invariantes algebraicos de espacios (o funciones u otros objetos) para comprenderlos parcialmente. Algunos son invariantes por homeomorfismo, otros por equivalencia homotópica u otro tipo de deformaciones. Si dos espacios tienen invariantes no isomorfos, entonces son distintos, en uno u otro sentido. Dentro de los invariantes más conocidos están los grupos de homología, los grupos de cohomología y los grupos de homotopía. Los tres son distintas maneras de medir agujeros. El grupo fundamental π_1 es el primer grupo de homotopía.

Ejemplo 1. El disco D^2 de dimensión 2 y la esfera S^1 de dimensión 1 tienen grupos fundamentales no isomorfos, y por lo tanto son espacios no homeomorfos (cosa que es fácil de ver por otros medios), y, más aún, no tienen el mismo tipo homotópico.

Si X es un espacio, $\pi_1(X)$ se puede describir como el conjunto de lazos en X salvo homotopía. Un lazo es simplemente una función continua $\gamma : S^1 \rightarrow X$, y lazos $\gamma, \omega : S^1 \rightarrow X$ son homotópicos si existe una homotopía entre ellos, es decir una función continua $H : S^1 \times [0, 1] \rightarrow X$ que cumple $H(s, 0) = \gamma(s)$ y $H(s, 1) = \omega(s)$ para todo $s \in S^1$. Una homotopía no es otra cosa que una deformación continua entre los lazos γ y ω , donde a tiempo $t \in [0, 1]$ tenemos un lazo $H(-, t)$. Rigurosamente hay un punto base $x_0 \in X$, los lazos deben comenzar y terminar en x_0 (es decir que $\gamma : S^1 \rightarrow X$ manda un punto distinguido $s_0 \in S^1$ a x_0) y las homotopías deben cumplir que cada lazo $H(-, t)$ también empieza y termina en x_0 (ver Figura 1). Además, el conjunto $\pi_1(X)$ recién descrito tiene una estructura de grupo. Uno puede concatenar lazos que empiezan y terminan en $x_0 \in X$. El neutro del grupo está dado por la clase del lazo constante, y el inverso de la clase de un lazo, por la clase del lazo recorrido en dirección opuesta. Si bien $\pi_1(X)$ depende del punto base x_0 elegido, para espacios arcoconexos cualesquiera dos puntos dan grupos isomorfos.

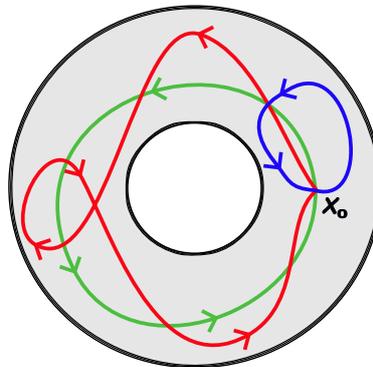


Figura 1: En el espacio X coloreado con gris, el lazo rojo y el verde representan el mismo elemento en $\pi_1(X)$, mientras que el lazo azul representa otro: el neutro del grupo .

Un espacio X se dice 1-conexo, o simplemente conexo, si es arcoconexo y no tiene agujeros de dimensión 1, es decir si $\pi_1(X) = 0$. Esto equivale a que X sea arcoconexo y que todo lazo $\gamma : S^1 \rightarrow X$ sea homotópico a una constante. En esta afirmación podemos prescindir de los puntos base y las homotopías son libres (tampoco deben preservar puntos base).

Los grupos de homotopía de orden superior se definen de manera similar: dado $k \geq 1$, el grupo $\pi_k(X)$ tiene como elementos a las clases homotópicas de funciones continuas $S^k \rightarrow X$, y un producto que generaliza la idea de concatenación.

Ejemplo 2. El disco D^k tiene $\pi_k(D^k)$ trivial, mientras que S^k no, porque la función identidad $1 : S^k \rightarrow S^k$ no es homotópica a una constante (esto no es obvio).

Los grupos de homotopía son invariantes homotópicos. Es decir que si dos espacios tienen π_k no isomorfos para algún k , no son homotópicamente equivalentes.

Un espacio arcoconexo X tiene $\pi_k(X) = 0$ si y sólo si toda función continua $f : S^k \rightarrow X$ es homotópica a una constante. Un espacio X se dice k -conexo si es arcoconexo y $\pi_d(X) = 0$ para todo $1 \leq d \leq k$. Ser arcoconexo no es otra cosa que decir que toda función $S^0 \rightarrow X$ es homotópica a una constante, o que el conjunto $\pi_0(X)$ es trivial (acá no se define un producto).

Un espacio contráctil es uno que tiene el tipo homotópico de un punto. Un tal espacio no tiene agujeros: todos los grupos de homotopía son triviales. Extrañamente, existen espacios con todos los grupos de homotopía triviales que no son contráctiles. Pero para espacios *buenos*, sí vale la equivalencia.

Los espacios buenos serán acá espacios que se pueden describir de manera muy sencilla y que representan a muchos de los espacios clásicos en topología algebraica: poliedros o espacios que admiten una triangulación.

Un símplex de dimensión d es la cápsula convexa de un conjunto de $d + 1$ puntos (llamados vértices) en posición general en un espacio euclídeo \mathbb{R}^k con $k \geq d$ (ver Figura 2).

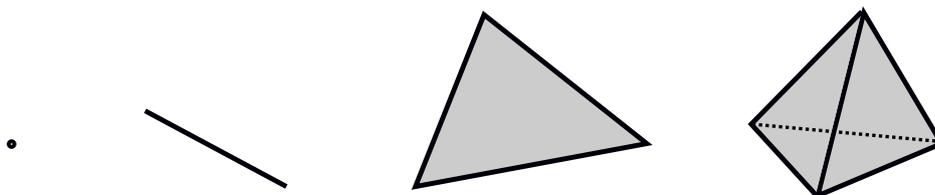


Figura 2: Símplices de dimensiones 0, 1, 2 y 3.

Una cara de un símplex es la cápsula convexa de algunos de sus vértices. Un poliedro K es una unión de símplexes donde la intersección de cualesquiera dos de ellos es o bien vacío o bien una cara común (ver Figura 3).

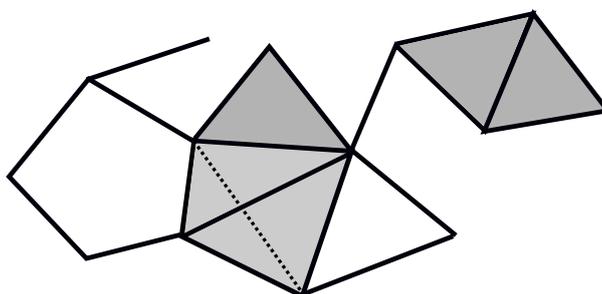


Figura 3: Un poliedro con un símplex de dimensión 3, siete de dimensión 2, y varios de dimensión 1 y 0.

Si K tiene finitos símplexes (equivalentemente, finitos vértices), podemos pensar a todo el poliedro como un subespacio de un espacio euclídeo \mathbb{R}^k . En el caso general, la definición de poliedro debería darse con más cuidado. En esta nota sólo trabajaremos con poliedros con finitos símplexes.

Una propiedad de los poliedros (con finitos símplexes) es que se pueden describir de manera combinatoria, en el sentido de que podemos dar una lista finita de símbolos que los determina completamente. No todos los espacios se pueden describir de esta manera. La estructura combinatoria que se usa para representar un poliedro es la de complejo simplicial. Un complejo simplicial consta de un conjunto V , cuyos elementos se llaman vértices, y de conjunto S de subconjuntos finitos no vacíos de V que es cerrado por inclusiones, y que contiene a todos los subconjuntos unipuntuales de V . Los elementos de S se llaman símplexes.

Sin ser muy rigurosos, podemos definir al poliedro asociado a un complejo simplicial como aquel que tiene por símplexes a los símplexes del complejo (ver Figura 4). Si bien

Sea K el complejo simplicial que tiene por vértices a v, w, u, s y por símlices a $\{v\}, \{w\}, \{u\}, \{s\}, \{v, w\}, \{v, u\}, \{w, u\}, \{v, s\}, \{v, w, u\}$.

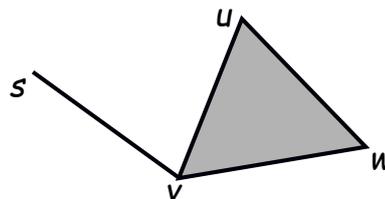


Figura 4: Un complejo simplicial y su poliedro asociado.

hay muchas formas de realizar un complejo simplicial como poliedro, en espacios euclídeos de distintas dimensiones y para distintas elecciones de los vértices de los símlices, todas estos espacios son homeomorfos: el poliedro asociado a un complejo está bien definido salvo homeomorfismo. En general no vamos a distinguir un complejo simplicial del poliedro asociado. Por otro lado, un poliedro en general admite muchas triangulaciones. Es decir, es el espacio asociado a distintos complejos simpliciales (i.e. no isomorfos).

Los poliedros son de los espacios más usados en Topología algebraica y representan a muchos de los espacios que conocemos. Por ejemplo, toda variedad diferenciable admite una triangulación, es decir, es homeomorfa a un poliedro (ver Figura 5).

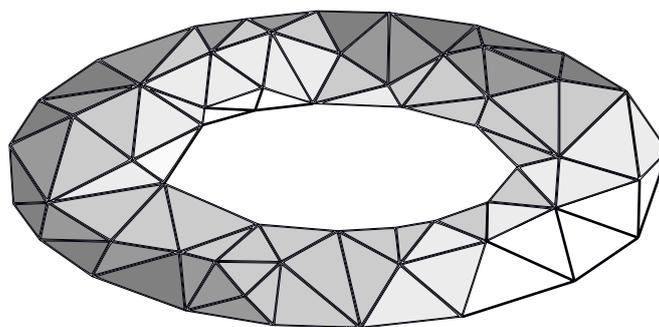


Figura 5: Una triangulación de un toro.

Una de las grandes ventajas de los poliedros, es que las representaciones combinatorias con complejos simpliciales facilitan el cálculo de invariantes. A modo de ejemplo, los grupos de homología, esa otra manera de medir agujeros, pueden calcularse algorítmicamente a partir de una triangulación.

Los complejos simpliciales son además muy naturales, porque pueden pensarse como una generalización de los grafos. Un grafo (simple) es un complejo simplicial de dimensión 1. En Teoría de redes, se usan grafos para modelar problemas de Informática, Ciencias sociales, Biología, etc. Uno tiene un conjunto de individuos que representa con vértices, y relaciones entre pares que representa con aristas. Invariantes combinatorios del grafo pueden dar información sobre el sistema complejo original. Los complejos simpliciales aparecen naturalmente en este contexto como una manera de tener en cuenta relaciones entre conjuntos de individuos de cardinal mayor a dos. No es lo mismo tener tres individuos que se relacionan de a pares que tener tres individuos que se relacionan como conjunto (ej: personas que estuvieron simultáneamente en una reunión). Invariantes combinatorios de los complejos simpliciales pueden dar más información que los grafos, e invariantes topológicos de los poliedros asociados pueden dar otro tipo de información.

Los complejos simpliciales se utilizan en Análisis topológico de datos para estudiar nubes de datos, obtenidas por mediciones. Los puntos de estos espacios viven en algún espacio euclídeo, y por sí mismos forman un espacio métrico discreto. Sin embargo, son

sólo muestras de un espacio subyacente más grande, que se puede aproximar a partir de la muestra. Se construyen así complejos simpliciales que tienen en cuenta las distancias entre los puntos. Aunque estos complejos pueden tener dimensión muy grande, en varios casos tienen el mismo tipo homotópico que el espacio original que uno quiere estudiar. Es por eso que estudiar grupos de homología o de homotopía del poliedro puede dar información relevante para el problema real.

Aunque los poliedros finitos se describen con información combinatoria y los grupos de homotopía tienen una definición muy elemental, no hay un método general que permita calcularlos, ni siquiera para estos espacios. A modo de ejemplo, las esferas son poliedros que se pueden modelar con complejos simpliciales muy simples: S^n es la realización de un complejo con $n + 2$ vértices y con símlices todos los subconjuntos propios de vértices. Y aún así, no se conocen todos los grupos de homotopía de todas las esferas. Ocurren cosas sorprendentes, como que $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$ y que ciertos grupos de esferas tienen torsión. Hay muchos resultados conocidos en esta dirección [11].

Incluso con el popular grupo de homotopía de grado 1, el grupo fundamental, no existe un algoritmo que permita calcularlo para un complejo simplicial finito. Es posible obtener una presentación con generadores y relaciones, pero no hay manera de decidir en general si este grupo es trivial, por ejemplo, o si un elemento dado es trivial. Esto último se conoce como el problema de la palabra [8]. Una vez más, dados dos objetos, no resulta sencillo saber si son el mismo o no.

2. Complejos simpliciales aleatorios

En Ciencia de redes, como dijimos, se usan grafos para modelar sistemas complejos. Los grafos aleatorios sirven para generar conjuntos de datos sintéticos cuando no hay mediciones suficientes. Se usan también para comparar con sistemas reales y ver si determinado modelo es fiel a la realidad. En los últimos años se están investigando complejos simpliciales aleatorios como una extensión natural de las ideas anteriores. Una segunda aplicación que tienen los complejos aleatorios es dentro de Matemática pura. Por un lado, al generar espacios aleatorios uno puede obtener ejemplos difíciles de conseguir constructivamente. El método probabilístico permite probar que existen ejemplos con determinada propiedad demostrando que la probabilidad de que tal evento ocurra es mayor a 0. En la otra dirección, algunas conjeturas abiertas fueron testeadas y se probó que son ciertas con probabilidad tendiendo a 1, lo que podría interpretarse como evidencia de su veracidad.

Es por todas estas aplicaciones que resulta de interés estudiar propiedades asintóticas de complejos aleatorios. Cómo se comporta un invariante al hacer tender a infinito el número de vértices?

Por supuesto, primero hay que fijar el modelo, la medida que tiene cada complejo simplicial. Uno de los modelos más generales es el multiparamétrico, que surge como una extensión natural del modelo de Erdős-Rényi de grafos [2]. Dado un conjunto V de cardinal n , fijamos para cada subconjunto $\sigma \subseteq V$ no vacío un número $0 \leq p_\sigma \leq 1$. A partir de estos parámetros de probabilidad se puede definir la medida $P(K)$ de cada poliedro con vértices contenidos en V . En lugar de dar esa definición, vamos a mostrar cómo construir un complejo aleatorio. Primero vamos a decidir cuáles elementos de V serán efectivamente vértices de K . Para eso, agregamos cada v de manera independiente y con probabilidad $p_{\{v\}}$. Una vez construidos los vértices, vamos a agregar los símlices de dimensión 1, es decir, las aristas. Para cada par v, w de vértices de K vamos a agregar el símplex $\{v, w\}$ con

probabilidad $p_{\{v,w\}}$ e independientemente. En el siguiente paso, cada vez que tengamos tres aristas que forman un triángulo, vamos a agregar el simplex de dimensión 2 correspondiente con la probabilidad asociada. Al llegar a dimensión $n - 1$ concluye la construcción.

A modo de ejemplo, si $n = 3$, digamos $V = \{v, w, u\}$, y todos los parámetros de probabilidad son iguales a $\frac{1}{2}$, cuál es la probabilidad de que el complejo simplicial sea el triángulo vacío, es decir el complejo K que tiene como simplices a $\{v\}, \{w\}, \{u\}, \{v, w\}, \{v, u\}, \{w, u\}$? Esos seis simplices deben estar presentes, y además el simplex $\{v, w, u\}$ de dimensión 2 no debe estar. Por eso la probabilidad de K es $\frac{1}{27}$.

Algunos casos particulares del modelo multiparamétrico eran conocidos de antes. Por ejemplo, si $p_\sigma = 1$ para cada conjunto σ de cardinal 1, $p_\sigma = p$, con p fijo, si σ tiene 2 elementos, y $p_\sigma = 0$ para cardinales mayores a 2, el complejo obtenido es un grafo. Este es el famoso modelo de Erdős-Rényi. Si modificamos el modelo anterior definiendo ahora $p_\sigma = 1$ para cardinales mayores a 2, el modelo se llama *clique*. Estos son complejos que quedan determinados por el grafo subyacente: si en un conjunto de vértices cualquier par forma una arista, entonces el conjunto es un simplex.

En los dos modelos anteriores sólo unos pocos complejos de todos los posibles pueden aparecer efectivamente. Si en cambio todos los parámetros están en el intervalo $(0, 1)$, todos los complejos con vértices soportados en V tienen una probabilidad positiva. Cuando el cardinal n de V crece, uno puede esperar o no variaciones en los parámetros. En los resultados que vamos a contar acá asumiremos que los parámetros están uniformemente acotados inferiormente por una constante $a > 0$. Es decir que $p_\sigma \geq a$ para todo $\emptyset \neq \sigma \subseteq V$, donde a es independiente de n .

El siguiente resultado trata sobre complejos simpliciales, pero no es otra cosa que un resultado ya conocido para el modelo de grafos.

Proposición 3. *Supongamos que los parámetros de probabilidad están acotados inferiormente por cierto $a > 0$ independiente de la cantidad de vértices n . La probabilidad de que K sea conexo tiende a 1 cuando n tiende a infinito.*

Demostración. Vamos a considerar el evento E “cualesquiera dos vértices de K están conectados por un camino de longitud 2”, en otras palabras, dados vértices $v, w \in K$, existe otro vértice $u \in K$ tal que los simplices $\{v, u\}$ y $\{w, u\}$ están en K . Esta propiedad es mucho más fuerte que la conexión. Dado un punto x cualquiera en el poliedro K , siempre hay un vértice en su componente conexa. De hecho, si σ es un simplex que contiene a x , entonces hay caminos en σ de x a cualquiera de los vértices de σ . Probaremos que E ocurre con probabilidad tendiendo a 1.

Sea V un conjunto de cardinal n . Sean $v, w, u \in V$ tres elementos distintos. La probabilidad de que un complejo K con sus vértices contenidos en V , y que contiene a v y a w , contenga además al camino v, u, w , es $p_{\{u\}}p_{\{v,u\}}p_{\{w,u\}}$. Luego, la probabilidad condicional

$$P(\text{el camino } v, u, w \text{ está en } K | v, w \in K) \geq a^3.$$

Por lo tanto,

$$P(\text{el camino } v, u, w \text{ no está en } K | v, w \in K) \leq 1 - a^3.$$

Si ahora $v \neq w \in V$ están fijos, pero u no,

$$P(\text{el camino } v, u, w \text{ no está en } K \text{ para ningún } v, w \neq u \in V | v, w \in K) \leq (1 - a^3)^{n-2},$$

por independencia condicional.

Finalmente, si v, w tampoco están fijos,

$$P(E^c) = P(\exists v \neq w \in K \text{ tales que } v \text{ y } w \text{ no se conectan por ningún camino de longitud 2}) \leq$$

$$\sum_{v \neq w \in V} P(v \text{ y } w \text{ están en } K \text{ y no se conectan por ningún camino de longitud 2}) \leq$$

$$\sum_{v \neq w \in V} P(v \text{ y } w \text{ no se conectan por ningún camino de longitud 2} | v, w \in K) \leq \binom{n}{2} (1 - a^3)^{n-2}.$$

Como esta última expresión tiende a 0 cuando $n \rightarrow \infty$, el resultado queda probado. \square

Como dijimos, este no es más que un resultado sobre grafos. Investigar cuándo K es arcoconexo equivale a analizar cuándo $\pi_0(K)$ es trivial. La siguiente pregunta natural involucra a $\pi_1(K)$. Qué ocurre asintóticamente con la probabilidad de que K sea simplemente conexo? El problema de la palabra o, más específicamente, la imposibilidad de decidir cuándo una presentación presenta al grupo trivial, nos dice que no tenemos chances de calcular completamente este número para cada n . La idea va a ser entonces definir un evento similar al evento E del resultado anterior. Una propiedad que implique simple conexión y para la que sea más sencillo estimar la probabilidad de que ocurra.

3. Links y subcomplejos chicos

Dado un complejo simplicial K y un vértice $v \in K$, el *link* $\text{lk}(v)$ de v en K es el subcomplejo de K formado por todos los símplexes $\sigma \in K$ que no contienen a v pero que al unirles v uno obtiene un símplex (notado) $v\sigma$ de K . En otras palabras es el subcomplejo más grande de K que forma la base de un cono con ápice en v contenido en K (ver Figura 6).

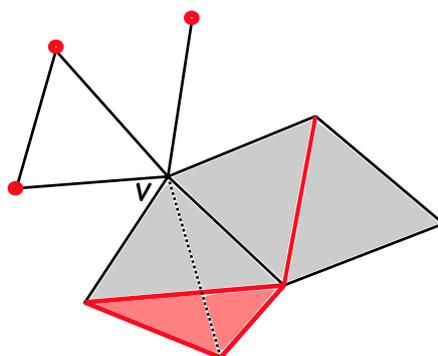


Figura 6: El link de v en rojo consta de un símplex de dimensión 2, cuatro de dimensión 1 y siete vértices. El símplex de dimensión 2 junto con v forma el único símplex de dimensión 3 del complejo.

Los conos son complejos contráctiles. Por eso, K no puede tener agujeros contenidos en links de vértices.

Definición 4. Sea r un entero no negativo. Decimos que un complejo simplicial K cumple la propiedad $c(r)$ si todo subcomplejo L de K con a lo sumo r vértices está contenido en el link de un vértice $v \in K$.

La propiedad $c(r)$ implica que el complejo no puede tener agujeros contenidos en subcomplejos chicos. Más aún, uno puede probar que cualquier agujero puede ser descompuesto como suma (en los grupos de homotopía) de agujeros chicos. El tamaño de estos agujeros depende en realidad de la dimensión. Y entonces la propiedad $c(r)$ va a garantizar que el complejo es k -conexo para cierto k que depende de r . Empezaremos con el caso de dimensión 1.

Antes de eso, recordamos brevemente el enunciado del Teorema de aproximación simplicial, que es uno de los resultados básicos, pero imprescindibles al comenzar a trabajar con poliedros. El resultado dice que si $f : X \rightarrow K$ es una función continua de un poliedro X al poliedro asociado a un complejo simplicial K , entonces existe una triangulación L de X y un *morfismo simplicial* $\varphi : L \rightarrow K$ que es homotópico a f . Un morfismo simplicial es una función del conjunto de vértices de L al conjunto de vértices de K que manda simplices en simplices. Si $\varphi : L \rightarrow K$ es un morfismo simplicial, tiene asociada una función continua entre los poliedros, que manda una combinación convexa de vértices de L en la misma combinación, reemplazando cada vértice por su imagen por φ . Es esta función continua la que resulta homotópica a f en el enunciado del teorema. La moraleja es que cualquier función continua entre poliedros, por más salvaje que sea, siempre es homotópica a una función combinatoria, muy sencilla, que puede describirse con información finita. Para más detalles sobre el teorema, ver [10].

Proposición 5. *Si K es un complejo simplicial que cumple la propiedad $c(4)$, entonces es simplemente conexo.*

Demostración. La propiedad $c(4)$ implica $c(2)$. Entonces cualesquiera dos vértices están conectados por un camino de longitud 2, lo que garantiza arcoconexión, como ya mencionamos.

Falta ver que toda función $\gamma : S^1 \rightarrow K$ es homotópica a una constante. Si γ es una tal función, el Teorema de aproximación simplicial nos garantiza que existe una triangulación S de S^1 y un morfismo simplicial $\varphi : S \rightarrow K$ que es homotópico a γ . Como S triangula a la circunferencia, no es más que un grafo que es un ciclo. Y el morfismo φ puede verse como un camino cerrado (quizá no inyectivo) en el grafo subyacente de K (el 1-esqueleto, formado por vértices y simplices de dimensión 1) (ver Figura 7).

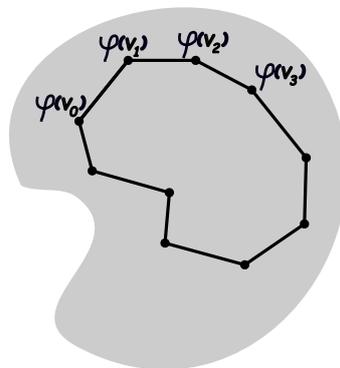


Figura 7: El lazo asociado a φ en el grafo de K .

Queremos ver que φ es homotópico a una constante. Si S tiene a lo sumo 4 vértices, entonces $c(4)$ garantiza que la imagen de φ está contenida en la base de un cono con ápice en algún vértice $w \in K$. Pero entonces φ es homotópica a la función constante w . Hay una homotopía que deforma la función continuamente hasta llegar al ápice del cono.

Si S es un ciclo v_0, v_1, \dots, v_{k-1} con $k \geq 5$ vértices, entonces $\varphi(v_0), \varphi(v_1), \dots, \varphi(v_{k-1})$ es un camino en el 1-esqueleto de K , que puede repetir vértices y aristas. Los símplexes $\varphi(v_0v_1), \varphi(v_1v_2), \varphi(v_2v_3)$ y sus vértices forman un subcomplejo L de K de a lo sumo 4 vértices (ver Figura 8).

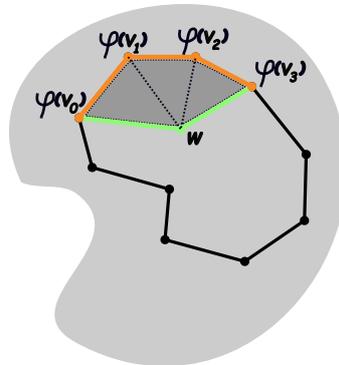


Figura 8: El subcomplejo L en naranja. Al reemplazar L por el camino verde, se obtienen lazos homotópicos, donde la homotopía usa los símplexes del cono wL .

La propiedad $c(4)$ dice que L está contenido en el link $\text{lk}(w)$ de un vértice $w \in K$. Usando el cono wL para definir una homotopía, uno puede probar que φ es homotópica al camino cerrado $\varphi(v_0), \varphi(w), \varphi(v_3), \varphi(v_4), \dots, \varphi(v_{k-1})$, que en realidad es un morfismo simplicial $\varphi' : S^1 \rightarrow K$ que sale de una triangulación S' de S^1 con $k - 1$ vértices. Por un argumento inductivo este nuevo camino es homotópico a una constante, y luego φ lo es. \square

Ahora sí, construido el puente entre combinatoria y topología, podemos entender qué ocurre asintóticamente con la simple conexión.

Teorema 6. *Supongamos que los parámetros de probabilidad están acotados inferiormente por cierto $a > 0$ independiente de la cantidad de vértices n . La probabilidad de que K sea simplemente conexo tiende a 1 cuando n tiende a infinito.*

La demostración es esencialmente la misma que para Proposición 3. En lugar de trabajar con el evento E , uno prueba que $c(4)$ ocurre con alta probabilidad. La probabilidad de que un subcomplejo específico L de K esté en el link de un vértice v concreto fuera de L está acotada inferiormente por una potencia de a , donde el exponente es la cantidad de símplexes de L más 1. La cantidad de símplexes de L es menor a 2^4 . Por otro lado, el número de complejos L de a lo sumo 4 vértices soportados en un conjunto de n vértices es a lo sumo $\binom{n}{4} 2^{2^4}$: elegimos los vértices y luego elegimos los símplexes que forman el complejo. En esta manera de contar hay repeticiones. El argumento concluye observando que

$$\binom{n}{4} 2^{2^4} (1 - a^{2^4})^{n-4}$$

tiende a 0 cuando n tiende a infinito.

Al intentar generalizar esta idea para estudiar k -conexión para $k \geq 2$, uno necesita hacer dos cosas. Por un lado es fácil ver que $c(r)$ ocurre con alta probabilidad, sin importar quién es r . El problema está en demostrar que para cada $k \geq 2$ existe $r \geq 0$ tal que $c(r)$ implica k -conexión.

Las triangulaciones de S^2 y esferas de dimensión mayor no son tan simples de describir como las de S^1 . Si bien el Teorema de aproximación simplicial está disponible para

cualquier dimensión, no es sencillo replicar el argumento inductivo de la demostración de la Proposición 5.

En [3], Even-Zohar, Farber y Mead probaron que $c(18)$ implica 2-conexión. En [1] demostramos que en realidad basta $c(8)$. Por otro lado, probamos que para todo k existe r tal que $c(r)$ garantiza k -conexión. Para ambos resultados trabajamos con triangulaciones muy específicas de las esferas, con aproximaciones simpliciales y con un argumento inductivo que sigue las ideas descritas en esta nota. En esencia, partiendo de cierta triangulación S de una esfera, obtenida por aproximación simplicial de una función $f : S^d \rightarrow K$ arbitraria, se encuentra un subcomplejo $D \leq S$ con a lo sumo r vértices que triangula a un disco D^d , y se reemplaza D por un cono sobre su borde ∂D . De esta manera se obtiene una triangulación S' de S^d con menos vértices que S . Se define un morfismo $S' \rightarrow K$ que coincide con el original fuera de D y en ∂D , y se extiende de ∂D a su cono usando $c(r)$. Este morfismo resulta homotópico a f , y se prosigue inductivamente. Esto es exactamente lo que hicimos en la demostración de la Proposición 5, en donde triangulaciones de D^1 con 4 vértices eran reemplazadas por triangulaciones de D^1 con 3 vértices.

Ilustramos esta estrategia en la siguiente prueba de que $c(8)$ implica 2-conexión. El primer complejo de la Figura 9 es una triangulación de S^2 . Está determinada por un parámetro de altura y otro de circunferencia. Estas triangulaciones son exhaustivas en el sentido de que cualquier función continua $S^2 \rightarrow K$ se puede aproximar por un morfismo simplicial desde una de estas. Esto ocurre esencialmente porque eligiendo altura y circunferencia y un homeomorfismo con S^2 , los símlices de estas triangulaciones se pueden hacer arbitrariamente pequeños.

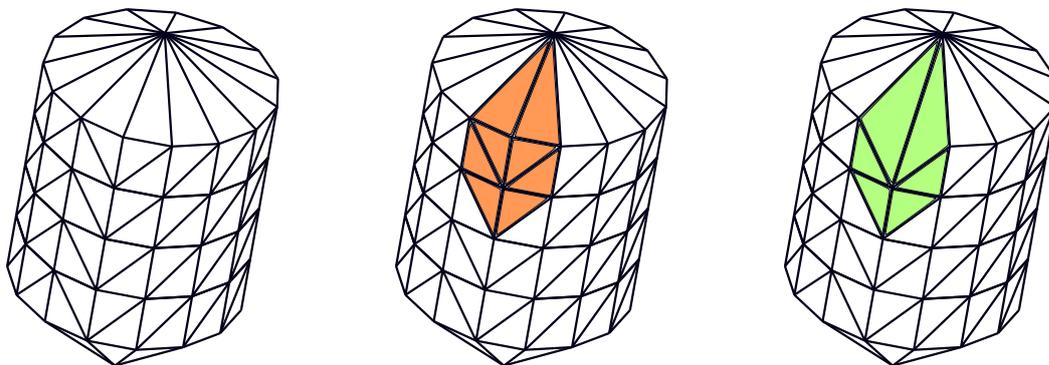


Figura 9: Una triangulación de S^2 y un reemplazo de un disco por otro con igual borde.

En naranja se ve un subcomplejo que triangula D^2 y tiene 8 vértices. En el tercer complejo, esta triangulación fue reemplazada por el cono sobre su borde.

En Figura la 10 continuamos con reemplazos similares, hasta obtener una triangulación de S^2 similar a la original, pero donde la altura disminuyó en 1. En Figura 11 vemos el final del camino, cuando la altura es 1. Podemos continuar con sustituciones del mismo tipo hasta llegar a la figura de abajo a la izquierda, la suspensión de un ciclo.

Desde allí podemos seguir, ahora reduciendo la circunferencia, hasta obtener un dodecaedro que tiene 8 vértices.

Este argumento y su generalización para $k \geq 0$, demuestran el siguiente resultado.

Teorema 7. *Sea $k \geq 0$. Supongamos que los parámetros de probabilidad están acotados inferiormente por cierto $a > 0$ independiente de n . La probabilidad de que K sea k -conexo tiende a 1 cuando n tiende a infinito.*

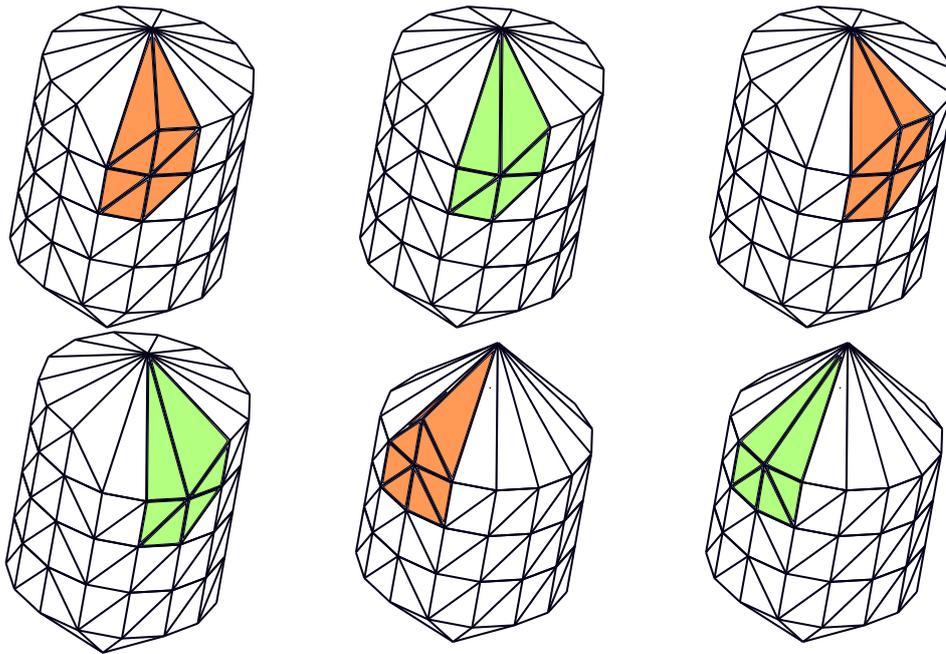


Figura 10: El proceso continúa hasta que la altura disminuye en 1.

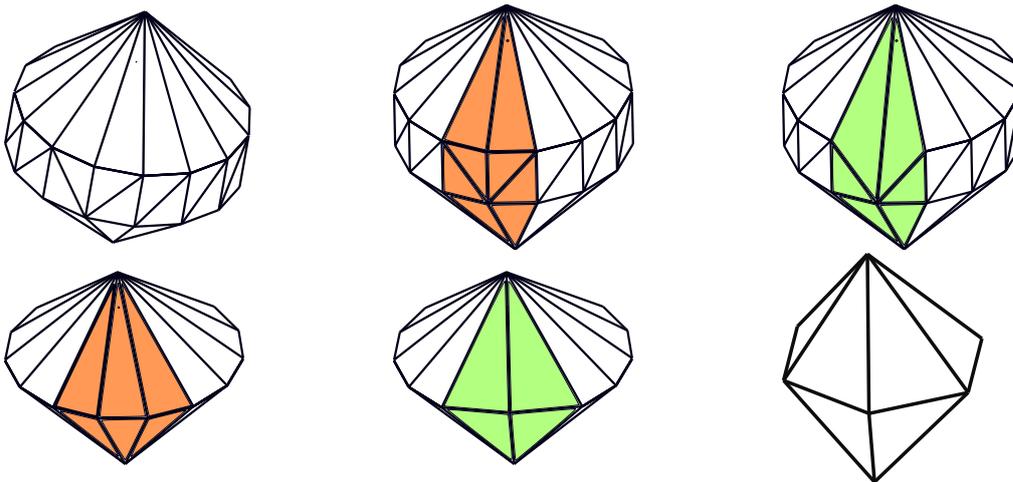


Figura 11: Desde altura 1 se llega a altura 0 y luego se reduce la circunferencia hasta obtener un complejo con 8 vértices o menos.

El teorema de Hurewicz dice que si un espacio es k -conexo, todos los grupos de homología reducida hasta grado k son triviales. Entonces nuestros resultados sobre conectividad homotópica aplican también a conectividad homológica.

En [4] hallamos un argumento alternativo para probar el Teorema 7, menos geométrico, basado en trabajos de Kahle, Meshulam [6, 7]. Éste usa el Lema del nervio, que compara la conectividad de un complejo con la de otro construido a partir de un cubrimiento del primero. Se deduce en particular que $c(6)$ implica 2-conexión. Es posible dar una demostración geométrico-combinatoria, del estilo de antes, usando una colección exhaustiva de triangulaciones de S^2 más ingeniosa que la de las figuras anteriores?

El camino iniciado en [4] permite obtener mejores resultados y cambiar la propiedad $c(r)$ por otra, para así estudiar otros invariantes desde una perspectiva asintótica. Estas nuevas aplicaciones son parte de un trabajo en progreso con Michael Farber.

Referencias

- [1] J.A. Barmak. *Connectivity of Ample, Conic, and Random Simplicial Complexes*. Int. Math. Res. Notices, 2022.
- [2] P. Erdős, A. Rényi. *Asymmetric graphs*. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. vol 14(1963), 295- 315.
- [3] C. Even-Zohar, M. Farber, L. Mead. *Ample simplicial complexes*. European J. of Math., 8(2022), 1-32.
- [4] M. Farber. *Large simplicial complexes: universality, randomness, and ampleness*. J Appl. and Comput. Topology (2023).
- [5] M. Farber, L. Mead. *Random simplicial complexes in the medial regime*. Topology Appl. 272(2020), 107065, 22 pp.
- [6] M. Kahle. *Topology of random clique complexes*. Discrete Math. 309(2009), pp. 1658-1671.
- [7] R. Meshulam. *The clique complex and hypergraph matching*. Combinatorica 21(2001), pp. 89-94.
- [8] P.S. Novikov. *On the algorithmic unsolvability of the word problem in group theory*. Trudy Mat. Inst. Steklov, 44 (1955); English transl, Amer. Math. Soc. Transl. (2) 9 (1958), 1-122
- [9] G. Perelman. *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, Ricci flow with surgery on three-manifolds, Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds*. arXiv:math.DG/0211159, arXiv:math.DG/0303109, arXiv:math.DG/0307245.
- [10] E.H. Spanier. *Algebraic Topology*. McGraw-Hill series in higher mathematics, 1989.
- [11] H. Toda. *Composition methods in homotopy groups of spheres*. Annals of Mathematics Studies, vol. 49, Princeton University Press 1962.