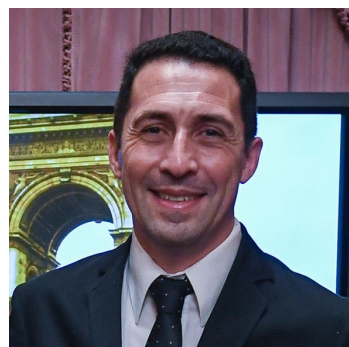


Competencia Interuniversitaria de Matemática Argentina

CIMA 2024 y pirámides de naranjas

Iván Angiono

FAMAF – Universidad Nacional de Córdoba,
CIEM–CONICET



Nuevo año, nueva CIMA. En el 2024 tuvimos la edición número 11 de esta competencia de problemas para estudiantes universitarios, cuyo nombre oficial es Competencia Interuniversitaria de Matemática Argentina. Se realizó el 28 de agosto y participaron más de 40 equipos (recordemos que se puede participar individualmente o en pareja) de distintas universidades del país. Como ya se mencionó en los anteriores artículos sobre la CIMA, la prueba pretende brindar un espacio donde los estudiantes piensen libremente problemas de distintos tópicos y, en caso que decidan participar en pareja, colaboren en equipos a la resolución de los mismos.

Para aquellos que ya tuvieron experiencias en olimpiadas en el secundario, la CIMA les permite rememorar esas pruebas, ahora ya con una mayor formación en matemática; para los que no lo hicieron, es un lugar distinto para pensar problemas, que normalmente no se tiene en el día a día de las carreras universitarias. Más allá de esas cinco horas de prueba, el momento más importante relacionado con la CIMA es el *después de la prueba*: seguir pensando los problemas, discutirlos ya con muchos otros participantes, otros compañeros que no participaron o incluso profesores. Por ejemplo, en Córdoba se suele organizar pocos días después de la prueba una reunión conjunta entre participantes y profesores para comentar algunas soluciones o distintas formas de encarar los problemas como así también pensar los problemas que no salieron. También ha motivado a investigar sobre temas que aparecieron en la prueba. En fin, discutir más matemática.

Uno de los puntos interesantes, que a la vez siempre se busca fortalecer desde la organización de la CIMA, es la condición *federal* de la prueba, tanto con respecto al lugar como a la carrera universitaria. Un sueño a alcanzar es el de tener representantes de todas las provincias, y de muchas carreras. La matemática está en todos lados, en todos los rincones y hasta en los lugares más remotos. En mi caso soy pampeano, hice la carrera de grado en

La Plata para luego continuar en Córdoba. Tuve la suerte de conocer la matemática a partir de las olimpiadas y tal vez por eso me preocupa tanto llevar este tipo de eventos a todos los lugares posibles.

El año pasado me tocó el regreso al jurado luego de 7 años. Con mucha alegría me sumé a las ediciones iniciales de la CIMA siguiendo el gran entusiasmo que tenían Leandro Cagliero y Juan Pablo Rossetti para *crear una continuación de la competencia Paenza*, y con la misma alegría retomé esta tarea.

Como muestra de la prueba del año 2024, les compartimos aquí uno de los problemas, el número 3, junto con la solución hecha por uno de los grupos de estudiantes durante la prueba. Invitamos a los lectores a leer y pensar todos los problemas de este año, que pueden encontrar en la [página web de la CIMA](#), y a los estudiantes universitarios a participar en la edición 2025, a realizarse en agosto.

Problema 3. Se considera el conjunto $\mathcal{A}$ de todos los números naturales de cinco cifras cuya representación decimal se obtiene permutando los dígitos 1, 2, 3, 4, 5. Probar que $\mathcal{A}$ puede partirse en dos subconjuntos de manera que la suma de los cuadrados de los números en cada uno de ellos sea la misma.

Les dejamos a continuación la solución realizada por el grupo 52378, conformado por Gianni De Rico y Brian Morris Esquivel (Universidad Nacional de Rosario).

Demostración. Un elemento de $\mathcal{A}$ es de la forma $\overline{abcde}$, donde la barra indica la concatenación de dígitos, y $\{a, b, c, d, e\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Notemos que

$$|\mathcal{A}| = 5! = 1200 = 12 \cdot 100.$$

Separaremos los elementos de $\mathcal{A}$ en 10 conjuntos de la siguiente forma:

$$\left\{ \begin{array}{cc} \overline{abcde} & \overline{abced} \\ \overline{bcade} & \overline{bcaed} \\ \overline{cabde} & \overline{cabed} \\ \overline{cbaed} & \overline{cbade} \\ \overline{baced} & \overline{bacde} \\ \overline{acbed} & \overline{acbde} \end{array} \right\},$$

donde cada conjunto se obtiene a partir de las $3! \cdot 2! = 12$ permutaciones de $\overline{abc}$ y $\overline{de}$ del número $\overline{abcde}$.

La diferencia de los cuadrados de los dos números de la primera línea es

$$\begin{aligned} \overline{abcde}^2 - \overline{abced}^2 &= (\overline{abcde} - \overline{abced})(\overline{abcde} + \overline{abced}) \\ &= (100\overline{abc} + 10d + e - 100\overline{abc} - 10e - d)(100\overline{abc} + 10d + e + 100\overline{abc} + 10e + d) \\ &= (9d - 9e)(200\overline{abc} + 11d + 11e) = 1800(d - e)\overline{abc} + 99(d - e)(d + e). \end{aligned}$$

Análogamente, las demás diferencias son:

$$\begin{aligned} \overline{bcade}^2 - \overline{bcaed}^2 &= 1800(d - e)\overline{bca} + 99(d - e)(d + e), \\ \overline{cabde}^2 - \overline{cabed}^2 &= 1800(d - e)\overline{cab} + 99(d - e)(d + e), \\ \overline{cbaed}^2 - \overline{cbade}^2 &= 1800(e - d)\overline{cba} + 99(e - d)(d + e), \\ \overline{baced}^2 - \overline{bacde}^2 &= 1800(e - d)\overline{bac} + 99(e - d)(d + e), \\ \overline{acbed}^2 - \overline{acbde}^2 &= 1800(e - d)\overline{acb} + 99(e - d)(d + e). \end{aligned}$$

Sumando todas, obtenemos que la diferencia entre la suma de los cuadrados de la primera columna con la suma de los cuadrados de la segunda columna es igual a

$$1800(d - e)(\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} - \overline{cba} - \overline{bac} - \overline{acb}) = 0,$$

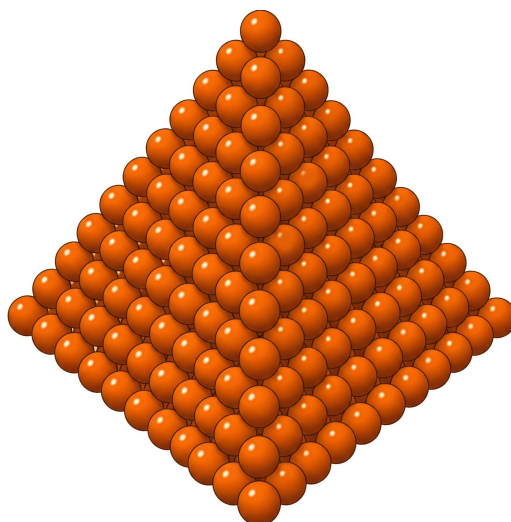
donde el último factor es 0 pues cada dígito aparece una vez sumando y una vez restado en cada una de las tres posiciones (centena, decena y unidad). Se sigue que la suma de los cuadrados de los números de la primera columna es igual a la suma de los cuadrados de los números de la segunda columna.

Eligiendo entonces el conjunto formado por los números de la primera columna de cada uno de los 10 subconjuntos por un lado, y el conjunto formado por los números de la segunda columna de cada uno de los 10 subconjuntos por el otro, tenemos la partición pedida. $\square$

¿Y las pirámides de naranjas? 2024 es suma de los primeros 10 números triangulares:

$$1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 + 45 + 55 + 66 + 78 + 91 + 105 + 120 + 136 + 153 + 171 + 190 + 210 + 231 + 253.$$

Por lo tanto podríamos hacer una pirámide tetraédrica de 22 pisos con 2024 naranjas:



Pueden animarse a completar este desafío. Y pueden visualizar la CIMA como una pirámide que lentamente, piso a piso, busca seguir creciendo para ayudar a desarrollar y fortalecer el pensamiento matemático en la Argentina.

Sobre el año en curso, ya sabemos que es un cuadrado perfecto, $2025 = 45^2$, y la suma de los primeros 9 cubos. Pero esas y otras cuestiones quedarán para un próximo artículo...

Agradecimientos. Quisiera agradecer a Juan Pablo Rossetti y Leandro Cagliero, ambos de la Universidad Nacional de Córdoba, por todo lo que han hecho por la prueba; en especial a Juan Pablo por motivarme a regresar al jurado, no es fácil reemplazar a alguien que había estado en todas las ediciones anteriores de la CIMA.

También, a los jurados del año pasado: Rocío Díaz Martín (Tufts University, Estados Unidos), Carlos Di Fiore (Universidad de Buenos Aires), Mauro Subils (Universidad Nacional de Rosario), Luis Ferroni (Institute for Advanced Study, Estados Unidos) y Martín Mereb (Universidad de Buenos Aires. Nuevamente hicieron un gran trabajo realizado y mi vuelta al jurado fue muy fácil por ustedes. Rocío y Mauro, ¡se los va a extrañar! Lo bueno es que tenemos dos grandes incorporaciones, Azul Fatalini (University of Leeds, Reino Unido) y Fiorela Rossi Bertone (Universidad Nacional del Sur), ¡bienvenidas!