Año 2025, Volumen 60, Número 1
ISSN 1514-9595 (en línea)

Noticiero de la Unión Matemática Argentina

María Silvia Etcheverry - Serie Tramas textiles
Pastel sobre papel - 35 x 45 cm - 2019

UNIÓN MATEMÁTICA ARGENTINA
FUNDADA EN 1936

Índice general

NOTICIERO

ISSN 1514-9595 (web)

Editorial

Hace casi un año publicamos el primer número del Noticiero en su nuevo formato. Aún recuerdo la ansiedad y emoción de ese día, esperando ver el resultado final de la diversidad de ideas que habíamos barajado junto con mis compañeros de equipo de ese momento: Silvia, Vicky y Emilio. La cálida respuesta de la comunidad matemática, junto con su enorme colaboración con artículos maravillosos y de excelente calidad, nos impulsó a seguir adelante con este proyecto.

Fue gracias a eso que durante el primer año logramos publicar los tres números que habíamos previsto: dos bajo este nuevo formato, y uno que recopila todo lo referido a la Reunión Anual de la UMA 2024, manteniendo la tradición del Noticiero. En ese último número del año 2024 no incluimos ninguna de las secciones del nuevo formato, por lo que incorporamos ahora los premios y distinciones recibidos por miembros de nuestra comunidad desde septiembre de 2024 hasta abril 2025.

En este nuevo número le damos la bienvenida a dos nuevos integrantes del comité: **Iván Angiono y Adrián Pastine.** Gracias por aceptar el trabajo de sostener este espacio. Con estas incorporaciones completamos la transición del comité “original”. Emilio dejó su espacio formal hace unos meses (pero no dejó de colaborar desde otro lugar), y ahora me toca a mí. Pensamos que seguir adelante con esta tarea, tan ardua como reconfortante, será posible si trabajamos siempre renovando energías y manteniendo la experiencia, involucrando a la mayor cantidad de personas, para que se apropien y encariñen con la idea. Creemos firmemente que mantener vivo este proyecto enriquece a la comunidad matemática argentina, a la que intentamos incluir y representar de forma integral en este nuevo formato (aunque no siempre lo logremos).

Esperamos que disfruten de este nuevo número tanto como lo hicimos nosotros.

Marilina Carena

ISSN 1514-9595 (web)

Desde la redacción

Esta sección reúne textos producidos por el equipo editorial del Noticiero. Son escritos que consideramos relevantes para compartir con nuestra comunidad.

Campaña de donaciones para paliar el desastre ocasionado por las inundaciones en la Universidad de Nacional del Sur

La ciudad de Bahía Blanca (Argentina) sufrió una grave inundación el pasado 7 de marzo de 2025. En tan solo 12 horas, cayó sobre la zona más de la mitad del promedio anual de lluvias.

La Universidad Nacional del Sur (UNS), la más grande de la ciudad, con alrededor de 28 000 estudiantes, se vio gravemente damnificada. Aunque afortunadamente, el departamento de Matemáticas no se vio afectado, ya que se encuentra en los pisos superiores del edificio, los daños sufridos por la Universidad como consecuencia de este evento climático fueron cuantiosos. Más de 70 000 libros de la Biblioteca Central resultaron trágicamente destruidos, junto con una cantidad significativa de equipamiento de laboratorio que resulta esencial para las labores de investigación y la educación de los estudiantes.

En respuesta a esta situación crítica, la UNS ha lanzado una campaña de donaciones para ayudar en su recuperación. Si deseas contribuir económicamente o difundir esta campaña entre tus contactos, puedes hacerlo a través del siguiente enlace:
`https://reconstruir.uns.edu.ar/`

Cualquier apoyo y contribución en este sentido será muy valorada.

¡Sumate!

Donaciones

Ir al índice general

RAICYT: una red que suma esfuerzos

RAICYT es la Red de Autoridades de Instituciones de Ciencia y Tecnología, conformada a comienzos de 2024. La integran más de 400 autoridades de organismos de Ciencia y Técnica de todo el país —entre ellos CONICET, universidades y otras instituciones científico-tecnológicas—. En esta red están representadas todas las áreas del conocimiento: desde las Ciencias Sociales y Humanidades, pasando por las Ciencias Agrarias, de la Ingeniería y de los Materiales, hasta las Ciencias Biológicas y de la Salud, y las Ciencias Exactas y Naturales.

Su formación respondió a la necesidad, reconocida por la comunidad científico-tecnológica y sus representantes, de sostener canales de diálogo permanentes, construir consensos y trabajar en un proyecto común para fortalecer el sistema nacional de Ciencia y Tecnología. Si bien este tipo de articulaciones suele surgir en contextos críticos, RAICYT ha demostrado ser más que una respuesta coyuntural. Desde su creación, se ha consolidado con el objetivo de promover, sostener y potenciar las capacidades del sistema científico argentino, con una mirada orientada tanto a la colaboración como a la competitividad a nivel global.

En RAICYT se realizan reuniones plenarias periódicas, en las que participan sus autoridades y se presenta un informe sobre la situación actual del sector que cada una representa. Durante estos encuentros, se informa sobre el trabajo de las cuatro comisiones que integran la red y se toman decisiones respecto de los pasos a seguir ante los distintos problemas detectados.

En este marco, RAICYT ha impulsado proyectos concretos, muchos de ellos acompañados de acciones legales, que contribuyeron a la adjudicación de becas doctorales, la efectivización de ingresos y promociones en la carrera de investigador del CONICET, y la defensa de los puestos de trabajo del personal administrativo en instituciones de investigación. Además, lanzó una campaña significativa para difundir la importancia y el reconocimiento internacional de la ciencia y la tecnología argentinas. Esta iniciativa recibió el respaldo de numerosas instituciones prestigiosas a nivel global y de 68 premios Nobel en Ciencias Físicas, Químicas, Económicas y de la Medicina.

La investigación, el desarrollo y la innovación son motores esenciales del crecimiento económico y de la prosperidad a largo plazo. RAICYT trabaja activamente para garantizar que el potencial transformador de las capacidades científicas y tecnológicas de Argentina pueda enriquecer y mejorar la vida de las personas, tanto en el país como en el mundo. Se trata de una red que se sostiene gracias al compromiso, la dedicación y el trabajo voluntario de muchas científicas y científicos, decididos a apuntalar, sostener y seguir consolidando un sistema nacional de ciencia y tecnología vigoroso, clave para el desarrollo de cualquier nación.

RAICYT no cuenta con financiamiento institucional y muchas de sus acciones requieren recursos para poder sostenerse. Para más información, pueden visitar sus redes:

NOTICIERO

ISSN 1514-9595 (web)

Miradas Matemáticas

El arte de medir la convergencia: oscilación y variación

Raquel Crescimbeni
Dpto. de Matemática-FaEA
Universidad Nacional del Comahue-IITCI (CONICET)

Resumen

En este breve trabajo se pretende mostrar algunos aspectos de los operadores oscilación y variación, sobre los cuales la autora ha tenido la oportunidad de trabajar junto a otros investigadores. En el trayecto recordar quienes fueron los pioneros en el estudio de este tema, la transversalidad de uso entre diferentes campos de la matemática, como así también la implicancia que tiene su estudio no sólo en el análisis de velocidad de convergencia de una familia de operadores, sino también en la convergencia puntual de la misma.

Introducción

Uno de los problemas mas estudiados dentro del análisis armónico es el siguiente: dada una familia $\{T_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ de operadores acotados actuando entre espacios funcionales, conocer el $\lim_{t\to 0} T_t f$ y el $\lim_{t\to\infty} T_t f$, para f en cierta clase de espacios funcionales.

Ejemplos de estas situaciones pueden encontrarse en estudios de convergencias de soluciones de la ecuación del calor y la de Poisson a su valor de borde. Más aún, si los operadores convergen, es natural preguntarse sobre la velocidad de convergencia de esta familia a su límite o también cuánta oscilación se produce cuando la familia se acerca al mismo.

Para precisar las ideas, sea (X, Σ, μ) un espacio de medida, consideremos (para simplificar) una cantidad numerable de operadores $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en $L^p(X)$. De esta familia podemos tomar las diferencias $|T_k f(x) - T_{k+1} f(x)|$ elevadas a alguna potencia $\rho > 0$, luego sumamos los términos resultantes y para preservar la homogeneidad tomamos la ρ-ésima raíz, de esta manera logramos el siguiente operador,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |T_k f(x) - T_{k+1} f(x)|^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}. \tag{1.1}$$

Sea la siguiente modificación de este operador: fijemos una sucesión n_k y analicemos cómo oscila la familia T_k a lo largo de esta sucesión, en otras palabras sean las diferencias $|T_{n_k}f(x) - T_{n_{k+1}}f(x)|$, a las que asociamos el siguiente operador

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |T_{n_k}f(x) - T_{n_{k+1}}f(x)|^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}. \tag{1.2}$$

Observemos que el operador (1.1) es un caso particular del operador (1.2) basta considerar $n_k = k$.

Para $\rho = 2$ estos operadores son un tipo de función cuadrado. Debemos resaltar que en muchas áreas del análisis, teoría ergódica y probabilidad, la función cuadrado es y ha sido una herramienta útil para estudiar velocidad de convergencia para familias de operadores. Su estudio se remonta a los años 30 del siglo pasado y los nombres de Littlewood y Paley están asociados a él. Un amplio y completo compilado asociado a la función cuadrado puede leerse en el ensayo escrito por E. Stein [23]. Por otro lado no debemos dejar de mencionar que la función cuadrado ha sido utilizada por Burkholder, Gundy y Silverstein en [10] para dar la primera caracterización real del espacio de Hardy H^p.

A la hora de estudiar y cuantificar cuánto oscila la sucesión de operadores, debemos notar que en la definición (1.2) es posible que no hayamos capturado toda la variación de la familia de operadores $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, ya que probablemente pudimos haber elegido una subsucesión en donde la convergencia sea bastante rápida. Es por ello que para el estudio sea mas preciso es necesario hacer una ajuste a nuestro operador y ello se logra tomando el supremo sobre todas las subsucesiones, lo que da origen a la definición de los operadores variación y oscilación que a continuación presentamos. Daremos las definiciones para una familia de operadores con parámetro continuo.

Definición 1. *Sea $\mathcal{T} = \{T_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ una familia de operadores, el operador ρ-variación para $\rho > 0$ se define como*

$$\mathcal{V}_{\rho}(\mathcal{T})f(x) = \sup_{t_i \searrow 0}\left(\sum_{i=1}^{\infty} |T_{t_i}\, f(x) - T_{t_{i+1}}\, f(x)|^{\rho}\right)^{1/\rho} = ||T_t f(x)||_{\mathcal{V}_{\rho}},$$

donde el supremo es tomado sobre todas las sucesiones $\{t_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ que decrecen a cero.

Definición 2. *Sea $\mathcal{T} = \{T_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ una familia de operadores, el operador oscilación puede ser considerado como*

$$\mathcal{O}(\mathcal{T})f(x) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sup_{t_{i+1}<\delta_i\leq t_i} |T_{t_{i+1}}\, f(x) - T_{\delta_i}\, f(x)|^2\right)^{1/2} = ||T_t f(x)||_{\mathcal{O}},$$

para $\{t_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión fija decreciendo a cero.

Si los operadores $\{T_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ a considerar provienen de truncaciones en otro extremo que no sea el cero, es posible argumentar siempre como en el caso de truncaciones cerca del cero, ya que podemos controlar las truncaciones en ambas direcciones por una suma de operadores, cada uno de los cuales controla la truncación sólo en un extremo.

El operador de oscilación y la ρ-variación de una familia de operadores son conceptos claves en el análisis funcional y la teoría de operadores, especialmente en el estudio de la regularidad y la convergencia de familias de operadores en espacios de Banach. En teoría ergódica y procesos estocásticos para controlar la variación de procesos de Markov y trayectorias de sistemas dinámicos. En ecuaciones diferenciales y cálculo fraccionario para analizar la regularidad de soluciones estudiando el control de sus variaciones.

1. Algunos antecedentes

Múltiples referencias pueden darse sobre quienes iniciaron el estudio de estos operadores. Recordaremos algunas de ellas, y por supuesto todas las referencias relacionadas con el tema que se encuentran en los artículos que mencionaremos a lo largo de todo este trabajo.

El primero en probar acotación en $L^2(X)$ del operador oscilación, ha sido Gaposhkin en [15], trabajando sobre una familia de promedios ergódicos (ver 3), que en lugar de mover los índices sobre los naturales considera una sucesión n_k de naturales que es de tipo lacunary, es decir tiene algún control en su crecimiento. Posteriormente Bourgain en [7], trabajó con maximales ergódicas más generales y sucesiones lacunary, probando también la acotación en $L^2(X)$. Usando modificaciones de las técnicas de Bourgain ha sido White [24] quien mejora estos resultados, al considerar una familia mas amplia de sucesiones.

Como pionero en introducir el operador variación, podemos citar a Bourgain [8], que en su estudio sobre martingalas (ver 3) obtiene acotaciones en $L^2(X)$ para la ρ-variación y no menos importante es que como corolario de este resultado logra la acotación en $L^2(X)$ del semigrupo de Poisson clásico, ya que lo analiza como una martingala, generando así uno de los primeros puentes entre análisis armónico y la teoría de probabilidad.

Previo a los trabajos que Bourgain realizó para martingalas, Burkholder en el año 1973 en [9], prueba resultados de acotación de la función cuadrado. Las pruebas y comentarios de Burkholder permitieron a John et al en [19] demostrar resultados de acotación del operador ρ-variación asociada a promedios ergódicos y martingalas.

Según se puede leer en algunos trabajos, quien reconoce y comenta entre sus colegas, que el operador ρ-variación para $\rho = 2$ tiene mal comportamiento ha sido Burkholder. No debemos dejar de comentar que también Bourgain reconoce que en el caso de martingalas para $\rho = 2$ la variación no está acotada en $L^2(X)$. En los trabajos [1] y [11] los autores proporcionan múltiples ejemplos, en distintos contextos, donde dan cuenta del mal comportamiento que tiene la variación para $\rho \leq 2$. Por lo tanto es usual considerar la variación sólo para los casos en que $\rho > 2$. En este sentido ha sido P. Jones quien dice que el caso $\rho = 2$ de la variación puede ser reemplazado con el estudio de la oscilación, que es un operador más chico que la 2-variación.

2. Propiedades elementales

En estas notas, daremos consignas sencillas para obtener algunas propiedades interesantes de estos operadores y que hacen relevante su estudio en la teoría de convergencia de operadores.

En primer lugar no es difícil ver que ambos operadores definen seminormas sobre la familia de operadores $\mathcal{T} = \{T_t\}_{t\in\mathbb{R}}$.

Como primera observación debemos remarcar que en la definición de la ρ-variación se está considerando supremos sobre una gran familia de sucesiones y por lo tanto no resulta evidente que defina una función medible. Así que se opera de la siguiente manera, primero se restringe la familia de sucesiones a un conjunto finito, se prueba que las desigualdades en norma son independientes de este conjunto y luego se amplía el conjunto, obteniendo los resultados cuando t_i pertenece a un conjunto denso numerable, los resultados finales siguen por propiedades de continuidad de los operadores involucrados.

Una pregunta natural que surge es: cuál es la relación que hay entre los operadores variación y oscilación y cómo se comporta la variación a medida que modificamos el parámetro ρ. La siguiente propiedad proporciona una respuesta a estos interrogantes.

Propiedad 1. *Si* $1 \leq \rho \leq \alpha < \infty$ *luego para cualquier familia de operadores* $\mathcal{T} = \{T_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ *y cualquier* f *se tiene que* $||T_t\, f(x)||_{\mathcal{V}_\alpha} \leq ||T_t\, f(x)||_{\mathcal{V}_\rho}$, *y* $||T_t\, f(x)||_{\mathcal{O}} \leq ||T_t\, f(x)||_{\mathcal{V}_2}$.

La primera desigualdad sigue simplemente por resultados de inclusión entre los espacios de Lebesgue discretos l_p. En referencia a la última desigualdad el lado derecho es mucho más grande, el siguiente ejemplo discreto lo muestra claramente. Sea n_k una sucesión fija, consideremos la sucesión numérica $x_n = 1$ para $n_{k-1} \leq n < n_k$ y con k par y $x_n = 0$ para $n_{k-1} \leq n < n_k$ y con k impar. No es difícil ver que $||x_n||_O = 0$ pero $||x_n||_{\mathcal{V}_2} = \infty$.

Observaciones:

- El resultado anterior nos conduce a preguntarnos cuál es el más chico valor de ρ para el cual la ρ-variación es finita. Pero como hemos mencionado anteriomente, en el rango $0 < \rho \leq 2$ la variación tiene mal comportamiento, por lo tanto se considera el operador ρ-variación para el rango $\rho > 2$.

- En general uno no puede concluir resultados de convergencia de la familia de operadores conociendo acotaciones de funciones tipo cuadrado como (1.1) para $\rho = 2$. Este es uno de los motivos por los cuales se estudian estos operadores un poco mas complicados. Es posible mostrar la existencia de una sucesión de operadores y una función en L^2 para los cuales la sucesión $T_k f$ no converge, sin embargo para una sucesión fija la función cuadrado es un operador acotado en L^2 (ver ejemplo en [19]). Muy por el contrario es posible probar que la finitud de la ρ-variación en un punto proporciona convergencia de la sucesión de operadores en ese punto expresado en la siguiente propiedad.

Propiedad 2. *Si para algún* $\rho < \infty$ *tenemos que* $\mathcal{V}_\rho(\mathcal{T})f(x) < \infty$ *en un punto* x *luego* $T_k f(x)$ *converge en* x *cuando* $k \to \infty$.

Esta interesante propiedad someramente se puede ver de la siguiente manera: suponiendo que la convergencia no es cierta, luego existe $\epsilon > 0$ tal que $\limsup T_k f(x) - \liminf T_k f(x) > \epsilon$. Así construimos una sucesión $\{n_k\}$ para la cual la variación sea infinita como sigue. Seleccionamos n_1 tal que $T_{n_1} f(x)$ este cerca de $\limsup T_k f(x)$, es decir tal que $|\limsup T_k f(x) - T_{n_1} f(x)| < \frac{\epsilon}{4}$. Luego elegimos $n_2 > n_1$ tal que $|\liminf T_k f(x) - T_{n_2} f(x)| < \frac{\epsilon}{4}$. Siguiendo sea $n_3 > n_2$ tal que $T_{n_3} f(x)$ esté cerca de $\limsup T_k f(x)$ y de esta manera construimos la sucesión, $|T_{n_k} f(x) - T_{n_{k+1}} f(x)| > \frac{\epsilon}{2}$ para cada $k \geq 1$. De este modo $\mathcal{V}_\rho(\mathcal{T})f(x) \geq (\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{\epsilon}{2})^\rho)^{\frac{1}{\rho}} = \infty$.

Observaciones:

- Esta propiedad nos permite poner en valor el estudio de acotación en espacios de Lebesgue de la ρ-variación por su estrecha relación con la convergencia puntual de la familia de operadores involucrados.

- La recíproca de la propiedad anterior puede no ser cierta. Es posible definir una sucesión de operadores convergente para toda $f \in L^p$ tal que los operadores oscilación y variación de esta familia sean puntualmente infinitos. En efecto sean los operadores $T_k f(x) = \frac{(-1)^k}{\ln k} f(x)$. Es claro que $T_k f(x) \to 0$ en casi todo punto para toda $f \in L^p$, con $1 \leq p \leq \infty$. Sin embargo para $\rho > 0$ el operador ρ-variación y oscilación es infinito si $f(x) \neq 0$, pues $|T_k f(x) - T_{k+1} f(x)| \simeq \frac{2}{\ln k} |f(x)|$ (acá $n_k = k$ para

$k = 1, 2, ...$). Elevando a la potencia ρ y sumando, vemos que en cualquier punto x en donde $f(x) \neq 0$ se tiene que $\mathcal{V}_\rho(\mathcal{T})f(x) = \infty$, para cualquier $0 < \rho < \infty$.

En el estudio de las acotaciones puntuales de una familia de operadores es bien sabido que el trabajo sobre el operador maximal es una herramienta usual a considerar. El siguiente resultado muestra que el operador ρ-variación controla el operador maximal.

Propiedad 3. *El operador ρ-variación acota puntualmente al operador maximal $T^*f(x) = \sup_k |T_k f(x)|$.*

Esta propiedad surge de considerar $n(x)$ tal que $|T^*f(x)| < 2|T_{n(x)}f(x)|$, así

$$\begin{aligned} |T^*f(x)| &< 2|T_{n(x)}f(x) - T_1 f(x) + T_1 f(x)| \\ &\leq 2|T_{n(x)}f(x) - T_1 f(x)| + 2|T_1 f(x)|, \end{aligned}$$

de esta manera si seleccionamos una sucesión n_k tal que $n_1 = 1$ y $n_2 = n(x)$ obtenemos que $|T_{n(x)}f(x) - T_1 f(x)|$ es uno de los términos de la suma en la definición de la ρ-variación. Por lo tanto $|T^*f(x)| \leq 2\mathcal{V}_\rho(\mathcal{T})f(x) + 2|T_1 f(x)|$.

Como ha sido resaltado, si la familia de operadores es convergente, la variación y oscilación aportan información sobre cómo es la comportamiento de la familia de operadores en su convergencia. En [19], [18] los autores han estudiado además la amplitud de los saltos que tiene la familia de operadores, más particularmente han definido el siguiente operador, para $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \Lambda(T_t, f, \lambda, x) = \sup\{n > 0 \ : \ &\text{existe } \ t_1 < s_1 \leq t_2 < s_2 \ldots \leq s_n < t_n, \\ &\text{tal que } \ |T_{t_i}f(x) - T_{s_i}f(x)| > \lambda, \ \ i = 1, \ldots, n\}, \end{aligned}$$

denominado operador salto. Este operador mide el número de λ-saltos que da la familia $T_t f$. Claramente, si la familia es convergente el número de λ-saltos debe ser finita en casi todo punto. El tamaño de este operador nos da información acerca de cómo la familia $T_t f$ converge.

Propiedad 4. *Si para cada elección de $\lambda > 0$, el operador λ-salto es finito en casi todo punto luego la familia de operadores $T_t f$ converge en casi todo punto.*

Esta propiedad sigue ya que la finitud del operador λ-salto implica que para cualquier λ dado, los términos de la sucesión $T_t f(x)$ pueden diferir en más que λ sólo un número finito de veces. Luego la convergencia sale usando el criterio de Cauchy.

Propiedad 5. *El operador λ-salto esta controlado por el operator ρ-variación, mas concretamente*

$$\Lambda(T_t, f, \lambda, x)^{\frac{1}{\rho}} \leq \frac{1}{\lambda}\mathcal{V}_\rho(\mathcal{T})f(x). \tag{1.3}$$

Esta acotación resulta observando que si consideramos la sucesión $s_1, t_1.s_2, t_2, \ldots, s_n, t_n$ de la definición del operador λ-salto como una parte de la sucesión n_k que se toma para definir el operador ρ-variación, luego cada término de la suma asociada con esta parte está acotada por arriba por λ y tenemos al menos $\Lambda(T_t, f, \lambda, x)$ de dichos términos.

3. Familia de operadores

Anteriormente hemos hecho referencia a diferentes familias de operadores como promedios ergódicos y martingalas. Estos serán algunos de los ejemplos estudiados en la bibliografía y que a continuación mencionamos y los resultados conocidos sobre ellas en referencia a la oscilación y ρ-variación.

Martingalas

Sea (X, Σ, μ) un espacio de probabilidad. Para facilitar la escritura daremos la definición diádica de esta familia de operadores. Para $f \in L^1(X)$, consideremos la familia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de promedios sobre intervalos diádicos definidos como sigue,

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(2^n \int_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} f(t)\, dt \right) \chi_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})}(x), \tag{1.4}$$

conocida como la martingala diádica. Si tomamos $\mathcal{T} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, el operador ρ-variación $\mathcal{V}_\rho(\mathcal{T})$ es acotado en $L^p(X)$ para $\rho > 2$ y también es acotado de $L^1(X)$ en el espacio $L^1(X)$-débil. Como referencias en donde encontrar sus demostraciones podemos citar [21] [18], en donde la descomposición de Calderón-Zygmund adaptada a este contexto es central.

Las martingalas, debemos resaltar, son la clave para demostrar resultados sobre la ρ-variación para familias de operadores que parecen no tener ninguna relación con ellas.

Promedios ergódicos

Sea (X, Σ, μ) un espacio de probabilidad y $\tau : X \to X$ una transformación medible, invertible y que preserva la medida. Para $f : X \to \mathbb{R}$ consideremos los promedios ergódicos,

$$A_n f(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(\tau^j f)(x). \tag{1.5}$$

Si tomamos $\mathcal{T} = \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, en [19] los autores prueban que los operadores oscilación $\mathcal{O}(\mathcal{T})$ y ρ-variación $\mathcal{V}_\rho(\mathcal{T})$ son acotados en $L^p(X)$ para $1 < p < \infty$ y en los extremos prueban que mapea $L^1(X)$ en el espacio $L^1(X)$-débil y en el otro extremo mapean $L^\infty(X)$ en BMO.

Los resultados en este trabajo han sido motivados por acotaciones similares para el caso de martingalas. La herramienta central es establecer la conexión entre martingalas y promedios ergódicos y el operador de diferenciación es el que permite este nexo.

Integrales singulares

El estudio de las integrales singulares se encuentra estrechamente ligado al estudio de las ecuaciones diferenciales y es uno de los operadores más importantes del análisis armónico. Las truncaciones de la transformada de Hilbert generan una familia de operadores como sigue

$$H_\epsilon f(x) = \int_{|x-y|>\epsilon} \frac{f(y)}{x-y} dy.$$

En el trabajo [11] los autores obtienen, haciendo uso de los resultados de Bourgain, la acotación en $L^p(\mathbb{R})$ para $1 < p < \infty$ y la acotación débil en el extremo $p = 1$, para los operadores oscilación y ρ-variación asociados a esta familia $\{H_\epsilon\}_{\epsilon>0}$.

En el caso n-dimensional fueron los mismos autores quienes en ([12]) extienden resultados de acotación a truncaciones de integrales singulares. Concretamente la familia de operadores será la siguiente: para un intervalo $I \subset (0, \infty)$, se considera el anillo $A_I = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \in I\}$. un núcleo que satisface las condiciones de tamaño y regularidad conocidas en la teoría de integrales singulares, y también otras condiciones sobre la cáscara de la esfera n-dimensional, para mayor precisión ver ([12]). Consideran las truncaciones definidas de manera formal como

$$K_I f(x) = \int_{A_I} K(y) f(x-y) dy.$$

$\mathcal{K} = \{K_{I_i}\}$ donde I_i generan una partición del $(0, \infty)$. El objetivo es estudiar acotaciones de la variación $\mathcal{V}_\rho(\mathcal{K})$ y la oscilación $\mathcal{O}(\mathcal{K})$ para esta familia de operadores. La clave radica en dividir el núcleo en dos partes, en una de ellas la analizan haciendo uso de desigualdades a valores vectoriales y en la otra transfieren los resultados conocidos en una dimensión. En el caso de la acotación débil la herramienta principal es la descomposición de Calderón-Zygmund.

En cuanto a acotaciones en espacios de Lebesgue con pesos quienes primero trabajaron sobre estos operadores, en el caso euclídeo e independiente de la dimensión fueron Gillespie y Torrea en [16] donde obtienen acotación en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 < p < \infty$ con pesos potencia, haciendo uso nuevamente de desigualdades a valores vectoriales.

Resultados para pesos más generales fueron analizados en [22]. En este trabajo prueban que los operadores ρ-variación y oscilación son acotados en $L^p(w)$ para $1 < p < \infty$ y poseen acotación débil con pesos si $p = 1$, cuando el peso w pertenece a la clase de Muckenhoupt A_p, para $1 \leq p < \infty$. Si la integral singular es la transformada de Hilbert, similares resultados con pesos A_p fueron previamente obtenidos en [14].

Semigrupos de operadores

Las integrales singulares pueden pensarse como operadores en un contexto más general de semigrupos.

De manera formal dado (X, Σ, μ) un espacio de medida. Una familia $\{T_t\}_{t \geq 0}$ de operadores, que satisfacen $T_t T_s = T_{s+t}$ y $T_0 = I$, T_t son continuos en el sentido que $\lim_{t \to 0} T_t f = f$ en $L^2(X)$, son operadores acotados en $L^p(X)$, autoadjuntos en $L^2(X)$ es llamada un semigrupo.

En [20], los autores obtienen resultados de acotación fuerte en $L^p(X)$ para los operadores oscilación y ρ-variación asociados a esta familia cuando el semigrupo satisface además que $T_t(1) = 1$. Estos semigrupos son llamados semigrupos de difusión simétricos.

Múltiples estudios de acotación de los operadores oscilación y ρ-variación, para familias asociadas a semigrupos han sido estudiadas en los últimos años, tanto sea para semigrupos de difusión simétricos como otros que no lo son. Cada semigrupo proviene de un particular operador diferencial como es el caso de los operadores de Laplace, Hermite, Ornstein-Uhlenbeck, Laguerre, Schrodinger, Bessel entre otros. Para cada operador diferencial podemos asociar el semigrupo del calor, el semigrupo de Poisson, integrales singulares, potenciales de Riesz, etc y por lo tanto resulta de interés analizar su acotación y la de los operadores oscilación y ρ-variación cuando se tiene una familia monoparamétrica de operadores.

Entre los artículos que estudian acotaciones de la ρ-variación y la oscilación para diferentes familias asociadas a estos semigrupos podemos citar [2], [4], [3], [5], [6] [13], [14], [17] y las referencias dentro de ellas.

Para cada contexto las técnicas de trabajo varían, no obstante los resultados clásicos del análisis armónico están siempre presentes. En las citas dadas previamente se pueden ver las herramientas utilizadas para cada uno de los semigrupos. Algunas de ellas siguen las ideas de los trabajos que las preceden y en otras realizan nuevos e interesantes aportes, ampliando así la mochila de herramientas de trabajo que todos llevamos a la hora de iniciar un nuevo estudio.

Para finalizar y de manera personal quiero comentar que he tenido el placer de trabajar y aprender sobre estos tema con varios de los investigadores mencionados anteriormente, en especial con José Luis Torrea y Jorge Betancor a quienes agradezco las enseñanzas recibidas en todos esos años de trabajo conjunto.

Quiero agradecer también a Victoria Paternostro por invitarme a participar en esta sección del Noticiero de la UMA con esta pequeña contribución y también a Luis Nowak por leer el preliminar y aportar ideas.

Referencias

[1] M. Akcoglu, R. L. Jones, and P. Schwartz, *Variation in probability, ergodic theory and analysis*, Illinois J. Math. 42 (1998), 154-177.

[2] V. Almeida, J. J. Betancor, J. C. Fariña, L. Rodriguez-Mesa, *Variation and oscillation operators on weighted Morrey-Campanato spaces in the Schrödinger setting*, Rev. de la UMA, Vol. 66, No. 1, (2023), 1-34

[3] J.J. Betancor, R. Crescimbeni and J.L. Torrea, *The ρ-variation of the heat semigroup in the Hermite setting. Behaviour in L^∞,* Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (serie 2) Vol. 54, Issue 03 (2011) 569-585.

[4] J.J. Betancor, R. Crescimbeni and J.L. Torrea, *Oscillation and variation of the Laguerre heat and Poisson semigroups and of the Riesz transforms*, Acta Mathematica Scientia Vol 32 Issue 3, (2012) 907-928.

[5] J.J. Betancor, E. D. Dalmasso, P. Quijano, *Variation operators associated with semigroups generated by Hardy operators involving fractional Laplacians in a half space*, arXiv:2310.03540v2.(2023).

[6] J.J. Betancor, J.C. Fariña, E. Harboure and L. Rodriguez Mesa, *L^p-boundedness properties of variation operators in the Schrödinger setting*, Rev. Math. Complut. (2013) 26, 485-534.

[7] J. Bourgain. *On the maximal ergodic theorem for certain subsets of the positive integers.* Israel J. Math. 61 (1988), 39-72.

[8] J. Bourgain. *Pointwise ergodic theorems for arithmetic sets.* Publications Mathematiques, Institut des Hautes Etudes Scientifiques 69 (1989), 5-45.

[9] D. L. Burkholder. *Distribution function inequalities for martingales* . Ann. Prob. 1 (1973), 19-42.

[10] D. L. Burkholder, R. F. Gundy and M. L. Silverstein, *Maximal Function Characterization of the Class H^p*, Transactions of the AMS, Vol. 157 (Jun., 1971), pp. 137-153

[11] J. Campbell, R. Jones, K. Reinhold, and M. Wierdl, *Oscillation and Variation for the Hilbert Transform*, Duke Math. J. 105 (2000), 59-83.

[12] J. Campbell, R. Jones, K. Reinhold, and M. Wierdl, *Oscillation and variation for singular integral in higher dimensions*, Transactions of the AMS Volume 355, Number 5, (2002) 2115-2137.

[13] R. Crescimbeni, R. A. Macías, T. Menárguez, J. L. Torrea and B. Viviani, *The ρ-variation as an operator between maximal operator and singular integrals*, J. Evol. Equ. 9 (2009), 81-102.

[14] R. Crescimbeni, F. J. Martín Reyes, A. de la Torre, J. L. Torrea, *The ρ-variation of the Hermitian Riesz Transform*, Acta Mathematica Sinica, English Series, (2010), Vol. 26, No. 10, pp. 1827-1838.

[15] V. F. Gaposhkin. *Individual ergodic theorem for normal operators on L^2*. Funct. Anal. Appl. 15 (1981), 14-18.

[16] T.A. Gillespie and J.L. Torrea, *Dimension free estimates for the oscillation of Riesz transforms*, Israel J. Math. 141 (2004), 125-144.

[17] E. Harboure, R. A. Macías, M. T. Menárguez and J. L. Torrea, *Oscillation and variation for the Gaussian Riesz transforms and Poisson integral*, Proc. Royal Soc. Edinburgh, 135 (2005), 85-104.

[18] R. Jones, *Variation inequalities for singular integrals and related operators* , Contemporary Mathematics Volume 411, (2006), 89-121.

[19] R. Jones, R. Kaufmann, J. Rosenblatt, and M.Wierdl, *Oscillation in ergodic theory,* Ergodic Theory Dynam. Systems 18 (1998), 889-935.

[20] R. Jones and K. Reinhold, *Oscillation and variation inequalities for convolution powers*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. (2001), 21, 1809?1829.

[21] D. Lepingle, *La variation d'order p des semi-martingales*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 36 (1976), 295-316.

[22] T. Ma, J. L. Torrea and Q. Xu, *Weighted variation inequalities for differential operators and singular integrals in higher dimensions*, Science China Mathematics, 60(8), (2017) 1419-1442.

[23] E. M. Stein.*The development of square functions in the work of A. Zygmund*, Bulletin (New Series) of the AMS, Volume 7, Number 2, (1982)

[24] H. White, *The pointwise ergodic theorem and related analytic inequalities,* Master's Thesis, University of North Carolina, Chapel Hill, NC, (1989).

NOTICIERO

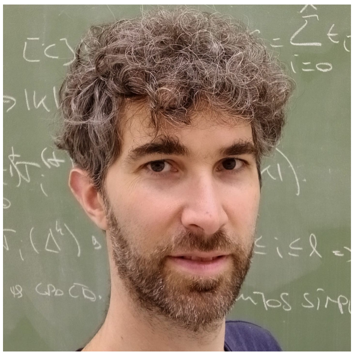
ISSN 1514-9595 (web)

Miradas Matemáticas

Agujeros en poliedros aleatorios. Combinatoria, Topología y Probabilidad

Jonathan A. Barmak

FCEyN, Universidad de Buenos Aires - IMAS-CONICET



Resumen

Veremos cómo usar ideas combinatorias para probar que ciertos poliedros no tienen agujeros (grupos de homotopía) en determinadas dimensiones. En particular estudiaremos el comportamiento de complejos simpliciales aleatorios cuando la cantidad de vértices tiende a infinito.

1. Grupos de homotopía y poliedros

Un problema muy general y ubicuo en Matemática es el de reconocer cuándo dos objetos son iguales: el número racional $\frac{1}{2}$ coincide con $\frac{2}{4}$; el grupo $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_6$. Según el contexto y la manera en la que se describen los objetos, este problema puede ser extremadamente complicado. En Topología los objetos suelen ser espacios topológicos (pueden ser variantes o cosas muy distintas también). Y la palabra *iguales* puede tomar distintas formas: se puede referir a iguales salvo homeomorfismo, salvo homeomorfismo que preserve cierta estructura, salvo equivalencia homotópica, y otras. Dos espacios son homotópicamente equivalentes si podemos deformar continuamente uno en el otro. Los problemas asociados son muy difíciles, incluso en casos muy particulares. La conjetura de Poincaré, por ejemplo, dice toda variedad topológica M de dimensión 3 cerrada simplemente conexa, debe ser homeomorfa a la esfera S^3 de dimensión 3. Este problema fue planteado en 1904 y tardó casi 100 años en resolverse afirmativamente (Perelman, Hamilton y otros [9]). En parte la Topología algebraica busca estudiar invariantes algebraicos de espacios (o funciones u otros objetos) para comprenderlos parcialmente. Algunos son invariantes por homeomorfismo, otros por equivalencia homotópica u otro tipo de deformaciones. Si dos espacios tienen invariantes no isomorfos, entonces son distintos, en uno u otro sentido. Dentro de los invariantes más conocidos están los grupos de homología, los grupos de cohomología y los grupos de homotopía. Los tres son distintas maneras de medir agujeros. El grupo fundamental π_1 es el primer grupo de homotopía.

Ejemplo 1. El disco D^2 de dimensión 2 y la esfera S^1 de dimensión 1 tienen grupos fundamentales no isomorfos, y por lo tanto son espacios no homeomorfos (cosa que es fácil de ver por otros medios), y, más aún, no tienen el mismo tipo homotópico.

Si X es un espacio, $\pi_1(X)$ se puede describir como el conjunto de lazos en X salvo homotopía. Un lazo es simplemente una función continua $\gamma : S^1 \to X$, y lazos $\gamma, \omega : S^1 \to X$ son homotópicos si existe una homotopía entre ellos, es decir una función continua $H : S^1 \times [0,1] \to X$ que cumple $H(s,0) = \gamma(s)$ y $H(s,1) = \omega(s)$ para todo $s \in S^1$. Una homotopía no es otra cosa que una deformación continua entre los lazos γ y ω, donde a tiempo $t \in [0,1]$ tenemos un lazo $H(-,t)$. Rigurosamente hay un punto base $x_0 \in X$, los lazos deben comenzar y terminar en x_0 (es decir que $\gamma : S^1 \to X$ manda un punto distinguido $s_0 \in S^1$ a x_0) y las homotopías deben cumplir que cada lazo $H(-,t)$ también empieza y termina en x_0 (ver Figura 1). Además, el conjunto $\pi_1(X)$ recién descripto tiene una estructura de grupo. Uno puede concatenar lazos que empiezan y terminan en $x_0 \in X$. El neutro del grupo está dado por la clase del lazo constante, y el inverso de la clase de un lazo, por la clase del lazo recorrido en dirección opuesta. Si bien $\pi_1(X)$ depende del punto base x_0 elegido, para espacios arcoconexos cualesquiera dos puntos dan grupos isomorfos.

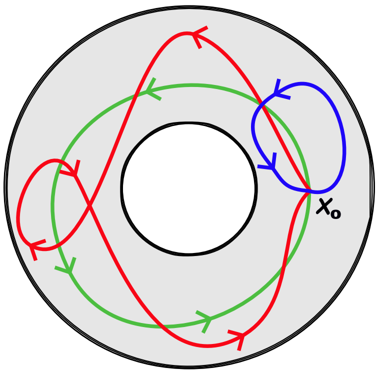


Figura 1: En el espacio X coloreado con gris, el lazo rojo y el verde representan el mismo elemento en $\pi_1(X)$, mientras que el lazo azul representa otro: el neutro del grupo .

Un espacio X se dice 1-conexo, o simplemente conexo, si es arcoconexo y no tiene agujeros de dimensión 1, es decir si $\pi_1(X) = 0$. Esto equivale a que X se arcoconexo y que todo lazo $\gamma : S^1 \to X$ sea homotópico a una constante. En esta afirmación podemos prescindir de los puntos base y las homotopías son libres (tampoco deben preservar puntos base).

Los grupos de homotopía de orden superior se definen de manera similar: dado $k \geq 1$, el grupo $\pi_k(X)$ tiene como elementos a las clases homotópicas de funciones continuas $S^k \to X$, y un producto que generaliza la idea de concatenación.

Ejemplo 2. El disco D^k tiene $\pi_k(D^k)$ trivial, mientras que S^k no, porque la función identidad $1 : S^k \to S^k$ no es homotópica a una constante (esto no es obvio).

Los grupos de homotopía son invariantes homotópicos. Es decir que si dos espacios tienen π_k no isomorfos para algún k, no son homotópicamente equivalentes.

Un espacio arcoconexo X tiene $\pi_k(X) = 0$ si y sólo si toda función continua $f : S^k \to X$ es homotópica a una constante. Un espacio X se dice k-conexo si es arcoconexo y $\pi_d(X) = 0$ para todo $1 \leq d \leq k$. Ser arcoconexo no es otra cosa que decir que toda función $S^0 \to X$ es homotópica a una constante, o que el conjunto $\pi_0(X)$ es trivial (acá no se define un producto).

Un espacio contráctil es uno que tiene el tipo homotópico de un punto. Un tal espacio no tiene agujeros: todos los grupos de homotopía son triviales. Extrañamente, existen espacios con todos los grupos de homotopía triviales que no son contráctiles. Pero para espacios *buenos*, sí vale la equivalencia.

Los espacios buenos serán acá espacios que se pueden describir de manera muy sencilla y que representan a muchos de los espacios clásicos en topología algebraica: poliedros o espacios que admiten una triangulación.

Un símplex de dimensión d es la cápsula convexa de un conjunto de $d+1$ puntos (llamados vértices) en posición general en un espacio euclídeo $\mathbb{R}^k$ con $k \geq d$ (ver Figura 2).

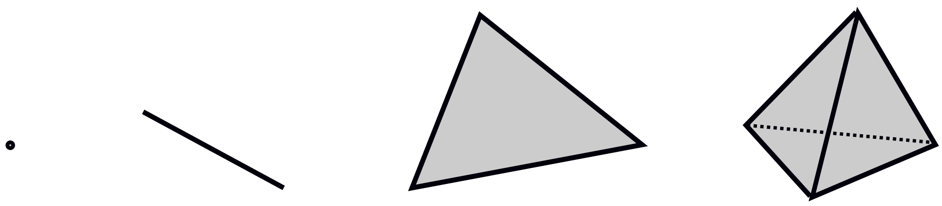


Figura 2: Símplices de dimensiones 0, 1, 2 y 3.

Una cara de un símplex es la cápsula convexa de algunos de sus vértices. Un poliedro K es una unión de símplices donde la intersección de cualesquiera dos de ellos es o bien vacío o bien una cara común (ver Figura 3).

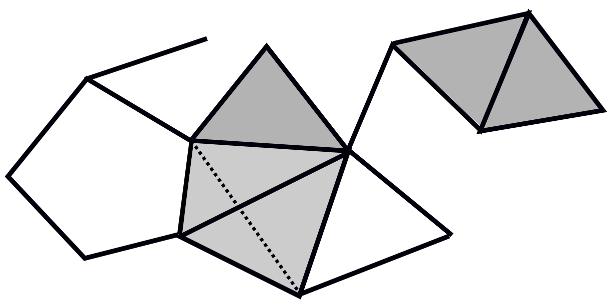


Figura 3: Un poliedro con un símplex de dimensión 3, siete de dimensión 2, y varios de dimensión 1 y 0.

Si K tiene finitos símplices (equivalentemente, finitos vértices), podemos pensar a todo el poliedro como un subespacio de un espacio euclídeo $\mathbb{R}^k$. En el caso general, la definición de poliedro debería darse con más cuidado. En esta nota sólo trabajaremos con poliedros con finitos símplices.

Una propiedad de los poliedros (con finitos símplices) es que se pueden describir de manera combinatoria, en el sentido de que podemos dar una lista finita de símbolos que los determina completamente. No todos los espacios se pueden describir de esta manera. La estructura combinatoria que se usa para representar un poliedro es la de complejo simplicial. Un complejo simplicial consta de un conjunto V, cuyos elementos se llaman vértices, y de conjunto S de subconjuntos finitos no vacíos de V que es cerrado por inclusiones, y que contiene a todos los subconjuntos unipuntuales de V. Los elementos de S se llaman símplices.

Sin ser muy rigurosos, podemos definir al poliedro asociado a un complejo simplicial como aquel que tiene por símplices a los símplices del complejo (ver Figura 4). Si bien

Sea K el complejo simplicial que tiene por vértices a v, w, u, s y por símplices a $\{v\}$, $\{w\}$, $\{u\}$, $\{s\}$, $\{v, w\}$, $\{v, u\}$, $\{w, u\}$, $\{v, s\}$, $\{v, w, u\}$.

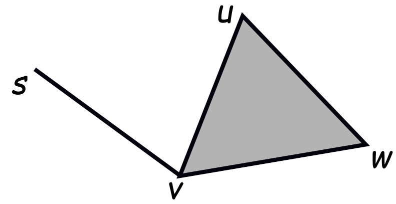


Figura 4: Un complejo simplicial y su poliedro asociado.

hay muchas formas de realizar un complejo simplicial como poliedro, en espacios euclídeos de distintas dimensiones y para distintas elecciones de los vértices de los símplices, todas estos espacios son homeomorfos: el poliedro asociado a un complejo está bien definido salvo homeomorfismo. En general no vamos a distinguir un complejo simplicial del poliedro asociado. Por otro lado, un poliedro en general admite muchas triangulaciones. Es decir, es el espacio asociado a distintos complejos simpliciales (i.e. no isomorfos).

Los poliedros son de los espacios más usados en Topología algebraica y representan a muchos de los espacios que conocemos. Por ejemplo, toda variedad diferenciable admite una triangulación, es decir, es homeomorfa a un poliedro (ver Figura 5).

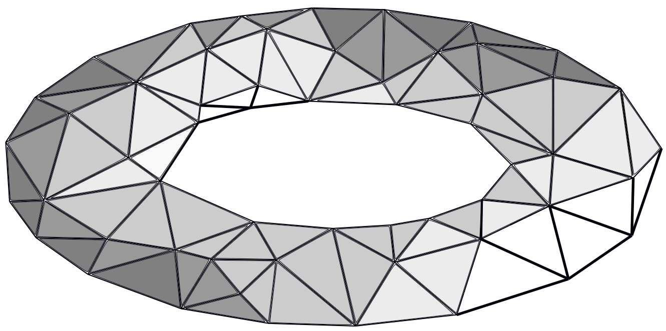


Figura 5: Una triangulación de un toro.

Una de las grandes ventajas de los poliedros, es que las representaciones combinatorias con complejos simpliciales facilitan el cálculo de invariantes. A modo de ejemplo, los grupos de homología, esa otra manera de medir agujeros, pueden calcularse algorítmicamente a partir de una triangulación.

Los complejos simpliciales son además muy naturales, porque pueden pensarse como una generalización de los grafos. Un grafo (simple) es un complejo simplicial de dimensión 1. En Teoría de redes, se usan grafos para modelar problemas de Informática, Ciencias sociales, Biología, etc. Uno tiene un conjunto de individuos que representa con vértices, y relaciones entre pares que representa con aristas. Invariantes combinatorios del grafo pueden dar información sobre el sistema complejo original. Los complejos simpliciales aparecen naturalmente en este contexto como una manera de tener en cuenta relaciones entre conjuntos de individuos de cardinal mayor a dos. No es lo mismo tener tres individuos que se relacionan de a pares que tener tres individuos que se relacionan como conjunto (ej: personas que estuvieron simultáneamente en una reunión). Invariantes combinatorios de los complejos simpliciales pueden dar más información que los grafos, e invariantes topológicos de los poliedros asociados pueden dar otro tipo de información.

Los complejos simpliciales se utilizan en Análisis topológico de datos para estudiar nubes de datos, obtenidas por mediciones. Los puntos de estos espacios viven en algún espacio euclídeo, y por sí mismos forman un espacio métrico discreto. Sin embargo, son sólo muestras de un espacio subyacente más grande, que se puede aproximar a partir de la muestra. Se construyen así complejos simpliciales que tienen en cuenta las distancias entre los puntos. Aunque estos complejos pueden tener dimensión muy grande, en varios casos tienen el mismo tipo homotópico que el espacio original que uno quiere estudiar. Es por eso que estudiar grupos de homología o de homotopía del poliedro puede dar información relevante para el problema real.

Aunque los poliedros finitos se describen con información combinatoria y los grupos de homotopía tienen una definición muy elemental, no hay un método general que permita calcularlos, ni siquiera para estos espacios. A modo de ejemplo, las esferas son poliedros que se pueden modelar con complejos simpliciales muy simples: S^n es la realización de un complejo con $n+2$ vértices y con símplices todos los subconjuntos propios de vértices. Y aún así, no se conocen todos los grupos de homotopía de todas las esferas. Ocurren cosas sorprendentes, como que $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$ y que ciertos grupos de esferas tienen torsión. Hay muchos resultados conocidos en esta dirección [11].

Incluso con el popular grupo de homotopía de grado 1, el grupo fundamental, no existe un algoritmo que permita calcularlo para un complejo simplicial finito. Es posible obtener una presentación con generadores y relaciones, pero no hay manera de decidir en general si este grupo es trivial, por ejemplo, o si un elemento dado es trivial. Esto último se conoce como el problema de la palabra [8]. Una vez más, dados dos objetos, no resulta sencillo saber si son el mismo o no.

2. Complejos simpliciales aleatorios

En Ciencia de redes, como dijimos, se usan grafos para modelar sistemas complejos. Los grafos aleatorios sirven para generar conjuntos de datos sintéticos cuando no hay mediciones suficientes. Se usan también para comparar con sistemas reales y ver si determinado modelo es fiel a la realidad. En los últimos años se están investigando complejos simpliciales aleatorios como una extensión natural de las ideas anteriores. Una segunda aplicación que tienen los complejos aleatorios es dentro de Matemática pura. Por un lado, al generar espacios aleatorios uno puede obtener ejemplos difíciles de conseguir constructivamente. El método probabilístico permite probar que existen ejemplos con determinada propiedad demostrando que la probabilidad de que tal evento ocurra es mayor a 0. En la otra dirección, algunas conjeturas abiertas fueron testeadas y se probó que son ciertas con probabilidad tendiendo a 1, lo que podría interpretarse como evidencia de su veracidad.

Es por todas estas aplicaciones que resulta de interés estudiar propiedades asintóticas de complejos aleatorios. Cómo se comporta un invariante al hacer tender a infinito el número de vértices?

Por supuesto, primero hay que fijar el modelo, la medida que tiene cada complejo simplicial. Uno de los modelos más generales es el multiparamétrico, que surge como una extensión natural del modelo de Erdős-Rényi de grafos [2]. Dado un conjunto V de cardinal n, fijamos para cada subconjunto $\sigma \subseteq V$ no vacío un número $0 \leq p_\sigma \leq 1$. A partir de estos parámetros de probabilidad se puede definir la medida $P(K)$ de cada poliedro con vértices contenidos en V. En lugar de dar esa definición, vamos a mostrar cómo construir un complejo aleatorio. Primero vamos a decidir cuáles elementos de V serán efectivamente vértices de K. Para eso, agregamos cada v de manera independiente y con probabilidad $p_{\{v\}}$. Una vez construidos los vértices, vamos a agregar los símplices de dimensión 1, es decir, las aristas. Para cada par v, w de vértices de K vamos a agregar el símplex $\{v, w\}$ con probabilidad $p_{\{v,w\}}$ e independientemente. En el siguiente paso, cada vez que tengamos tres aristas que forman un triángulo, vamos a agregar el símplex de dimensión 2 correspondiente con la probabilidad asociada. Al llegar a dimensión $n-1$ concluye la construcción.

A modo de ejemplo, si $n = 3$, digamos $V = \{v, w, u\}$, y todos los parámetros de probabilidad son iguales a $\frac{1}{2}$, cuál es la probabilidad de que el complejo simplicial sea el triángulo vacío, es decir el complejo K que tiene como símplices a $\{v\}, \{w\}, \{u\}, \{v, w\}, \{v, u\}, \{w, u\}$? Esos seis símplices deben estar presentes, y además el símplex $\{v, w, u\}$ de dimensión 2 no debe estar. Por eso la probabilidad de K es $\frac{1}{2^7}$.

Algunos casos particulares del modelo multiparamétrico eran conocidos de antes. Por ejemplo, si $p_\sigma = 1$ para cada conjunto σ de cardinal 1, $p_\sigma = p$, con p fijo, si σ tiene 2 elementos, y $p_\sigma = 0$ para cardinales mayores a 2, el complejo obtenido es un grafo. Este es el famoso modelo de Erdős-Rényi. Si modificamos el modelo anterior definiendo ahora $p_\sigma = 1$ para cardinales mayores a 2, el modelo se llama *clique*. Estos son complejos que quedan determinados por el grafo subyacente: si en un conjunto de vértices cualquier par forma una arista, entonces el conjunto es un símplex.

En los dos modelos anteriores sólo unos pocos complejos de todos los posibles pueden aparecer efectivamente. Si en cambio todos los parámetros están en el intervalo $(0, 1)$, todos los complejos con vértices soportados en V tienen una probabilidad positiva. Cuando el cardinal n de V crece, uno puede esperar o no variaciones en los parámetros. En los resultados que vamos a contar acá asumiremos que los parámetros están uniformemente acotados inferiormente por una constante $a > 0$. Es decir que $p_\sigma \geq a$ para todo $\emptyset \neq \sigma \subseteq V$, donde a es independiente de n.

El siguiente resultado trata sobre complejos simpliciales, pero no es otra cosa que un resultado ya conocido para el modelo de grafos.

Proposición 3. *Supongamos que los parámetros de probabilidad están acotados inferiormente por cierto $a > 0$ independiente de la cantidad de vértices n. La probabilidad de que K sea conexo tiende a 1 cuando n tiende a infinito.*

Demostración. Vamos a considerar el evento E “cualesquiera dos vértices de K están conectados por un camino de longitud 2”, en otras palabras , dados vértices $v, w \in K$, existe otro vértice $u \in K$ tal que los símplices $\{v, u\}$ y $\{w, u\}$ están en K. Esta propiedad es mucho más fuerte que la conexión. Dado un punto x cualquiera en el poliedro K, siempre hay un vértice en su componente conexa. De hecho, si σ es un símplex que contiene a x, entonces hay caminos en σ de x a cualquiera de los vértices de σ. Probaremos que E ocurre con probabilidad tendiendo a 1.

Sea V un conjunto de cardinal n. Sean $v, w, u \in V$ tres elementos distintos. La probabilidad de que un complejo K con sus vértices contenidos en V, y que contiene a v y a w, contenga además al camino v, u, w, es $p_{\{u\}}p_{\{v,u\}}p_{\{w,u\}}$. Luego, la probabilidad condicional

$$P(\text{el camino } v, u, w \text{ está en } K | v, w \in K) \geq a^3.$$

Por lo tanto,

$$P(\text{el camino } v, u, w \text{ no está en } K | v, w \in K) \leq 1 - a^3.$$

Si ahora $v \neq w \in V$ están fijos, pero u no,

$$P(\text{el camino } v, u, w \text{ no está en } K \text{ para ningún } v, w \neq u \in V | v, w \in K) \leq (1 - a^3)^{n-2},$$

por independencia condicional.

Finalmente, si v, w tampoco están fijos,

$$P(E^c) = P(\exists v \neq w \in K \text{ tales que } v \text{ y } w \text{ no se conectan por ningún camino de longitud 2}) \leq$$

$$\sum_{v \neq w \in V} P(v \text{ y } w \text{ están en } K \text{ y no se conectan por ningún camino de longitud 2}) \leq$$

$$\sum_{v \neq w \in V} P(v \text{ y } w \text{ no se conectan por ningún camino de longitud } 2 | v, w \in K) \leq \binom{n}{2}(1-a^3)^{n-2}.$$

Como esta última expresión tiende a 0 cuando $n \to \infty$, el resultado queda probado. $\square$

Como dijimos, este no es más que un resultado sobre grafos. Investigar cuándo K es arcoconexo equivale a analizar cuándo $\pi_0(K)$ es trivial. La siguiente pregunta natural involucra a $\pi_1(K)$. Qué ocurre asintóticamente con la probabilidad de que K sea simplemente conexo? El problema de la palabra o, más específicamente, la imposibilidad de decidir cuándo una presentación presenta al grupo trivial, nos dice que no tenemos chances de calcular completamente este número para cada n. La idea va a ser entonces definir un evento similar al evento E del resultado anterior. Una propiedad que implique simple conexión y para la que sea más sencillo estimar la probabilidad de que ocurra.

3. Links y subcomplejos chicos

Dado un complejo simplicial K y un vértice $v \in K$, el *link* $\mathrm{lk}(v)$ de v en K es el subcomplejo de K formado por todos los símplices $\sigma \in K$ que no contienen a v pero que al unirles v uno obtiene un símplex (notado) $v\sigma$ de K. En otras palabras es el subcomplejo más grande de K que forma la base de un cono con ápice en v contenido en K (ver Figura 6).

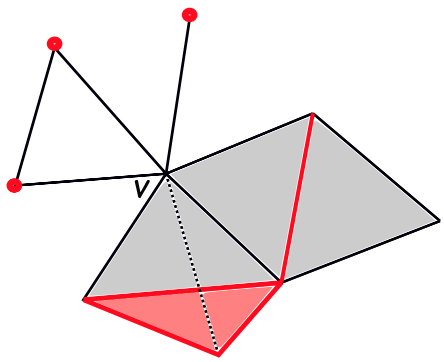


Figura 6: El link de v en rojo consta de un símplex de dimensión 2, cuatro de dimensión 1 y siete vértices. El símplex de dimensión 2 junto con v forma el único símplex de dimensión 3 del complejo.

Los conos son complejos contráctiles. Por eso, K no puede tener agujeros contenidos en links de vértices.

Definición 4. Sea r un entero no negativo. Decimos que un complejo simplicial K cumple la propiedad $c(r)$ si todo subcomplejo L de K con a lo sumo r vértices está contenido en el link de un vértice $v \in K$.

La propiedad $c(r)$ implica que el complejo no puede tener agujeros contenidos en subcomplejos chicos. Más aún, uno puede probar que cualquier agujero puede ser descompuesto como suma (en los grupos de homotopía) de agujeros chicos. El tamaño de estos agujeros depende en realidad de la dimensión. Y entonces la propiedad $c(r)$ va a garantizar que el complejo es k-conexo para cierto k que depende de r. Empezaremos con el caso de dimensión 1.

Antes de eso, recordamos brevemente el enunciado del Teorema de aproximación simplicial, que es uno de los resultados básicos, pero imprescindibles al comenzar a trabajar con poliedros. El resultado dice que si $f : X \to K$ es una función continua de un poliedro X al poliedro asociado a un complejo simplicial K, entonces existe una triangulación L de X y un *morfismo simplicial* $\varphi : L \to K$ que es homotópico a f. Un morfismo simplicial es una función del conjunto de vértices de L al conjunto de vértices de K que manda símplices en símplices. Si $\varphi : L \to K$ es un morfismo simplicial, tiene asociada una función continua entre los poliedros, que manda una combinación convexa de vértices de L en la misma combinación, reemplazando cada vértice por su imagen por φ. Es esta función continua la que resulta homotópica a f en el enunciado del teorema. La moraleja es que cualquier función continua entre poliedros, por más salvaje que sea, siempre es homotópica a una función combinatoria, muy sencilla, que puede describirse con información finita. Para más detalles sobre el teorema, ver [10].

Proposición 5. *Si K es un complejo simplicial que cumple la propiedad $c(4)$, entonces es simplemente conexo.*

Demostración. La propiedad $c(4)$ implica $c(2)$. Entonces cualesquiera dos vértices están conectados por un camino de longitud 2, lo que garantiza arcoconexión, como ya mencionamos.

Falta ver que toda función $\gamma : S^1 \to K$ es homotópica a una constante. Si γ es una tal función, el Teorema de aproximación simplicial nos garantiza que existe una triangulación S de S^1 y un morfismo simplicial $\varphi : S \to K$ que es homotópico a γ. Como S triangula a la circunferencia, no es más que un grafo que es un ciclo. Y el morfismo φ puede verse como un camino cerrado (quizá no inyectivo) en el grafo subyacente de K (el 1-esqueleto, formado por vértices y símplices de dimensión 1) (ver Figura 7).

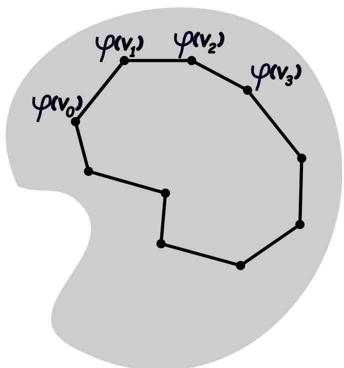


Figura 7: El lazo asociado a φ en el grafo de K.

Queremos ver que φ es homotópico a una constante. Si S tiene a lo sumo 4 vértices, entonces $c(4)$ garantiza que la imagen de φ está contenida en la base de un cono con ápice en algún vértice $w \in K$. Pero entonces φ es homotópica a la función constante w. Hay una homotopía que deforma la función continuamente hasta llegar al ápice del cono.

Si S es un ciclo $v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}$ con $k \geq 5$ vértices, entonces $\varphi(v_0), \varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_{k-1})$ es un camino en el 1-esqueleto de K, que puede repetir vértices y aristas. Los símplices $\varphi(v_0v_1), \varphi(v_1v_2), \varphi(v_2v_3)$ y sus vértices forman un subcomplejo L de K de a lo sumo 4 vértices (ver Figura 8).

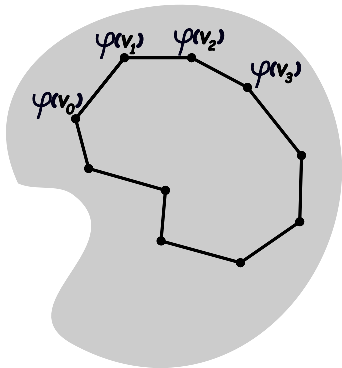


Figura 8: El subcomplejo L en naranja. Al reemplazar L por el camino verde, se obtienen lazos homotópicos, donde la homotopía usa los símplices del cono wL.

La propiedad $c(4)$ dice que L está contenido en el link $\mathrm{lk}(w)$ de un vértice $w \in K$. Usando el cono wL para definir una homotopía, uno puede probar que φ es homotópica al camino cerrado $\varphi(v_0), \varphi(w), \varphi(v_3), \varphi(v_4), \ldots, \varphi(v_{k-1})$, que en realidad es un morfismo simplicial $\varphi' : S' \to K$ que sale de una triangulación S' de S^1 con $k-1$ vértices. Por una argumento inductivo este nuevo camino es homotópico a una constante, y luego φ lo es. $\square$

Ahora sí, construido el puente entre combinatoria y topología, podemos entender qué ocurre asintóticamente con la simple conexión.

Teorema 6. *Supongamos que los parámetros de probabilidad están acotados inferiormente por cierto $a > 0$ independiente de la cantidad de vértices n. La probabilidad de que K sea simplemente conexo tiende a 1 cuando n tiende a infinito.*

La demostración es esencialmente la misma que para Proposición 3. En lugar de trabajar con el evento E, uno prueba que $c(4)$ ocurre con alta probabilidad. La probabilidad de que un subcomplejo específico L de K esté en el link de un vértice v concreto fuera de L está acotada inferiormente por una potencia de a, donde el exponente es la cantidad de símplices de L más 1. La cantidad de símplices de L es menor a 2^4. Por otro lado, el número de complejos L de a lo sumo 4 vértices soportados en un conjunto de n vértices es a lo sumo $\binom{n}{4}2^{2^4}$: elegimos los vértices y luego elegimos los símplices que forman el complejo. En esta manera de contar hay repeticiones. El argumento concluye observando que

$$\binom{n}{4}2^{2^4}(1-a^{2^4})^{n-4}$$

tiende a 0 cuando n tiende a infinito.

Al intentar generalizar esta idea para estudiar k-conexión para $k \geq 2$, uno necesita hacer dos cosas. Por un lado es fácil ver que $c(r)$ ocurre con alta probabilidad, sin importar quién es r. El problema está en demostrar que para cada $k \geq 2$ existe $r \geq 0$ tal que $c(r)$ implica k-conexión.

Las triangulaciones de S^2 y esferas de dimensión mayor no son tan simples de describir como las de S^1. Si bien el Teorema de aproximación simplicial está disponible para cualquier dimensión, no es sencillo replicar el argumento inductivo de la demostración de la Proposición 5.

En [3], Even-Zohar, Farber y Mead probaron que $c(18)$ implica 2-conexión. En [1] demostramos que en realidad basta $c(8)$. Por otro lado, probamos que para todo k existe r tal que $c(r)$ garantiza k-conexión. Para ambos resultados trabajamos con triangulaciones muy específicas de las esferas, con aproximaciones simpliciales y con un argumento inductivo que sigue las ideas descriptas en esta nota. En esencia, partiendo de cierta triangulación S de una esfera, obtenida por aproximación simplicial de una función $f : S^d \to K$ arbitraria, se encuentra un subcomplejo $D \leq S$ con a lo sumo r vértices que triangula a un disco D^d, y se reemplaza D por un cono sobre su borde ∂D. De esta manera se obtiene una triangulación S' de S^d con menos vértices que S. Se define un morfismo $S' \to K$ que coincide con el original fuera de D y en ∂D, y se extiende de ∂D a su cono usando $c(r)$. Este morfismo resulta homotópico a f, y se prosigue inductivamente. Esto es exactamente lo que hicimos en la demostración de la Proposición 5, en donde triangulaciones de D^1 con 4 vértices eran reemplazadas por triangulaciones de D^1 con 3 vértices.

Ilustramos esta estrategia en la siguiente prueba de que $c(8)$ implica 2-conexión. El primer complejo de la Figura 9 es una triangulación de S^2. Está determinada por un parámetro de altura y otro de circunferencia. Estas triangulaciones son exhaustivas en el sentido de que cualquier función continua $S^2 \to K$ se puede aproximar por un morfismo simplicial desde una de estas. Esto ocurre esencialmente porque eligiendo altura y circunferencia y un homemorfismo con S^2, los símplices de estas triangulaciones se pueden hacer arbitrariamente pequeños.

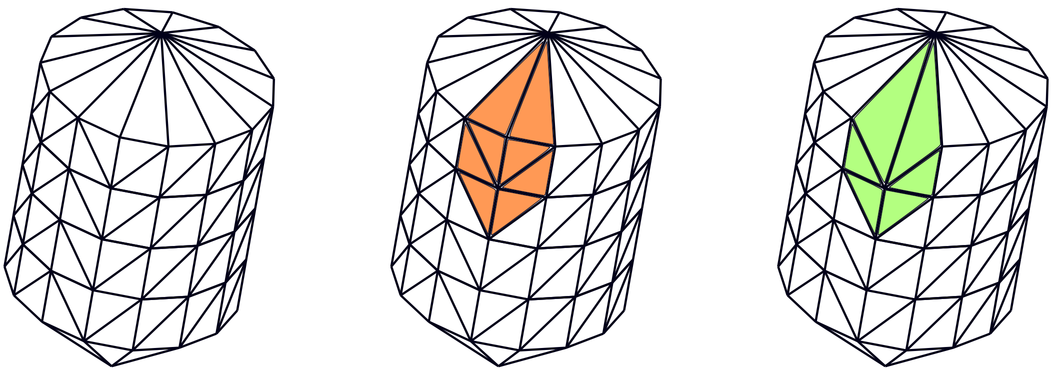


Figura 9: Una triangulación de S^2 y un reemplazo de un disco por otro con igual borde.

En naranja se ve un subcomplejo que triangula D^2 y tiene 8 vértices. En el tercer complejo, esta triangulación fue reemplazada por el cono sobre su borde.

En Figura la 10 continuamos con reemplazos similares, hasta obtener una triangulación de S^2 similar a la original, pero donde la altura disminuyó en 1. En Figura 11 vemos el final del camino, cuando la altura es 1. Podemos continuar con sustituciones del mismo tipo hasta llegar a la figura de abajo a la izquierda, la suspensión de un ciclo.

Desde allí podemos seguir, ahora reduciendo la circunferencia, hasta obtener un dodecaedro que tiene 8 vértices.

Este argumento y su generalización para $k \geq 0$, demuestran el siguiente resultado.

Teorema 7. *Sea $k \geq 0$. Supongamos que los parámetros de probabilidad están acotados inferiormente por cierto $a > 0$ independiente de n. La probabilidad de que K sea k-conexo tiende a 1 cuando n tiende a infinito.*

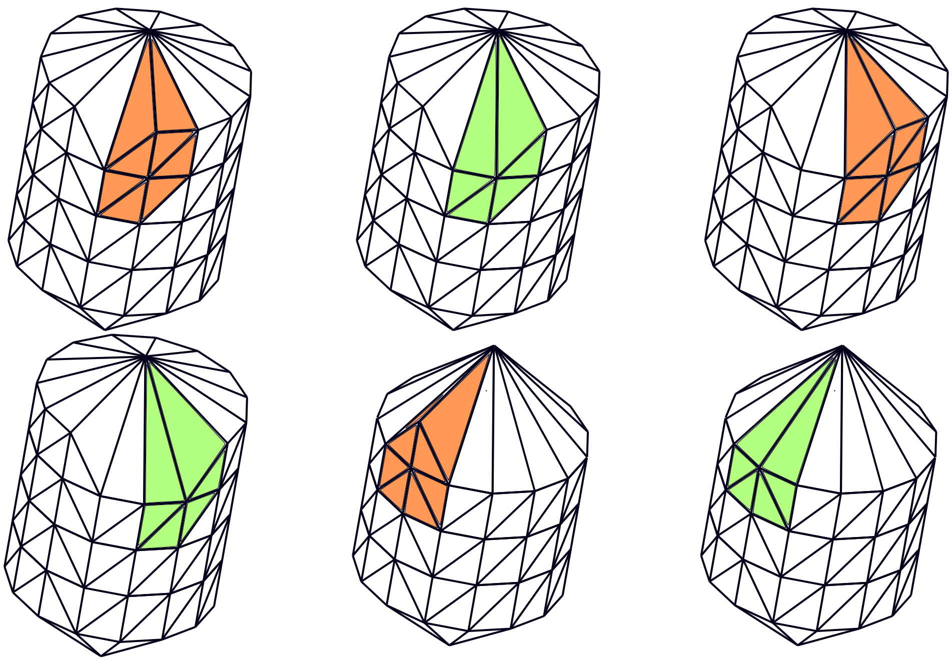


Figura 10: El proceso continúa hasta que la altura disminuye en 1.

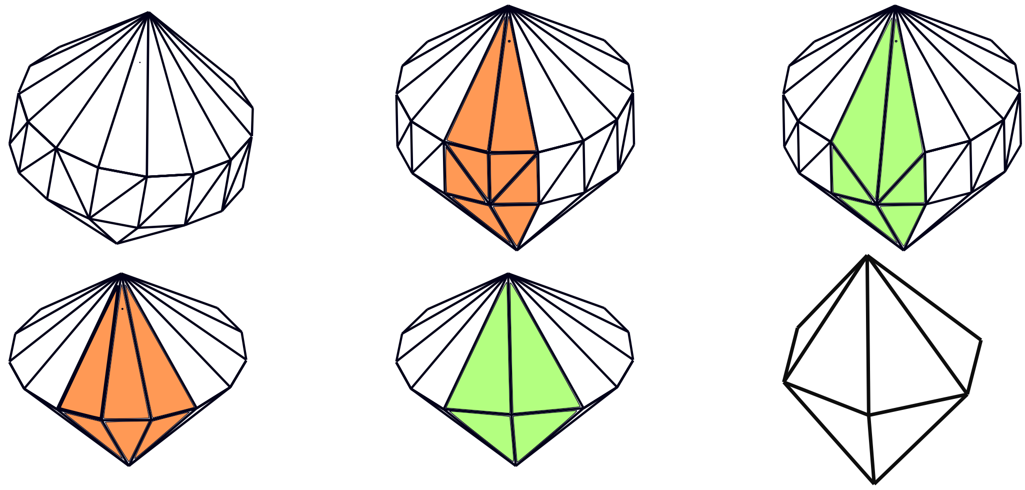


Figura 11: Desde altura 1 se llega a altura 0 y luego se reduce la circunferencia hasta obtener un complejo con 8 vértices o menos.

El teorema de Hurewicz dice que si un espacio es k-conexo, todos los grupos de homología reducida hasta grado k son triviales. Entonces nuestros resultados sobre conectividad homotópica aplican también a conectividad homológica.

En [4] hallamos un argumento alternativo para probar el Teorema 7, menos geométrico, basado en trabajos de Kahle, Meshulam [6, 7]. Éste usa el Lema del nervio, que compara la conectividad de un complejo con la de otro construido a partir de un cubrimiento del primero. Se deduce en particular que $c(6)$ implica 2-conexión. Es posible dar una demostración geométrico-combinatoria, del estilo de antes, usando una colección exhaustiva de triangulaciones de S^2 más ingeniosa que la de las figuras anteriores?

El camino iniciado en [4] permite obtener mejores resultados y cambiar la propiedad $c(r)$ por otra, para así estudiar otros invariantes desde una perspectiva asintótica. Estas nuevas aplicaciones son parte de un trabajo en progreso con Michael Farber.

Referencias

[1] J.A. Barmak. *Connectivity of Ample, Conic, and Random Simplicial Complexes*. Int. Math. Res. Notices, 2022.

[2] P. Erdős, A. Rényi. *Asymmetric graphs*. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. vol 14(1963), 295- 315.

[3] C. Even-Zohar, M. Farber, L. Mead. *Ample simplicial complexes*. European J. of Math., 8(2022), 1-32.

[4] M. Farber. *Large simplicial complexes: universality, randomness, and ampleness*. J Appl. and Comput. Topology (2023).

[5] M. Farber, L. Mead. *Random simplicial complexes in the medial regime*. Topology Appl. 272(2020), 107065, 22 pp.

[6] M. Kahle. *Topology of random clique complexes*. Discrete Math. 309(2009), pp. 1658-1671.

[7] R. Meshulam. *The clique complex and hypergraph matching*. Combinatorica 21(2001), pp. 89-94.

[8] P.S. Novikov. *On the algorithmic unsolvability of the word problem in group theory*. Trudy Mat. Inst. Steklov, 44 (1955); English transl, Amer. Math. Soc. Transl. (2) 9 (1958), 1-122

[9] G. Perelman. *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, Ricci flow with surgery on three-manifolds, Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds*. arXiv:math.DG/0211159, arXiv:math.DG/0303109, arXiv:math.DG/0307245.

[10] E.H. Spanier. *Algebraic Topology*. McGraw-Hill series in higher mathematics, 1989.

[11] H. Toda. *Composition methods in homotopy groups of spheres*. Annals of Mathematics Studies, vol. 49, Princeton University Press 1962.

Ir al índice general

ISSN 1514-9595 (web)

Cognición en Matemática. Concepciones estudiantiles sobre los números reales

Virginia Montoro
Universidad Nacional del Comahue (Bariloche)
IPEHCS (CONICET -UNCo)

La comprensión en Matemática

Una idea arraigada en la comunidad Matemática y en la de Educación Matemática es que para hacer matemática y para aprenderla se deben comprender los conceptos, métodos, procedimientos, relaciones y formas de representación de esta ciencia.

Partimos de la idea de que, al interactuar con el mundo, participando de prácticas socioculturales en ámbitos cotidianos, académicos o profesionales, las personas generan conocimientos y aprenden. Estos procesos se representan internamente y esas representaciones internas están estructuradas de alguna manera. Las Matemáticas son comprendidas si su representación mental es parte de una red de representaciones y el grado de comprensión viene determinado por el número y la fuerza de esas conexiones (Hiebert y Carpenter, 1992; Sierpinska, 1994).

Dado que los conceptos matemáticos son abstractos e inaccesibles a los sentidos, solo podemos entenderlos a través de representaciones como gráficos o símbolos. Al representar una función o escribir un número, usamos signos que nos permiten interactuar y comunicar ideas matemáticas. Comprender no se limita a ejecutar procesos y aplicar fórmulas, es un proceso constructivo que vincula acciones sobre objetos conocidos con representaciones internas, generando estructuras mentales asociadas a los signos matemáticos (Sfard, 1991; 2008). En otras palabras, las personas comprenden matemáticas al reflexionar sobre sus concepciones, relacionarlas y usarlas para resolver problemas mediante representaciones externas. Godino (2000) plantea que la comprensión debe incluir tanto esta perspectiva psicológica (experiencia mental y conexiones internas) como también una perspectiva antropológica (relación entre significados personales e institucionales).

Concluimos que comprender matemática va más allá de la lectura o escritura de axiomas, definiciones, teoremas y de la aplicación de algoritmos. Implica darle sentido a la información, conectándola con otros conocimientos e ideas. Esto significa explicarla, relacionarla con experiencias previas, integrar diferentes formas de visualizar y representar un concepto, relacionarlo con otros conceptos y usar este conocimiento para crear nuevos aprendizajes o resolver problemas. Todo esto en diversas situaciones y en relación con contextos institucionales.

Las concepciones estudiantiles

Desde la década 1970-1980, las teorías del aprendizaje enfatizan el estudio de las concepciones de los y las estudiantes como puntos de partida y referencia permanente de la enseñanza orientada hacia la construcción de aprendizajes significativos (Ausubel et al., 1978/83). Consideran fundamental interactuar con las ideas previas de los y las aprendices para enriquecerlas o modificarlas. En este sentido, Vygotsky (1973) señaló que todo aprendizaje tiene una prehistoria, mientras que Bachelard (1938/1987) afirmó que conocer implica enfrentarse a conocimientos previos.

Las concepciones estudiantiles se originan en diversos factores, como el razonamiento humano habitual, la cultura y las experiencias educativas y a menudo interfieren con la adquisición de conocimientos académicos. Funcionan tanto como herramientas para interpretar la realidad como barreras que pueden dificultar la adopción de nuevas perspectivas (Pozo, 2014; Vosniadou, 2008).

Piaget fue un precursor en el estudio de estas concepciones en distintos dominios, incluyendo los números y la geometría (Piaget, 1952; Piaget e Inhelder, 1969). Desde los años ochenta, la investigación ha dejado de verlas como manifestaciones de estadios evolutivos y ha comenzado a analizarlas en función del nivel de pericia del sujeto en un dominio específico y del contexto de la tarea (Pozo, 2014). Este enfoque dio origen a investigaciones sobre las concepciones del estudiantado en distintos campos de conocimiento en el nivel secundario y universitario, en particular en contenidos matemáticos específicos (Bergé, 2008; Montoro, 2005; Voskoglou y Kosyvas, 2012).

Lejos de ser arbitrarias o casuales, las concepciones estudiantiles poseen cierta sistematicidad, ya que intentan dar sentido al mundo y se integran al "sentido común" a través del cual los sujetos interactúan con su entorno y, por esta razón, suelen ser difíciles de modificar (Pozo, 2014). No obstante, si bien estas concepciones son persistentes, pueden cambiar a través de la práctica educativa en nuevos contextos. Conocer las concepciones de los y las estudiantes permite a los y las docentes contar con herramientas que favorezcan el aprendizaje.

La dualidad conceptos – concepciones

Tratándose de Educación Matemática, el tratamiento de las concepciones nos remite rápidamente al término concepto, problemático en sí mismo. White (1988) considera que el término concepto es usado de dos maneras distintas, por un lado, designando un sistema de clasificación que permite ubicar una instancia dentro de una clase y, por otro, como todo conocimiento que un sujeto asocia al nombre (del concepto). En cuanto a la idea de concepción, piensa que se trata de un sistema de explicación, más complejo y difícil de definir. Estas dos formas de entendimiento se pueden ver como complementarias ya que la noción de concepto se encuentra muy próxima a la de concepción, por cuanto todo el conocimiento asociado a un nombre no deja de ser una explicación cuando se aplica a la interpretación de la realidad.

En palabras de Sfard (2008) entendemos el concepto como una palabra junto con sus usos discursivos, entendida como dicha por los miembros competentes de la comunidad de discurso, mientras que la concepción es la versión individual del concepto. El término concepción refiere a la manera especial en que una persona emplea la palabra en su discurso y resuelve situaciones en las que el respectivo concepto está involucrado.

Estudios empíricos ponen de manifiesto que las personas emplean diversos tipos de representaciones con relación a los fenómenos a los que refiere un concepto, dependiendo de su nivel de conocimiento (expertos y novatos establecen distintas representaciones de los conceptos) y del concepto a representar (no es lo mismo representar “silla”, “libertad” o “circunferencia”) (Pozo, 2014; Sfard, 2008). Como indica Howard (1987), la formación de conceptos en contextos cotidianos es relativamente concreta y basada en la percepción, mientras que en ámbitos académicos las representaciones tienden a ser más abstractas y a establecer relaciones con otros conceptos de la disciplina, en busca de explicaciones pertinentes.

Conocimiento personal y conocimiento académico en investigación en Educación Matemática

En investigación en Educación Matemática, diversos/as autores/as se han ocupado de establecer las relaciones entre el conocimiento personal (concepciones) y el conocimiento académico, legitimado y objetivado por una comunidad de especialistas (concepto) destacando que en muchas situaciones se registran relevantes brechas entre ambos, que en caso de no ser conocidas y trabajadas deliberadamente pueden conducir al fracaso de la enseñanza.

Desde la escuela holandesa de Didáctica de la Matemática, Freudenthal (1983) distingue explícitamente entre concepto y objeto mental, llamando objeto mental al concepto que una persona tiene de un determinado objeto matemático, es decir el campo semántico personal. Esta idea incluye la posibilidad de que las definiciones formales de los conceptos formen parte de los objetos mentales que construimos, sin que esto sea necesariamente así. Aún cuando la definición matemática forme parte del objeto mental, no lo sustituye.

Brousseau (1983), en la Didáctica de la Matemática francesa, señala que todos/as generamos concepciones sobre determinadas nociones, que en algunas ocasiones se revelan falsas, insuficientes, ineficaces para la resolución de situaciones y problemas, lo que puede provocar errores repetitivos y resistentes que se conviertan en obstáculos para nuevas comprensiones. En este sentido, la manifestación de obstáculos en el aprendizaje está caracterizada por cierto tipo de conocimiento y no ausencia de éste.

Por otra parte, Tall y Vinner (1981) distinguen entre concepto e imagen conceptual (o esquema conceptual). El concepto es lo que se desprende de una definición matemática, mientras que la imagen conceptual corresponde al concepto en la mente individual, es el producto de los procesos de formación del concepto en la mente. Para un concepto dado, desarrollamos una imagen conceptual que comprende toda la estructura cognitiva en la mente del individuo asociada a tal concepto. Esta puede no ser globalmente coherente, diferenciarse en ciertos aspectos de la definición formal del concepto y contener factores que causen conflicto cognitivo, asimismo se amplía y cambia con la experiencia y reflexión y las conexiones usadas en una ocasión pueden ser diferentes de aquellas evocadas en otra (Tall, 2013).

Desde la perspectiva de la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas), un individuo desarrolla su comprensión de conceptos matemáticos construyendo y utilizando determinadas estructuras mentales. La construcción de estructuras asociadas a un concepto particular se relaciona íntimamente con la concepción que un individuo alcanza sobre dicho concepto. Una concepción es intrapersonal y se desarrolla como resultado de una actividad reflexiva. Dicho desarrollo no es lineal, hay un ir y venir entre diferentes etapas en la construcción del conocimiento (Arnon et al., 2014).

En su estudio sobre la comprensión Matemática, Sfard (2008) establece la diferencia, entre concepto como el constructo teórico dentro del universo formal del conocimiento de la disciplina y concepción como la idea del concepto que vive en la mente humana, que depende de la experiencia personal y está sujeta a cambios. Tenemos, por un lado, el conocimiento matemático que se comparte socialmente y que está sujeto a transformaciones para poder ubicarlo como objeto de enseñanza y, por el otro, el conocimiento subjetivo que los y las estudiantes relacionan con el conocimiento oficial.

Estudiantes pensando los números reales

Mostraremos un sintético panorama de las concepciones que estudiantes de los últimos años de la escuela secundaria y de universidad construyen sobre los números reales.

Los números en los distintos niveles de estudio

En los primeros años de la escuela primaria, niños y niñas conocen los números naturales. Aprenden que el 1 es el primer número y que todo número natural tienen un siguiente, por lo que podrán intuir que los números (naturales) son infinitos. Conocerán también en forma intuitiva que entre dos números naturales consecutivos no hay otro número natural y el orden de los números naturales es tal que cuando tengamos varios números naturales uno de ellos será el menor.

Los números enteros se introducen, en el tercer ciclo de la escuela primaria y se formalizan, en los primeros cursos de la escuela secundaria, a partir de la necesidad de ampliar el conjunto de números naturales con los números negativos que aparecen en situaciones concretas y permiten extender la recta numérica. Al mismo tiempo el 0 (cero) toma sentido en esta como número.

Al adentrarse en los estudios secundarios, la enseñanza propone profundizar la comprensión y el uso de los números racionales y hacia el final de este período se espera que los y las estudiantes comprendan los números racionales y los números reales, manejen el sistema de representación decimal, puedan ordenarlos, representarlos sobre la recta numérica y usarlos para resolver problemas.

La diferenciación de número racional y número irracional es esencial para la construcción del concepto de número real, que se realiza en la escolaridad extendiendo el campo numérico desde el conjunto de números racionales, propios de la matemática escolar, hacia el de números reales ámbito de la matemática avanzada.

En los primeros cursos de matemáticas universitarias, frecuentemente se trabaja con la noción de número real, como si fuese un contenido ya naturalizado en la escuela secundaria, sin proponer un estudio deliberado y formal al respecto.

De lo discreto a lo denso

El pasaje de los números naturales a los enteros con que se enfrentan los y las estudiantes hacia el final de la escuela primaria, presenta dificultades epistemológicas y cognitivas importantes, relacionadas generalmente con los números negativos. El obstáculo epistemológico (Brousseau, 1983) surge, en general, al considerar el número como una cantidad referida al mundo concreto.

No abordaremos aquí las concepciones sobre números negativos, ya que en los últimos años de secundaria y en la universidad los y las estudiantes suelen haber ampliado su campo numérico a los racionales y reales. Sin embargo, diversas investigaciones muestran que en los primeros años de secundaria el alumnado suele mantener aún concepciones propias de los números naturales, aplicándolas a los enteros. Esto incluye ver los números como cantidades concretas y entender la suma como aumento, la resta como disminución, y la multiplicación y división dentro del marco de los naturales (Bruno, 1997; Vergnaud, 1982).

Luego de los números enteros, el currículo escolar contempla la enseñanza de los racionales como fracciones de enteros o como decimales. A veces se enseñan las fracciones y los decimales como tipos distintos de números, lo que puede, en ciertos casos, llevar a que los y las estudiantes terminando la secundaria y comenzando la universidad consideren que diferentes representaciones de un mismo número racional corresponden a números distintos. Más aún, pueden llegar a pensar que los decimales y las fracciones son subconjuntos disjuntos dentro del conjunto de números racionales (Montoro y Ferrero, 2022; O’Connor, 2001; Vamvakoussi y Vosniadou, 2010).

El acto de contar es el primer acercamiento a una representación del número natural, de lo discreto. Esta representación puede persistir, de modo que, en problemas relacionados con fracciones o decimales, se considere propiedades de los números naturales para resolverlos. De hecho, una de las principales dificultades para comprender los números racionales puede ser la transferencia (incorrecta) de las propiedades de los números naturales a los números racionales (Ni y Zhou, 2005; Vamvakoussi y Vosniadou, 2004).

Fischbein et al. (1995) y Tirosh et al. (1998), encontraron que estudiantes de secundaria y de profesorado de educación primaria consideran a los enteros como modelo de número o identifican al número con su representación y no conocen los irracionales. En forma similar, Montoro y Ferrero (2022) muestran que, estudiantes con menores estudios en matemática han naturalizado, en la secundaria sólo a los enteros como números, mostrando gran inseguridad al enfrentarse con el orden denso propio de racionales y reales.

Una idea muy difundida entre estudiantes de los últimos años de la secundaria y comienzo de la universidad es la de pensar a los números como los decimales finitos, con una discretitud explícita. Esta concepción consiste en identificar al número real con el número decimal (finito) y discreto. Pareciera que en su comprensión hay un corrimiento de los enteros a los décimos o centésimos (Montoro y Ferrero, 2022). Puede observarse que estos/as estudiantes trasladan a los racionales el tipo de orden de los naturales (un racional puede tener un siguiente) y no reconocen los irracionales, lo que concuerda con lo encontrado por Malara (2001); Merenluoto y Lehtinen (2002) y Palacios-Amaya et al. (2018).

Concepciones de los números reales como unión de los racionales e irracionales

Las expectativas respecto a que al ingresar a la universidad la noción de número real sea una noción disponible en el estudiantado, frecuentemente no son satisfechas y una cantidad importante de estudiantes recorren esta etapa de transición entre la escuela secundaria y la universidad sin una comprensión cabal del número real (Artigue et al., 1995; Tirosh et al., 1998; Zazkis y Sirotic, 2010; Montoro, 2023). Algunos de los estudios en pensamiento numérico muestran que los y las estudiantes tienden a extrapolar las propiedades del número natural no solo, como dijimos, a los racionales sino también a los reales (Merenluoto y Lehtinen (2002); Vamvakoussi y Vosniadou, 2010).

Estudios sobre las concepciones del número irracional han evidenciado que maestros/as de escuela primaria, incluso aquellos con estudios universitarios, tienen dificultades para reconocer si un número es racional o irracional. Asimismo, se ha observado la misma dificultad en estudiantes en transición de la secundaria a la universidad. Incluso quienes han finalizado la educación secundaria y cursan los primeros años universitarios, aunque conocen las definiciones y características de los números irracionales, suelen fracasar en tareas que requieren un uso flexible de sus diferentes representaciones. Además, muchos/as de estos/as estudiantes tienden a confundir los números irracionales con sus aproximaciones decimales y a creer que la irracionalidad de un número depende únicamente de su representación decimal (Fischbein et al.,1995; Peled y Hershkovitz, 1999; Zazkis y Sirotic, 2010). Al respecto Montoro (2023) encontró que una amplia mayoría de estudiantes de últimos años de la secundaria y de la universidad sin estudios formales de los números reales han naturalizado a los números reales identificándolos con los racionales, generalmente como decimales y que los irracionales son considerados por estos/as estudiantes como unos pocos números raros.

Otra concepción un poco más profunda de los números reales generalmente presente en estudiantes a nivel universitario sin especialidad en Matemática condice con una concepción de los números reales identificándolos con los racionales infinito-potencialmente densos (Montoro, 2023; Peled y Hershkovitz, 1999). Esta visión de la densidad como potencialmente infinita coincide con que frecuentemente los jóvenes conciben al infinito (en forma intuitiva) como potencial, es decir algo que puede seguir sucediendo siempre o un proceso sin fin (Fischbein et al., 1979; Monaghan, 2001).

La profundidad del conocimiento matemático juega un papel importante para la mejor comprensión de los números reales, aun en las nociones más básicas, como son la diferenciación de racionales e irracionales, orden y densidad. Al respecto Voskoglou y Kosyvas (2012) revelaron que estudiantes de un instituto tecnológico de pregrado, que utilizan las matemáticas como herramienta para estudiar y comprender mejor la ciencia, mostraron una importante superioridad de respuestas correctas con respecto a las respuestas de las y los estudiantes de secundaria. Montoro y Ferrero (2022) da cuenta que solo, unos pocos estudiantes avanzados/as de Matemática, han construido concepciones del número como elemento de un conjunto numérico correctamente diferenciado brindando una descripción de los irracionales con características necesarias y suficientes y una visión infinito-actual de la densidad. El infinito actual o matemático es aquel en que los infinitos elementos existen simultáneamente, son concebidos como una unidad.

La necesidad matemática de los irracionales

Juntamente con la comprensión incompleta de los números racionales, existen otras dificultades cognitivas y epistemológicas que complican aún más la comprensión de los números reales. Entre ellas se encuentran la completitud, la inconmensurabilidad de los irracionales y la no-numerabilidad. Todas estas cuestiones están estrechamente vinculadas a la noción de infinito matemático, propia de un pensamiento matemático avanzado y que requiere, para su comprensión, de contextos educativos que fomenten la reflexión matemática y de un estudio específico. Esto pone en evidencia la relación profunda (y ya manifestada en la historia) entre los números reales y el infinito matemático (Artigue et al., 1995; Bergé, 2008; Fischbein et al., 1994; Sierpinska, 1985; Tall, 2001).

Las generalizadas dificultades del estudiantado de secundaria y universidad en este campo podrían, además, atribuirse a que los números irracionales fueron conceptualizados en la matemática respondiendo a necesidades netamente teóricas (Bergé, 2008; Bergé y Sessa, 2003), de las que resulta difícil que los y las estudiantes se apropien como auténticos problemas. En estas cuestiones se encuentran las raíces del propio método matemático, ya que muchos de estos conceptos son axiomáticos o se fundamentan en demostraciones matemáticas que implicarían una aceptación de la demostración como validación de los conocimientos. Es sabido que esta visión de la demostración no es común siquiera en los y las estudiantes más avanzados (Balacheff, 1987; Montoro, 2010; Tall, 2013).

En cuanto a la visión de la completitud de los reales Bergé (2008) da cuenta de un estado inicial, para estudiantes universitarios que no estudiaron la completitud en forma explícita, que corresponde a una visión intuitiva sobre la completitud, no problematizada. En este estado un sujeto opera con los números reales como si las propiedades se verificasen naturalmente y hace uso de ciertos resultados, sin preocuparse por su fundamentación. En tal sentido pueden convivir varias concepciones contradictorias.

A modo de cierre

Destacamos el esfuerzo cognitivo que implica explicitar la naturaleza del número real, así como conceptos abstractos como el infinito o la completitud. Este esfuerzo muestra que, para que los y las estudiantes logren apropiarse de tales conceptos, la enseñanza debe integrar entre sus metas, especialmente en los últimos años de secundaria y primeros de universidad, un trabajo específico y explícito sobre estas nociones complejas. De esta manera, se facilitará la transición de una matemática escolar hacia una matemática avanzada.

Podemos pensar al número real como una construcción cultural e históricamente generada, que nos permite acceder a otros mundos posibles, más allá del mundo (paradójicamente) real de objetos finitos y discretos. La comprensión de este conocimiento numérico no solo exige una reconstrucción mental, sino que la hace posible, generando nuevas formas de pensar y concebir el mundo.

Referencias

[1] Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., y Weller, K. (2014). *Schemas, Their Development and Interaction*. In APOS Theory, (109–135). Springer.

[2] Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P. (1995). *La enseñanza de los principios de cálculo: Problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos.* Ingeniería Didáctica en Educación Matemática, 1, 97–140.

[3] Ausubel, D., Novak, J. y Henesiam, H. (1978/83). *Educational psychology. Holt Rinehart y Winton*. Traducción al español: Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo. Trillas.

[4] Bachelard, G. (1938/1987). *La formation del´Esprit Scientifique*. Vrin. *La formación del espíritu científico*. SigloXXI.

[5] Balacheff, N. (1987). *Processus de preuve et situations de validation*. Educational studies in mathematics, 18(2), 147–176.

[6] Bergé, A. (2008). *The completeness property of the set of real numbers in the transition from calculus to analysis*. Educational Studies in Mathematics, 67(3), 217–235.

[7] Bergé, A. y Sessa, C. (2003). *Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. RELIME, 6(3), 163–197.

[8] Brousseau, G. (1983). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos*. Zaratoga.

[9] Bruno, A. (1997). *La enseñanza de los números negativos: aportaciones de una investigación*. Números, 29, 5–18.

[10] Fischbein E., Jehiam, R. y Cohen D. (1995). *The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers*. Educational Studies in Mathematics, 29, 29–44.

[11] Fischbein, E., Tirosh y Hess, P. (1979). *The intuition of infinity*. Educational Studies in Mathematics, 10, 3–40.

[12] Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. ISBN 90-277-1535-1.

[13] Godino, J. D. (2000). *Significado y comprensión de los conceptos matemáticos*. Uno: Revista de didáctica de las matemáticas, 25. 77–88.

[14] Hiebert, J., y Carpenter, T. (1992). *Learning and teaching with understanding*. In D. grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning. 65–97.

[15] Howard, R, W. (1987). *Concepts and Schemata. An Introduction*. Casell.

[16] Malara, N. (2001). *From fractions to rational numbers in their structure: Outlines for an innovative didactical strategy and the question of density*. In J. Novotna (Ed.), Proceedings of the 2nd Conference of the European Society for Research Mathematics Education, II (35–46).

[17] Merenluoto, K. y Lehtinen, E. (2002). *Conceptual change in mathematics: Understanding the real numbers*. In M. Limon y L. Mason (Eds). Reconsidering conceptual change. 233–258. Kluwer Academic Publishers.

[18] Monaghan, J. (2001). *Young People's Ideas of Infinity*. Educational Studies in Mathematics, 48, 239–258.

[19] Montoro, V. y Ferrero M. (2022). *Diversidad de ideas construidas por estudiantes sobre los números reales, los números irracionales, el orden y la densidad*. RevEM 37(1), 61–92. https://doi.org/10.33044/revem.32442

[20] Montoro, V. (2023) *Comprensión del número real en estudiantes de secundaria y universidad* [Tesis del Doctorado en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, UNCo]. http://rdi.uncoma.edu.ar/handle/uncomaid/17555

[21] Montoro, V. (2005). *Al infinito y más acá: concepciones de estudiantes universitarios*. Infancia y Aprendizaje, 28(4), 409–427.

[22] Montoro, V. (2010). *Concepciones de los estudiantes de profesorado de matemática sobre la demostración*. Epsilon,75(2), 45–55.

[23] Ni, Y. y Zhou, Y. D. (2005). *Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias*. Educational psychologist, 40(1), 27–52.

[24] O'Connor, M. C. (2001). *"Can any fraction be turned into a decimal?" A case study of a mathematical group discussion*. Educational Studies in Mathematics, 46, 143—185.

[25] Palacios-Amaya, M., Bianchi, V. y Montoro, V. (2018). *Estudiantes de escuela secundaria pensando los números racionales.* Revista de Educación Matemática, 33(3), 5–26.

[26] Peled, I. y Hershkovitz, S. (1999). *Difficulties in knowledge integration: Revisiting Zeno's paradox with irrational numbers*. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 30(1), 39–46.

[27] Piaget, J. (1952). *The Child's Conception of Number*, Norton (originally published in 1941).

[28] Piaget, J. e Inhelder, B. (1969). *The Psychology of the Child*. Routledge and Kegan Paul (originally published in 1966).

[29] Pozo, J. (2014) *Psicología del Aprendizaje Humano: adquisición de conocimiento y cambio personal*. Morata.

[30] Sfard, A. (1991). *On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin*. Educational Studies in Mathematics, (22), 1–36.

[31] Sierpinska, A. (1985). *Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite*. Recherches en Didactiques des Mathematiques, 6(1), 5–67.

[32] Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. The Falmer Press.

[33] Sophian, C. (1996). *What's in a Number?* In Children's Numbers, 3–10. Westview Press.

[34] Tall, D. y Vinner, S. (1981). *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*. Educ Stud Math 12, 151—169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

[35] Tall, D. (2001). *Natural and formal infinities*. Educational Studies of Mathematics, 48(2 y 3), 200-238.

[36] Tall, D. (2013). *How Humans Learn to Think Mathematically*. Cambridge University Press.

[37] Tirosh, D., Fischbein, E., Graeber, A. y Wilson, J. (1998). *Prospective elementary teachers' conceptions of rational numbers*. Versión digital recuperada de `http://jwilson.coe.uga.edu/Texts.Folder/Tirosh/Pros.El.Tchrs.html`

[38] Vamvakoussi X. y Vosniadou, S. (2004). *Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach*. Learning and Instruction, 14, 453–467.

[39] Vamvakoussi, X. y Vosniadou, S. (2010). *How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students´ understanding of rational numbers and their notation*. Cognition and instruction, 28, 181–209. DOI: 10.1080/07370001003676603

[40] Vergnaud, G. (1982). *Cognitive and developmental psychology and research in mathematics education: Some theoretical and methodological issues*. For the learning of mathematics, 3(2), 31-41.

[41] Voskoglou, M. y Kosyvas, G. (2012). *Analyzing students' difficulties in understanding real numbers*. REDIMAT,1(3), 301–226.

[42] Vosniadou, S. (Ed.) (2008). *International Handbook of Research on Conceptual Change*. Routledge.

[43] Vygotsky, (1973) *Pensamiento y Lenguaje: Teorías del Desarrollo cultural de las Funciones Psiquicas*. Pleyade.

[44] White, R. T. (1988). *Learning science*. Basil Blackwell.

[45] Zazkis, R. y Sirotic, N. (2010). *Representing and Defining Irrational Numbers: Exposing the Missing Link*. CBMS Issues in Mathematics Education, 16, 1–27.

ISSN 1514-9595 (web)

Misceláneas

ASAMACI y los Congresos MACI: impulsando la Matemática Aplicada en Argentina

Pablo Lotito* y Lisandro Parente♯

*Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires y CONICET, Presidente de ASAMACI

♯Universidad Nacional de Rosario y CIFASIS-CONICET, Vicepresidente 1º de ASAMACI

En este artículo hacemos un breve recorrido sobre la historia, objetivos y actividades de la Asociación Argentina de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial, con especial detalle en la descripción de los congresos MACI.

¿Qué es ASAMACI?

La Asociación Argentina de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial es una organización sin fines de lucro que reúne a estudiantes y profesionales que trabajan en el desarrollo y aplicación de la matemática en contextos industriales, científicos y tecnológicos. Fundada en 2008, ASAMACI busca promover la colaboración interdisciplinaria y fortalecer la presencia de la matemática aplicada en Argentina, tanto en el ámbito académico como en la industria y los procesos productivos.

En este sentido, sus principales objetivos son:

- Fomentar el desarrollo de métodos matemáticos aplicados a la industria, la ciencia y la tecnología.
- Promover el intercambio de ideas entre matemáticos y profesionales de diversas disciplinas.
- Incentivar la formación de jóvenes investigadores en matemática aplicada.
- Difundir el impacto de la matemática en sectores industriales, productivos y científicos.

Entre sus principales actividades, ASAMACI organiza, promueve y patrocina diversos eventos científicos que incluyen congresos, conferencias, talleres, cursos y jornadas de difusión de la ciencia. En particular, el encuentro central de la asociación es el Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial (MACI), una reunión bienal donde se presentan y discuten avances y nuevos desafíos en matemática aplicada. Asimismo, el Taller de Matemática Industrial (TAMI) congrega a grupos seleccionados de estudiantes de grado y representantes de empresas y entes vinculados a la producción para abordar problemas industriales reales mediante herramientas matemáticas.

Además, ASAMACI brinda apoyo a otras reuniones científicas y actividades de divulgación matemática. Entre estas, se han destacado las siguientes:

- VII Congreso Ítalo-Latinoamericano en Matemática Aplicada (ITLA 2012)
- Workshop Latinoamericano en Optimización y Control (LAWOC), ediciones 2016 y 2024.
- Escuela de Matemática de América Latina y el Caribe (EMALCA-Corrientes 2017)

Por otro lado, cuenta con un comité editorial a cargo de la revista Matemática Aplicada, Computacional e Industrial (MACI) que selecciona artículos breves presentados en los congresos MACI, garantizando su calidad mediante un proceso de revisión por pares.

En las siguientes secciones, se abordarán algunos aspectos históricos y se darán más detalles sobre las actividades de ASAMACI. Para más información se puede consultar la página web oficial (ver [1]).

1. Breve historia de ASAMACI

ASAMACI se originó a partir de la Sección Argentina de SIAM (AR-SIAM), la rama local de la Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM, USA). Con el objetivo de contribuir al desarrollo de la matemática en relación con sus aplicaciones, el *Board of Trustees* de SIAM aceptó en julio de 2006, a pedido de un grupo de profesionales de Argentina, la creación de AR-SIAM que, previa aprobación de sus estatutos, comenzó sus funciones en enero 2007 con la presidencia de Rubén Spies, sucedido por Pablo Jacovkis, siendo su actual presidenta Diana Rubio.

Ese mismo año se organizó el primer congreso MACI en la ciudad de Córdoba, en conjunto con el congreso ENIEF organizado por la Asociación Argentina de Mecánica Computacional (AMCA). En esa ocasión se planteó la necesidad de contar con una asociación civil que tuviera personería jurídica y proveyera el marco institucional necesario para el desarrollo de las actividades propuestas. El 31 de octubre de 2008, durante la segunda asamblea anual de AR-SIAM, se aceptó la constitución de ASAMACI y el 19 de mayo de 2009 se obtuvo la personería jurídica en Argentina. Desde ese momento, bajo las presidencias de Rubén Spies y posteriormente Domingo Tarzia, se inicia un proceso de crecimiento y afianzamiento que, con principal anclaje en los congresos MACI, permitió posicionar a la asociación como referente de la Matemática Aplicada en la región.

El 23 de julio de 2011, en la Asamblea realizada en el marco del VII Congreso Internacional de Matemática Aplicada e Industrial, realizado en Vancouver, Canadá, ASAMACI fue aceptada como miembro pleno del International Council for Industrial and Applied Mathematics (ICIAM).

Desde sus inicios, ASAMACI fomentó la integración regional con las asociaciones análogas de Brasil (SBMAC), Colombia (SCM), Ecuador (SecdeM), Paraguay (SMP) y Perú (SPMAC), firmando en 2019 un Acuerdo de Reciprocidad y Colaboración durante el Congreso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, desarrollado en la ciudad de Uberlandia, Brasil. En el marco de esta colaboración, se contó con una representación en el Primer Congreso Latinoamericano de Matemática Computacional e Industrial, realizado en Rio de Janeiro, Brasil, en 2023, y se patrocinó la segunda edición a realizarse en Valparaíso, Chile, en enero de 2026 (ver [2]).

Actualmente ASAMACI cuenta con más de 200 personas asociadas, entre profesionales y estudiantes, contando también con membresías institucionales. Además, ASAMACI reconoce a personalidades destacadas de la Matemática Aplicada que han colaborado con la institución y, en su mayoría, han sido plenaristas invitados en los congresos MACI, otorgando membresías honorarias por sus contribuciones a la disciplina en Argentina y a nivel internacional. Las mismas son propuestas y votadas en las Asambleas Ordinarias de los años impares, que se realizan en el marco de los congresos MACI. La lista de membresías honorarias aprobadas por Asamblea es la siguiente:

Socios honorarios

- Tom Banks (2011)
- Luis Caffarelli (2011)
- John Burns (2011)
- Max Gunzburger (2011)
- Terry Herdman (2011)
- José Mario Martínez (2011)
- Gilbert Strang (2011)
- Domingo A. Tarzia (2017)
- Avner Friedman (2017)
- Lorenzo Fussi (2019)
- Fabio Rosso (2019)
- Claudia Sagastizábal (2021)
- Antonio Fasano (2021)
- Pablo Jacovkis (2021)
- Cleve Moler (2021)
- Mikhail Solodov (2021)
- Hugo Aimar (2023)
- Alicia Dickenstein (2023)
- María Cristina Maciel (2023)
- Mircea Sofonea (2023)

Una recopilación histórica más detallada se encuentra en [3] y el detalle de las distintas comisiones directivas se encuentra en [4].

2. Congresos MACI

Desde 2007, el Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial (MACI) se ha realizado de manera ininterrumpida cada dos años en distintas ciudades de Argentina, promoviendo un enfoque federal que garantiza la participación de estudiantes y profesionales de todo el país.

Estos encuentros constituyen un espacio interdisciplinario que fomenta la interacción entre los distintos actores de la Matemática Aplicada en Argentina y países vecinos.

Además, convocan a plenaristas de reconocimiento internacional, quienes contribuyen con su experiencia y conocimientos al desarrollo de nuevas aplicaciones matemáticas.

Otro objetivo fundamental del congreso es la difusión de la Matemática Aplicada entre estudiantes de Matemática, Computación, Física, Química, Biología, Economía, Ingeniería y disciplinas afines. La intención es contribuir a la formación de profesionales que tengan la capacidad para impulsar la transferencia de conocimientos matemáticos hacia la industria, las empresas y la sociedad en general. Para ello, además de las actividades habituales de un evento científico, el MACI incluye la organización de cursos especializados dirigidos a estudiantes de grado y posgrado, así como la promoción de su participación en concursos de pósteres.

En las últimas ediciones, se incorporaron actividades en Educación Matemática, con un enfoque especial en experiencias que integran la modelización matemática en el aula, enfatizando su importancia como herramienta pedagógica y de innovación en la enseñanza.

Cabe destacar que el congreso ha contado con el financiamiento de CONICET, ANPCyT, SIAM e ICIAM, lo que ha permitido otorgar becas y ayudas económicas destinadas a facilitar la participación de estudiantes y jóvenes investigadores e investigadoras, promoviendo así una mayor inclusión y acceso a la comunidad científica.

El siguiente cuadro presenta información sobre las sedes y plenaristas de los congresos realizados hasta el momento.

Congresos MACI

Congreso	Sede	Plenaristas
I MACI 2007	Universidad Nacional de Córdoba	J. Burns, M. Cerrolaza, E. Cliff, M. Gunzburger, J. Longo, J. M. Martínez, W. Rodi, J. Sanmartin
II MACI 2009	Universidad Nacional de Rosario - Universidad Austral	H. T. Banks, J. Burns, M. Gunzburger, T. Herdman, R. H. Nochetto, V. Pereyra, J. D. Rossi, E. W. Sachs
III MACI 2011	Universidad Nacional del Sur	L. Caffarelli, R. Sánchez Peña, G. Strang, F. Tamarit
IV MACI 2013	UTN FRBA	D. Arnold, T. Heldt, A. Krener, G. Nunes Silva
V MACI 2015	Univ. Nac. del Centro de la Prov. de Buenos Aires	H. T. Banks, P. J. Blanco, M. B. Blaschko, F. A. Milner, V. R. Voller
VI MACI 2017	Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco	J. A. Burns, A. Dickenstein, A. Friedman, L. Fusi, R. Jelstch, F. Louzada, H. Othmer, F. Rosso
VII MACI 2019	Universidad Nacional de Río Cuarto	A. Bandoni, M. Epstein, L. Fusi, F. Rosso, M. L. Schuverdt, D. Tarzia
VIII MACI 2021	Universidad Nacional de La Plata	I. Armendáriz, C. Moler, C. Pons, E. Pujals, C. Sagastizábal, M. V. Solodov, M. Tidball
IX MACI 2023	Universidad Nacional del Litoral	H. Aimar, M. S. Aronna, G. Boente Boente, A. Dickenstein, A. Farina, C. G. Gebhardt, S. Preidikman, F. Rosso, M. L. Schuverdt, M. Sofonea

Próximo Congreso MACI 2025

El X Congreso MACI 2025 se celebrará del 12 al 15 de mayo de 2025 en la Facultad Regional Córdoba de la Universidad Tecnológica Nacional (UTN-FRC), que coorganiza este evento junto con la Facultad de Matemática, Física, Astronomía y Computación de la Universidad Nacional de Córdoba (FAMAF-UNC). El comité organizador está liderado por Karim Nemer (UTN) y Damián Fernández (FAMAF). Además de contar con veinticinco Sesiones temáticas coordinadas por especialistas, cursos cortos y dos mesas redondas sobre Matemática Industrial y Matemática y Machine Learning; el congreso se ve jerarquizado por la participación de seis plenaristas que dictarán las siguientes conferencias:

Conferencias plenarias X MACI

- Francisco Tamarit: *Inteligencia Artificial en la actualidad.*
- Anabella Ferral: *Monitoreo de la calidad del agua mediante imágenes satelitales hiperespectrales.*
- Alejandro Frery: *Introduction to Signal Analysis with Ordinal Patterns.*
- Laura Alonso Alemany: *La ética en la IA.*
- Christian Schaerer: *EDPs, Modelado de sistemas biológicos.*
- Claudia Sagastizábal: *Optimización no diferenciable aplicada.*

Para propiciar la participación, se cuenta con un programa de ayudas económicas para estudiantes y personas asociadas a ASAMACI. Más detalles serán anunciados en la página oficial del congreso (ver [5]).

3. Taller de Matemática Industrial (TAMI)

El Taller de Matemática Industrial (TAMI) se realizó por primera vez en 2010 en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires (UBA) con el impulso de Javier Etcheverry, organizado por el Departamento de Matemática de la Facultad, la Asociación Argentina de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial (ASAMACI) y la Sección Argentina de la Society for Industrial and Applied Mathematics (AR-SIAM). Desde entonces, se han llevado a cabo otras cinco ediciones, siendo la más reciente el VI TAMI, realizado en la Universidad Nacional de Córdoba en febrero de 2025.

El TAMI es una iniciativa que busca fortalecer la interacción entre la academia y el sector productivo, promoviendo la aplicación de herramientas matemáticas en la resolución de problemas industriales reales. Constituye un puente entre la investigación matemática y sus aplicaciones en el mundo productivo, permitiendo a los participantes desarrollar habilidades de modelado, análisis y resolución de problemas en un contexto interdisciplinario y colaborativo.

Dirigido a estudiantes avanzados y graduados de Matemática, Física, Ingeniería y disciplinas afines, el TAMI ofrece un espacio de trabajo intensivo donde los participantes abordan desafíos concretos planteados por empresas y organismos del sector productivo.

Previo al inicio del taller, representantes de la industria (ver cuadro) presentan una serie de problemas reales, de los cuales cada participante elige uno para trabajar en equipo.

A lo largo de la actividad, estos grupos son guiados por investigadores e investigadoras de instituciones académicas y especialistas del ámbito industrial, quienes aportan su experiencia en la formulación y análisis de soluciones.

Al finalizar el taller, cada equipo expone sus resultados y recomendaciones a través de una presentación y un informe detallado. En este documento se incluyen la descripción del problema, las metodologías empleadas, los hallazgos obtenidos y los desafíos enfrentados durante el proceso. Los reportes de los talleres TAMI pueden encontrarse en la sección correspondiente de la página de ASAMACI [6].

Empresas que colaboraron con el TAMI

- Aerolíneas Argentinas
- Aluar
- CRISIL
- GeoNodos
- Indie
- INTI
- Mercado Libre
- Phylum Tech
- Satellogic
- Siderar
- Siemens
- Spinlock
- Tenaris
- Ternium
- Wintershall
- YPF
- Y-TEC

4. Publicaciones

La revista Matemática Aplicada, Computacional e Industrial (MACI) publica los trabajos presentados en los congresos MACI, con el formato de artículos breves. El proceso de selección de trabajos cuenta con un referato por pares coordinado por los responsables de las distintas sesiones de comunicaciones.

La revista está dirigida por la Dra. María Cristina Maciel y cuenta con un comité editorial integrado por:

- Carlos D’Attellis, Univ. Favaloro – UNSAM, Buenos Aires
- Pablo Jacovkis, UBA, Buenos Aires
- Sergio Preidikman, CONICET – UNC, Córdoba
- Diana Rubio, UNSAM, Buenos Aires
- Rubén Spies, IMAL (CONICET – UNL), Santa Fe
- Juan Santos, CONICET-UNLP, La Plata
- Domingo Tarzia, CONICET – UA, Rosario
- Cristina Turner, CONICET – UNC, Córdoba

Las 9 ediciones de la revista se encuentran en la sección correspondiente de la página de ASAMACI (ver [7]).

Referencias

[1] *Sitio web de ASAMACI*, Disponible en: `http://asamaci.org.ar`

[2] *Congreso LACIAM 2026*, Disponible en: `https://asamaci.org.ar/2nd-latin-american-congress-on-industrial-and-applied-mathematics/`

[3] *Historia de ASAMACI*, Disponible en: `https://asamaci.org.ar/nosotros/#asamaci`

[4] *Comisión Directiva de ASAMACI*, Disponible en: `https://asamaci.org.ar/nosotros/#comision-directiva`

[5] *Congreso MACI 2025*, Disponible en: `https://asamaci.org.ar/maci2025/`

[6] *Taller de Matemática Industrial (TAMI)*, Disponible en: `https://asamaci.org.ar/tami/`

[7] *Revista MACI*, Disponible en: `https://asamaci.org.ar/revista-maci/`

▶ Ir al índice general

NOTICIERO

ISSN 1514-9595 (web)

Diálogos

Entrevistas a integrantes de la comunidad matemática

Entrevistado: Víctor Fernández

Víctor Fernández es Licenciado en Matemática por la Universidad Nacional de San Juan (UNSJ) y Doctor en Filosofía por la Universidad de Campinas. Es Profesor titular, con dedicación exclusiva, del Departamento de Matemática de la Facultad de Filosofía, Humanidades y Artes (UNSJ).

Por Antonio (Nino) Cafure
Universidad Nacional de General Sarmiento – CONICET

Extracto de la entrevista publicada el día 4 de mayo de 2024 en su canal de YouTube Matemática Sentimental.

La lógica de la profesión

Fuiste uno de los primeros ingresantes a la licenciatura en matemática de la Universidad Nacional de San Juan, allá por 1990. Como toda carrera que recién empieza, eso tiene pros y contras. ¿Podés recordar algo sobre esos inicios?

Uno de los promotores de la creación de la licenciatura fue Aldo Figallo, un matemático formado en Bahía Blanca. En esa época, era docente del profesorado de matemática la Universidad Nacional de San Juan. Muchos de los docentes y colegas de Figallo que dictaban clases allí, y que fueron mis primeros profesores en la licenciatura, no tenía formación científica en términos de producción de papers o una tradición de asistir a congresos. Entonces él junto con otros matemáticos formados en la Universidad de San Luis (UNSL) y también docentes del profesorado, concibieron la posibilidad de crear una licenciatura.

Diría que se creó más por la necesidad de crecimiento del propio plantel docente. Inicialmente, era una carrera barata. La carrera se dictaba con los recursos humanos disponibles. Los docentes que ya tenían una formación mínima “taparon los primeros agujeros”. A partir de un momento, y durante casi diez años, vinieron muchos profesores visitantes, y eso estuvo muy bien.

Los profesores que en ese momento dictaban algunas materias casi que las aprendían a la par nuestra. El enfoque era un poco básico. Por ejemplo, leíamos apuntes ya pre-digeridos, con un formato intocable, digamos. Leías la demostración de un teorema y estaba estructurada como una secuencia de pasos inmutable, casi sin discusión. La bibliografía que había en la UNSJ, por las características de la biblioteca, no ayudaba. Recién en tercer año de la licenciatura podría decir que me encontré con materias difíciles; pero no tuve necesidad de cambiar mis hábitos de estudio, que no eran buenos, para aprobar esas materias. No hacía lo que después aprendí a hacer en Brasil porque no era necesario hacerlo. Esto es importante también decirlo: como alumno, no era una persona muy curiosa.

Cuando empezamos a cursar materias más avanzadas fue muy importante el empuje de los profesores visitantes de la UNSL. Por ejemplo, Felipe Zó fue quién dictó el curso de Medida e Integración. Esa experiencia comenzó a inculcarnos cierta cultura matemática que nos permitía percibir que había otras alternativas además de trabajar en el secundario o dictar álgebra lineal para ingenieros. Gracias a estas presencias comenzamos a familiarizarnos con los papers y los congresos, supimos que existían maestrías y doctorados en matemática. De todos modos, me parece que esto no formaba parte de nuestra cotidianeidad. Quizás no era la intención de los profesores mostrarlo de esta forma, pero como alumno, yo consideraba que la maestría y el doctorado debían ser para gente iluminada, cinturón negro cuarto dan.

Sin embargo, hiciste tu maestría y doctorado en la Universidad de Campinas, Brasil. ¿Cómo recordás ese paso de la licenciatura al posgrado?

Esos años fueron una experiencia fantástica. Llegamos a Campinas en 1999: yo, para comenzar la maestría; mi esposa para hacer su maestría en historia y, nuestra hija, para cumplir su primer año de edad en Brasil.

Siempre es valioso conocer otra cultura académica. Lo que más resalto es que aprendí a estudiar de una forma más profesional, una forma que, como alumno de licenciatura, no había experimentado. Leía papers y libros haciendo literatura comparada. Cotejaba varios libros de un mismo tema para comparar definiciones, enfoques. Entendí que muchas definiciones tienen una motivación totalmente natural; que la persona que da una demostración de un teorema tiene un por qué, y ese por qué es muchas veces muy natural y muy intuitivo, es justo lo que necesitaba el “tipo” para demostrar el teorema. Después, claro, se enuncia y se demuestra de una forma que por ahí, parece colgada de la nada.

Me llamó la atención la circulación del conocimiento matemático que tenía lugar, su enorme acervo bibliográfico. La Universidad de Campinas recibía gente de todo Brasil y también mucha gente de Latinoamérica. Aprendí muchísimo con mi estadía en Brasil.

Mientras tanto, en el medio de todo esto, tuvimos nuestra segunda hija. Estábamos encerrados en el departamento, íbamos a la facultad y volvíamos. Tanto mi esposa como yo estábamos enfocados en el estudio. No había mucho tiempo libre pero todo fue muy gratificante.

Con tu viaje a Brasil pudiste reconocer ciertas carencias en tu formación de grado. ¿Cómo se puede compartir esa sensación que vos experimentaste?, ¿tuviste la posibilidad de hablar con tus *viejos* profesores, con tus *viejos* colegas? Seguramente hablás con tus alumnos al respecto.

Converso con mis alumnos al respecto. Siempre traté de ponerme en el lugar de la persona que estaba en San Juan. No solamente por mi caso, sino por lo que representa la llegada de cualquier persona "extraña". A mis alumnos, dentro de lo posible, trato de decirles que es saludable que venga gente de afuera que permita llevar adelante un intercambio "académico genético". Con que *ese* que viene de afuera (que hace análisis, o lógica, o álgebra) sea diferente, ya aprendés.

Claro, a eso me refería, a ese miedo, a ese resquemor, a ese reparo que uno tiene a lo foráneo.

Sí, ese reparo existe. A mí me recibieron muy bien, sin grandes posibilidades de crecimiento inmediato, aunque sí a largo plazo. No sé que habría pasado si yo no hubiese sido de la casa. De todos modos, creo que esto no es privativo de San Juan. No sé si será lo mismo en universidades más grandes. En Brasil sí lo he visto. Hay cierta desconfianza y un miedo natural hacia el que viene de afuera. Hay miedo no solo a la pérdida del trabajo, sino también a la pérdida de lugares de poder; a que venga alguien a imponer condiciones, a "decirnos a nosotros" qué hay que hacer.

Hay otro aspecto de la cuestión que completa una especie de círculo vicioso del que es difícil salir. Para muchos profesores de universidades grandes, no es atractivo irse a universidades más chicas, más alejadas. Un profesor no quiere ir a una universidad periférica, y la periférica tampoco quiere recibirlo. Un negocio redondo.

Al mismo tiempo, me parece que hay algo sobre lo que es necesario hablar. Hay un problema que tiene que ver con quién marca la agenda en los temas académicos. Entiendo que hay universidades que son las que marcan agenda matemática: Córdoba, Buenos Aires, La Plata, Bahía Blanca. Es difícil, por caso, que alguien de La Plata vaya a trabajar a San Juan o La Rioja. Por más que gane bien, por más que tenga buenas condiciones de trabajo, hay una sensación de pérdida sobrevolando: por un lado, se pierde "prestigio"; por otro lado, se pierde el contacto permanente con los matemáticos que se supone que marcan la agenda, se pierde estar al tanto de los temas de investigación que se vienen, etc. Tal vez, esto es un obstáculo para que profesores de universidades grandes se acerquen a universidades alejadas del centro de la escena.

¿Qué planes tenés para el futuro?, ¿qué rumbo te gustaría que tome la carrera de matemática en San Juan?

Dirijo un grupo chico de colegas con diferentes necesidades, desde jóvenes que cursan el último año de la licenciatura, hasta colegas de mi edad. Me gustaría que nuestro grupo pueda aumentar su producción científica. También me gustaría que los grupos de teoría de juegos, de estadística, de análisis, de álgebra experimenten un crecimiento. Me gustaría mucho que los jóvenes puedan tener experiencias similares a la mía y recibirlos cuando vuelvan de sus doctorados en el exterior. Y si no son ellos, recibir a otros matemáticos que deseen instalarse en San Juan, que perdamos ese miedo al que viene de afuera.

Es gracioso porque, por un lado, como dije, me gustaría que creciéramos en investigación, en producción científica, en conocimiento del circuito de investigación en matemática que, aunque ha mejorado mucho en los últimos años, todavía está muy lejos del profesionalismo de otras universidades. Por otro lado, me llama la atención algo que excede a San Juan, pero que observo en muchas universidades, sobre todo fuera de Argentina. Hay una alerta con el exceso de publicación de papers, el famoso *publish or perish*. Se está discutiendo la publicación indiscriminada sin considerar la comprensión ni el disfrute del conocimiento matemático. Aunque San Juan está lejos de esa realidad, de todos modos, comparto esa postura.

Con respecto a la carrera de matemática, me parece que, con el correr de los años, junto a las sucesivas generaciones modificamos para mejor la licenciatura en matemática. Aún con las las falencias que pueda tener nuestra carrera, nuestros alumnos saben que la licenciatura es un primer paso. Y que, incluso el doctorado no es el cierre de la carrera sino que es el arranque. Cuando yo arranqué, no era así; aunque sí existía la autoconciencia de que teníamos que mejorar. Sí, me parece que hemos mejorado mucho en estos más de 20 años.

Ir al índice general

NOTICIERO

ISSN 1514-9595 (web)

Experiencias y herramientas

El objetivo de esta sección es compartir experiencias y herramientas pensadas especialmente para quienes están transitando sus pasos iniciales dentro de la comunidad matemática, ya sea como estudiantes de grado, doctorado o post-doctorado. Para realizar una contribución a esta sección, por favor escribir a `noticiero.editorial.uma@gmail.com`.

Explorando caminos en Matemática: antes y después de graduarse

Estefanía Dalmasso

IMAL (CONICET–UNL) – FIQ (UNL)

“Después de...” es un ciclo de charlas a cargo de graduados y graduadas de la Licenciatura en Matemática Aplicada (LMA) que nació hace casi 15 años. Este seminario lo organiza la Comisión de Supervisión Académica (CSA) de la Facultad de Ingeniería Química (FIQ) de la Universidad Nacional del Litoral.

El objetivo principal de estas charlas es que los estudiantes de la carrera conozcan, de primera mano y sin intermediarios, las diversas oportunidades que existen *después de* recibirse. Cada disertante comienza su exposición relatando cómo tomó la decisión de estudiar la carrera y cómo fue su paso por ella, para luego compartir sus experiencias profesionales y/o académicas tras su graduación. Estas charlas no se limitan a un recorrido biográfico, sino que también incluyen una presentación accesible sobre la matemática involucrada en el trabajo del quien expone. De este modo, todos los estudiantes, desde los iniciales hasta los más avanzados, pueden obtener una visión amplia sobre las aplicaciones y áreas de desarrollo de la disciplina. Además, al finalizar cada charla, y luego de una instancia abierta de preguntas, el disertante se queda a solas con los estudiantes para que puedan realizar consultas más específicas en un ambiente distendido.

Desde la CSA procuramos que la participación sea lo más amplia posible, permitiendo que estudiantes en cualquier etapa de su formación accedan a estas experiencias. Con este propósito se organizan anualmente tres charlas en formato híbrido, algunas de las cuales se graban y se publican en una lista de reproducción del canal de YouTube de la FIQ. A lo largo de los años, hemos contado con la participación de graduados que han seguido carreras académicas y orientadas a la investigación, tanto en Argentina como en el exterior, así como de aquellos que se han insertado en la industria, han trabajado en equipos interdisciplinarios o han combinado la docencia con actividades en el ámbito privado o estatal (pueden ver aquí el listado completo de los disertantes y sus charlas).

Desde 2023, con el inicio de la Licenciatura en Ciencia de Datos (LCD) en la misma facultad, se ha buscado diversificar aún más las temáticas abordadas en las charlas, de modo que también resulten valiosas para los estudiantes de esta nueva carrera, quienes comparten muchas asignaturas de matemática con la LMA.

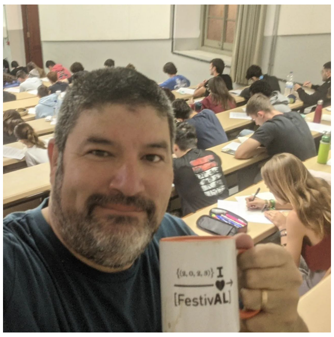
En 2019 la CSA lanzó un nuevo ciclo de charlas denominado “Antes de...” dirigido también a los estudiantes de la LMA y la LCD. En este caso, son los propios estudiantes quienes asumen el rol de disertantes, compartiendo sus experiencias sobre los proyectos en los que trabajan. Este espacio les permite a sus pares inspirarse para realizar pasantías, postularse a becas o definir el tema de su trabajo de fin de grado. El listado de charlas y algunas grabaciones están disponibles para quienes deseen conocer más sobre este ciclo.

Ambos seminarios han resultado sumamente enriquecedores para los estudiantes, quienes encuentran en ellos una valiosa oportunidad para explorar posibles trayectorias profesionales y académicas. Además, les permiten entrar en contacto con personas que pueden convertirse en referentes clave en su formación. Esperamos que esta iniciativa sirva de inspiración para que otras carreras del país implementen actividades similares, brindando a sus estudiantes herramientas concretas para imaginar y construir su futuro, tanto *antes* como *después de* graduarse.

La última clase

Carlos D’Andrea

Universitat de Barcelona



¿Sabemos cuándo será el último día que entremos a un aula, expliquemos una lección de una, dos o tres horas, y acabada la misma dejaremos tiza y borrador al costado del pizarrón, y nos iremos a casa para nunca más volver a hacer lo mismo? ¿Qué haríamos si tuviéramos esa información? ¿Cómo prepararíamos la última clase de nuestras vidas?

Una de las tradiciones más bonitas que tiene nuestro departamento –y por cierto no es el único, más aún, parece ser algo usual en esta parte del planeta– es que de manera casi espontánea sus integrantes asistimos a la última clase del personal docente que está a punto de jubilarse en un acto de respetuosa y cariñosa despedida. Para ello hay que saber que esa persona está por dar esa última clase, claro. Esto suele ser relativamente sencillo porque la asignación docente del departamento se hace en función del personal activo durante todo el semestre, así que en general tu última clase antes de jubilarte será la del final del último semestre completo que trabajes.

Esto suele tener un vértigo especial asociado, porque la última sesión en el aula de alguien al final de su vida laboral no es un evento especial donde se proyecta un PowerPoint o video repasando las luces y sombras de su trayectoria, sino la última clase de un curso regular donde el alumnado –que hace cuatro meses no sabía quién eras, así que no está allí para celebrarte nada– acude un poco cansado y agobiado porque los exámenes finales están a la vuelta de la esquina y quieren saber "qué va a entrar". (No hay que ser especialista en análisis de big data para saber que, en las últimas clases, casi todo lo que se explica se evaluará luego en los exámenes finales, y el alumnado lo sabe.)

Lo distinto de esa última clase es que, poco a poco, el aula comienza a llenarse, primero con l@s que tendrían que estar allí: las personas matriculadas en ese curso. Al mismo tiempo, mezclándonos con ell@s al atravesar la puerta, vamos colegas, ex-alumn@s, familia... personas mayores, a quienes nunca identificamos del todo, que estamos allí para mostrar que la persona que está por entrar y quedarse parada al frente nos importa –algo o mucho–, y queremos que lo sepa. Y también queremos que sepa que, cuando ya no esté aquí, no será lo mismo. Las clases seguirán impartiéndose por otr@s, la vida continuará, pero ya no será igual.

Algunas veces, la persona homenajeada sabe que vendremos a su clase; otras, no. Yo estuve en ambas situaciones. En una de ellas, la última clase era lo que aquí se llama "laboratorio", donde un grupo reducido de estudiantes tiene que pasar a la pizarra para explicar la resolución de algunos ejercicios. Para evitar que el homenaje ocurriera en una clase que, en realidad, no era una clase como tal, la persona responsable de la asignatura —que daba la teoría— inventó una cita médica, lo que hizo a que su última clase la diera quien estaba por jubilarse. Eso mejoró tanto la dinámica de la situación como la del aula. Obviamente, en este caso, la persona homenajeada no tenía idea de lo que se encontraría al atravesar la puerta.

En otra ocasión, fue el propio docente quien vino a preguntarme si me importaba cambiar de aula el último día, ya que su última clase coincidía en horario con una de las mías y se dictaba en un aula más pequeña que la que yo tenía (esperaba bastante gente y no iban a caber). Obviamente lo hice, y me perdí de participar de esa sesión de despedida porque tenía que estar en mi clase, en otra aula, con mi alumnado preparado para indicar a cuanto extraño entrara a esa aula (la que era suya y por ese día nuestra) que tenía que ir a la puerta de al lado y, también, para aplaudir cuando empezáramos a escuchar aplausos.

En cualquier caso tiene su gracia ver la cara del/la profe cuando entra al aula y se encuentra con alumnado + extras. Junt@s pero separados, porque naturalmente va ocurriendo que el alumnado ocupa las primeras filas, como suponemos que siempre lo hacen, y nosotr@s vamos sentándonos al fondo, como una muestra de respeto hacia quienes son l@s verdader@s destinatari@s de la clase y, también, para que no se sientan intimidad@s. Es su clase, y si bien vamos a participar de esa sesión, no estamos allí por el mismo motivo.

Arranca la última sesión. En mi facultad, casi todas duran 50 minutos; así quedan 10 minutos para cambiar de aula y/o de docente entre clase y clase. Y es irónico a veces pensar que para much@s de *l@s viej@s* es la primera vez que vemos dar clases a un/a colega -ya que nunca cursamos con esa persona- y que justo esta clase sea la última que va a dar. Es divertido ver, a veces, cuando le pasa lo que nos pasa a tod@s en algún momento frente a la pizarra: un error de signos, una fracción mal invertida, una ecuación incorrectamente resuelta... y que nadie parezca notarlo excepto algun@s de l@s que estamos detrás, que nos miramos con una sonrisa. Y la emoción, nervios y tensión de quien está al frente, disfrutando quizás de su última clase, pero también sintiendo la presión de ser observad@ por sus pares.

Nuestra sociedad tiene varios de estos *eventos presión* con los que nos pone a prueba a veces. Bodas, fiestas de 15, recepciones, aniversarios... todos son motivos de alegría, pero también conllevan una cierta presión para la persona homenajeada. Aquí, la alegría es agridulce, claro. Vinimos al aula para decirle a alguien que nos importa, aunque se lo estemos diciendo justamente el último día que la veremos trabajando entre nosotros.

Mientras avanza esa última lección uno no puede dejar de pensar que esa persona ya no escribirá en un papel (o tablet en estos tiempos más modernos) lo que va a tener que decir, en un rato, a la clase. Ya no tendrá que batallar con horas de consulta, con la última actualización del campus virtual, con los exámenes, las revisiones, las reevaluaciones. . . Su conexión con el departamento continuará, porque nos seguiremos viendo regularmente en algunas ocasiones sociales especiales donde se invita al profesorado jubilado a participar, pero ya no dará más clases. . . ¿Cómo se siente eso? ¿Alivio? ¿Tristeza? ¿Ambas cosas? ¿Ninguna de las dos?

La clase finaliza como cualquier otra, con una invitación al alumnado para hacer preguntas. Oportunidad que es aprovechada por ell@s para intentar quitarse todas las dudas posibles. Nosotr@s, l@s que observamos desde más atrás, somos testigos en silencio de ese momento mientras nos vamos preparando para lo que seguirá cuando se acabe ese duelo verbal y ocurra lo esperable: el cierre de la sesión y despedida –porque después de todo, se acaba el semestre también–. Allí sí, nos unimos tod@s en un estruendoso aplauso, que suele venir seguido por algunas palabras de alguna autoridad que esté allí presente, unas flores, algún otro regalo, más aplausos. . . Luego, hay que continuar con la emoción del momento en el patio porque en 10 minutos más comenzará otra clase en esa misma aula. La vida sigue. . .

Organizar un Seminario de Alumnes: otra manera de sentir la facultad como una casa

Alejandro Tolcachier

Università degli studi dell'Insubria

Desde el 4 de mayo de 2006, en la FAMAF-UNC[1] se organiza el Seminario de Alumnes, generalmente cada dos semanas durante la época de clases, seguido de un café en la sala de matemáticas. Este seminario, organizado por estudiantes del doctorado en matemática, ofrece un espacio donde les estudiantes puedan exponer e intercambiar ideas, ampliar sus conocimientos en las distintas áreas de la matemática y entrar en contacto con las diferentes líneas de investigación. Además, busca facilitar que especialistas de las distintas áreas de investigación de la facultad compartan los aspectos fundamentales de sus trabajos con les alumnes[2].

Corría el año 2019. Me encontraba en mi primer año de doctorado y asistía al seminario junto con otres doctorandes, aunque muy poques lo hacían regularmente. Ante la falta de candidates para organizar el seminario del año siguiente, junto a Azul Fatalini y Lucas Villagra decidimos tomar la posta para el Seminario de Alumnos/as[3] 2020, en común acuerdo

[1] Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación - Universidad Nacional de Córdoba

[2] Lucas Villagra contó alguna vez que obtuvo una excelente primera impresión de su director al asistir a un seminario de alumnes que este último había dado.

[3] Azul propuso nombrarlo "Seminario de alumnes" para tener en cuenta la paridad de género, y así quedó hasta el día de hoy

con los organizadores de 2019. Esta sería la primera vez que organizaba una actividad en la facultad, una de las primeras veces que me sentía parte de la casa y que sentía que le devolvía a la facultad algo de todo lo que me había dado. Esta sensación de pertenencia a la casa se repetiría al organizar el Seminario de Alumnes 2023, el Seminario de Geometría Diferencial 2023 y 2024, la Competencia CIMA en tres ediciones consecutivas (2022-2024), así como eventos un poco menos formales (aunque no menos significativos): el Prode del Mundial 2022 y de la Copa América 2024.

Aconteció la pandemia: dejamos de ir a la facultad, las funciones holomorfas se volvieron meromorfas, y la virtualidad llegó para quedarse. Sin embargo, esto nos permitió invitar a oradores y oradoras no solamente de la FAMAF, sino de otras partes de Argentina, e incluso del mundo, siempre teniendo en cuenta la paridad de género, la representación de diversos grados de estudio y la diversidad de áreas, aspectos que a lo largo de los años se han tenido en cuenta al seleccionar oradores y oradoras. Además, había aumentado considerablemente la asistencia al seminario (en algún lado anotábamos la asistencia para celebrar la cantidad de gente que asistía), y el café virtual posterior al seminario se volvió de vital importancia. A veces era terapia, otras veces una ventana para saber cómo estaban les otres. Discutíamos las situaciones de las universidades, compartíamos experiencias o simplemente disfrutábamos de vernos las caras. Organizar el seminario resultó ser una actividad divertida y poco demandante (para lo que es la vida en general): coordinar por Whatsapp, pensar oradores y oradoras, mandarles una invitación, mandar el mail para avisar en FAMAF, publicar la información en la página, subir las grabaciones, etc. Los lunes se convirtieron, de algún modo, en uno de los mejores días de la semana (si no el mejor).

Luego vinieron los éxitos del Seminario 2021 (virtual), organizado por Valeria Gutiérrez y Juan Guzmán, quienes lograron un récord de 21 seminarios en el año, y el Seminario 2022 (en formato híbrido), a cargo de Ignacio Bono, Paula Chiapparoli y Lucía Morey.

En el 2023, por alguna razón nuevamente faltaban voluntaries para organizar el seminario, así que junto a Ignacio Bono y Victoria Torres asumimos la tarea, esta vez de manera 100 % presencial. A las tareas habituales se sumó la preparación del café, y decidimos sacar fotos de las charlas para subirlas al Instagram, dándole más difusión y celebrando el hecho de llenar un aula con esta actividad.

Cada año, les organizadores/as imprimen su propio estilo al seminario, pero lo cierto es que ya van casi 19 años del seminario y, en palabras del Dr. Pedro Sánchez Terraf: “es uno de los seminarios más activos de la facultad”. Incluso, gracias al seminario conocí a mi actual novia, aunque quizás eso es tema para otra nota. En fin, esperemos que el seminario viva por muchos años más.

Pueden visitar la página del Seminario de Alumnes y el Instagram del Seminario de Alumnes, donde se encuentran (en mayor parte gracias a Emilio Lauret) TODAS las charlas desde el 2006 hasta la actualidad.

NOTICIERO

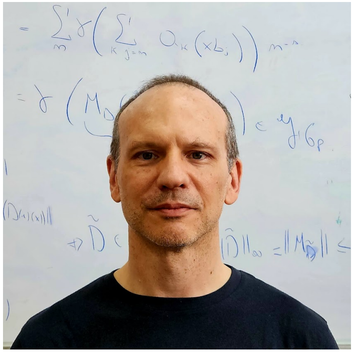
ISSN 1514-9595 (web)

Semblanzas

Vito Volterra, integridad más allá de la ciencia

Daniel Carando

Universidad de Buenos Aires - IMAS-UBA, CONICET



Muoiono gli imperi, ma i teoremi d'Euclide conservano eterna giovinezza.

La vida de película de Vito Volterra comenzó en 1860 en Ancona, una bella ciudad toscana que formaba parte de los Estados Pontificios. Allí nació el 3 de mayo, dos días antes del comienzo de la Expedición de los Mil, liderada por Giuseppe Garibaldi, que tenía como primer objetivo conquistar Sicilia y Nápoles para lograr luego la unificación de Italia. La campaña de Garibaldi fue un éxito y el paso siguiente para la integración italiana era la incorporación de los Estados Pontificios. En septiembre de ese mismo año las fuerzas de Garibaldi comenzaron el asedio de Ancona y era común que el sonido de los cañones sobresaltara el sueño de Vito. La bala de uno de esos cañones impactó en su casa, destrozando su cuna, pero afortunadamente Vito no sufrió ningún daño. Cuando tenía solamente dos años, su padre murió. Él y su madre Angelica sobrevivieron gracias a Alfonso Almagià, un tío materno que trató a Vito como a un hijo. La familia se movía entre Ancona, Turín y Florencia, según la situación laboral del tío Alfonso. Fue precisamente en Florencia donde Vito comenzó su educación.

A los once años despertó su interés por la matemática al entrar en contacto con los *Elementos de geometría* de Legendre y con la *Aritmética* de Bertrand. A los trece quedó tan fascinado por las novelas *Viaje a la luna* y *Alrededor de la luna* de Julio Verne que se propuso describir matemáticamente la trayectoria de un proyectil sometido a la gravedad de la Luna y de la Tierra. En otras palabras, a los trece años estudió la versión restringida del extremadamente difícil problema de los tres cuerpos. Y si bien presentaría la solución de este cuarenta años después, ya en su adolescencia tuvo la siguiente idea: dividir el tiempo en intervalos pequeños en los que las fuerzas podían considerarse constantes. Este enfoque es estándar hoy en día, pero estamos hablando de un chico de 13 años a finales del siglo XIX. A los catorce años comenzó a estudiar, por su cuenta y sin ayuda, el *Cálculo diferencial* de Bertrand. Dicen que, sin haber tenido acceso a ningún texto sobre cálculo integral, dedujo que para resolver ciertos problemas de física necesitaba utilizar la operación inversa a la diferenciación que acababa de aprender. Sin saberlo, Vito tenía su primer encuentro con las integrales.

Debido a la difícil situación económica de la familia, Alfonso y Angelica decidieron enviar a Vito con un pariente lejano, Edoardo Almagià, para que comenzara a trabajar con él. Edoardo, un ingeniero exitoso que sabía juzgar a la gente, enseguida reconoció la excepcional capacidad de Vito y, en lugar de darle trabajo, prefirió impulsarlo a una carrera científica.


Foto de Wikipedia

Ahora empieza la parte más conocida de la historia de Vito Volterra: su carrera científica como físico y matemático y sus numerosos logros. Entre sus principales aportes podemos destacar los relacionados con las ecuaciones integrales y diferenciales, la teoría de la elasticidad y la biología matemática. Hoy hablamos de los operadores de Volterra, de las ecuaciones de Volterra o del modelo predador-presa de Lotka-Volterra. Sobre el origen de este último, el biólogo Umberto D'Ancona, quien sería años más tarde su yerno, le comentó sobre una zona del Adriático en la que, tras la guerra, la pesca era mucho más escasa que antes. Lo extraño era que durante el conflicto no se había pescado en la región, por lo que todos esperaban que hubiera una gran cantidad de peces. Lo que para muchos hubiera sido una anécdota curiosa, a Vito lo impulsó a desarrollar el modelo predador-presa con el que pudo explicar el fenómeno y que, además, tuvo y sigue teniendo aplicaciones en distintos campos de las ciencias y la tecnología.

Otra de las grandes contribuciones de Volterra a la matemática fue su novedosa manera de encarar ciertos problemas, algo que dio origen a un área de la matemática que no siempre asociamos a él. Su idea fue considerar a las funciones (las que modelan un fenómeno físico, por ejemplo) como elementos de un conjunto donde opera otra función. A las funciones que operan sobre espacios de funciones, hoy las llamamos operadores o funcionales. Y llamamos análisis funcional a la rama de la matemática que hace análisis en espacios de funciones (y en otros espacios abstractos). Podemos decir, entonces, que Vito Volterra inventó el análisis funcional. Y esto ya lo dijeron hace tiempo dos grandes de la matemática. Fréchet escribió que "el análisis funcional, creado por el Sr. Volterra, tiene como objeto esencial el estudio de las funciones que hacen corresponder [...] a cada función ordinaria, un número determinado". Y Banach dijo que "la teoría de operadores, creada por V. Volterra, tiene por objeto el estudio de funciones definidas en espacios de dimensión infinita. [...] Esta teoría merece pues con razón [...] el interés creciente que le dedican los matemáticos".

Vito Volterra, además de un gran científico, fue un destacado impulsor de la ciencia: dirigió academias, estructuras universitarias y distintas instituciones científicas y tecnológicas. Fue fundador del *Consiglio Nazionale delle Ricerche*, cuyo objetivo era integrar (sí, siempre integrar) a los distintos centros de investigación de Italia, y de la Sociedad Italiana de Física. Parte de esta promoción de la ciencia la realizó desde su cargo de senador del reino, que obtuvo en 1905. Una curiosidad: Vito formó parte de la comitiva italiana que visitó la Argentina con motivo del centenario de la Revolución del Mayo. Aprovechando su visita, la Sociedad Científica Argentina lo invitó a dar una conferencia, que finalmente fueron dos. Una fue sobre sus aportes: "Funciones de líneas, ecuaciones integrales e integro-diferenciales" (las funciones de líneas son lo que hoy llamamos funcionales). El título de la otra fue “Espacio, tiempo y masa según las ideas modernas”. Es bastante probable, aunque difícil de demostrar, que Vito Volterra haya dictado tanto la primera conferencia sobre análisis funcional como la primera sobre relatividad en suelo argentino.

Los años 20 en Italia fueron tiempos complejos y Vito no fue indiferente a lo que estaba sucediendo en su país. En 1922, desde el senado, se manifestó en contra del movimiento fascista (este fue el año de la marcha sobre Roma que llevaría a Mussolini al poder). Votó en contra de la reforma educativa propuesta por el régimen de Mussolini y firmó, en 1926, el *Manifesto degli intellettuali antifascisti* redactado por Benedetto Croce. Como consecuencia, pasó a ser una persona bajo vigilancia y, en 1927, le quitaron la presidencia del *Consiglio Nazionale delle Ricerche*. Como prueba adicional de su valentía e integridad, cuando en 1931 los profesores universitarios italianos fueron obligados a jurar fidelidad al régimen, Vito Volterra fue uno de los doce (doce en toda Italia) que se negaron a hacerlo. Fue expulsado de la universidad, de las academias y las organizaciones científicas a las que pertenecía. Cuando murió en 1940, las instituciones que había fundado o dirigido no le dedicaron ninguna reseña. La noticia de su muerte llegó a nuestro país cuando el volumen VII de la revista de la Unión Matemática Argentina estaba en prensa, pero dio tiempo a agregar una nota refiriéndose a la pérdida del gran científico. En su tumba, se lee la frase *Muoiono gli imperi, ma i teoremi d’Euclide conservano eterna giovinezza* (Mueren los imperios, pero los teoremas de Euclides conservan la juventud eterna). Según Google scholar, hay más de 10 mil artículos de 2024 en los que se menciona a Volterra. Su legado y sus ideas se mantienen notablemente jóvenes.

CRONICA

PROFESOR VITO VOLTERRA (1860 - 1940)

Ya en prensa este número anuncia el cable el fallecimiento del profesor Vito Volterra, una de las figuras más excelsas en el campo de las ciencias exactas, a las que ha impulsado considerablemente en variados rumbos con las creaciones de su genio. El prodigioso desarrollo alcanzado por el Análisis funcional, que parece llamado a ser una de las ciencias características de nuestro siglo, indica la clarividencia de quien hace más de cincuenta años trazó sus líneas generales y adivinó su inmenso porvenir.

La Revista de la Unión Matemática Argentina rendirá en uno de sus próximos números el debido homenaje a esta figura prócer de la ciencia.

Reseña del Volumen VII de la Revista de la UMA sobre la muerte de Volterra

Agradecimientos: a Sara González y Silvia Lassalle por sus sugerencias y comentarios y a Nino Cafure, además, por su cuidadosa lectura y sus consejos de estilo.

Referencias

- Obituary. Vito Volterra, 1860–1940. E. T. Whittaker. The Royal Society
- Vito Volterra, il fondatore del CNR (Consiglio Nazionale delle Ricerche). Institute for Organic Synthesis and Photoreactivity
- Espacio, Tiempo I Masa, según las ideas modernas. Vito Volterra, 1910. Anales de la Sociedad Científica Argentina. Biodiversity Heritage Library
- Crónica. Profesor Vito Volterra (1860 -1940). Revista de la UMA. Instituto de Matemática de Bahía Blanca - CONICET
- Anti-positivismo, ciencias teóricas y relatividad en la Argentina de la década de 1920. A. Gangui y E. L. Ortiz. Revista Brasileira de História da Ciência, Rio de Janeiro, v. 4, n. 2, 201–218, 2011. Sociedade Brasileira de História da Ciência
- Vito Volterra, storia di un matematico politico. di Angelo Guerraggio, 2014. Scienza in rete - La ricerca italiana nel mondo

Ir al índice general

NOTICIERO

ISSN 1514-9595 (web)

Género UMA

Referentes de género

Cuando lo esencial es invisible a las matemáticas

Comisión de Género

El “efecto Matilda” describe cómo los logros de las mujeres en la ciencia han sido sistemáticamente ignorados, minimizados o incluso atribuidos a hombres. Este fenómeno se relaciona con diversos problemas a lo largo de la historia que afectaron a las científicas, tales como la falta de reconocimiento, el reconocimiento tardío, la menor visibilidad en los registros históricos y la descalificación de su trabajo.

Lamentablemente, este efecto no es solo un problema del pasado, ya que los sesgos inconscientes persisten en las instituciones científicas, académicas y profesionales. Es crucial, entonces, contar con estrategias que ayuden a contrarrestar este fenómeno. A continuación, te proponemos algunas de estas estrategias.

Eventos científicos de mujeres

En los últimos años, se han organizado eventos científicos con un enfoque específico en visibilizar y fomentar la participación femenina en las matemáticas. Estos eventos están diseñados para ofrecer un espacio en el que, aunque todas las personas son bienvenidas, la participación como conferencistas, panelistas, entre otros, está reservada para mujeres. De este modo, se crea una plataforma para que las matemáticas puedan discutir sus desafíos, compartir logros y establecer redes de apoyo. Algunos ejemplos de estos eventos son:

- **El Congreso Internacional de Mujeres Matemáticas (ICWM)**: Este congreso es uno de los más importantes a nivel mundial y se celebra cada cuatro años, como parte del Congreso Internacional de Matemáticos (ICM).
- Eventos **regionales** organizados por diferentes agrupaciones de mujeres en matemáticas como por ejemplo: **Encuentros de mujeres matemáticas en América Latina (I Oaxaca 2016, II Valdivia 2018, III Tunja 2023), los de la Comisión de Género y Equidad de UMALCA,** en el marco de las reuniones CLAM u otras actividades, **European Women in Mathematics (EWM)** y **Association for Women in Mathematics (AWM)**.
- **Eventos de Género y Diversidad: Latin American and Caribbean Workshop on Mathematics and Gender, Oaxaca 2022.**

- A nivel local, y con motivo del **12M**, día en que se celebra el Día Internacional de las Mujeres en Matemáticas encontramos en muchas universidades diversas actividades organizadas localmente:
    - → Universidad de Buenos Aires
    - → Universidad Nacional de Córdoba
    - → Universidad Nacional de General Sarmiento
    - → Universidad Nacional de La Plata
    - → Universidad Nacional del Litoral
    - → Universidad Nacional de Salta
    - → Universidad Nacional de San Luis
    - → Universidad Nacional del Sur

Entre estos eventos se suele incluir tanto presentaciones y charlas sobre problemáticas de género -que contribuyen a visibilizar estas cuestiones- como comunicaciones y conferencias científicas impartidas por mujeres, que resaltan y visibilizan sus avances en investigación. Además, por su naturaleza, fomentan la creación de redes de apoyo y mentoría, promoviendo activamente modelos a seguir.

Si tu universidad realiza un evento de este estilo, te invitamos a que nos compartas la información para darles difusión en las redes.

Conociéndonos mejor: el mapa

Desde el año 2021 trabajamos en la elaboración de un **mapa de mujeres matemáticas**. Este mapa está disponible en nuestra página, en la sección Red de Matemátic@s", con el objetivo de conocernos y conectarnos mejor como colaboradoras, comunicadoras, panelistas, juradas, entre otras. Iniciado por Sonia Acinas, hoy se sigue completando desde el grupo de Visibilidad de la Comisión de Género de UMA. Si estás interesada en formar parte de nuestra red, solo necesitas completar el formulario disponible en nuestra página.

Elaboración de registros (estadísticos e históricos)

Desde el Eje de Estudios de Género de la Comisión de Género se ha realizado una recolección de datos de algunas universidades, relevando la cantidad de mujeres en instituciones, las proporciones de acuerdo a los cargos. Similares iniciativas ya habían sido realizadas en algunas sedes, por ejemplo Rosario y UBA (y presentados los resultados en el primer Congreso Internacional de Género en CTI, Santa Fe 2019 que reunió a más de 200 participantes y a las referentes más influyentes de Estados Unidos, Europa y América Latina).

Por otro lado, uno de los problemas derivados del efecto Matilda es la falta de registros históricos sobre los logros de las mujeres matemáticas. A menudo, cuando se publican artículos sobre el tema, las matemáticas contemporáneas argentinas no son mencionadas. Por esta razón, la Comisión Directiva de la UMA propuso llevar a cabo un relevamiento de mujeres matemáticas argentinas, con el objetivo de destacar a aquellas que han contribuido al desarrollo de las universidades y la investigación matemática en el país.

El objetivo es visibilizar a las mujeres que, a lo largo de la historia, han dejado una huella significativa en el campo de las matemáticas y en la educación matemática de Argentina.

A través de nuestra red de referentes, nos estamos comunicando con secretarías locales, universidades e institutos para recolectar información sobre las matemáticas de cada institución. Si deseas ver los resultados del relevamiento que hemos obtenido hasta ahora, puedes visitar la sección de noticias en nuestra **página web aquí,** donde podrás encontrar el video que fue presentado en la reunión de **Catamarca 2024**.

ISSN 1514-9595 (web)

Competencia Interuniversitaria de Matemática Argentina

CIMA 2024 y pirámides de naranjas

Iván Angiono
FAMAF – Universidad Nacional de Córdoba,
CIEM–CONICET

Nuevo año, nueva CIMA. En el 2024 tuvimos la edición número 11 de esta competencia de problemas para estudiantes universitarios, cuyo nombre oficial es Competencia Interuniversitaria de Matemática Argentina. Se realizó el 28 de agosto y participaron más de 40 equipos (recordemos que se puede participar individualmente o en pareja) de distintas universidades del país. Como ya se mencionó en los anteriores artículos sobre la CIMA, la prueba pretende brindar un espacio donde los estudiantes piensen libremente problemas de distintos tópicos y, en caso que decidan participar en pareja, colaboren en equipos a la resolución de los mismos.

Para aquellos que ya tuvieron experiencias en olimpíadas en el secundario, la CIMA les permite rememorar esas pruebas, ahora ya con una mayor formación en matemática; para los que no lo hicieron, es un lugar distinto para pensar problemas, que normalmente no se tiene en el día a día de las carreras universitarias. Más allá de esas cinco horas de prueba, el momento más importante relacionado con la CIMA es el *después de la prueba*: seguir pensando los problemas, discutirlos ya con muchos otros participantes, otros compañeros que no participaron o incluso profesores. Por ejemplo, en Córdoba se suele organizar pocos días después de la prueba una reunión conjunta entre participantes y profesores para comentar algunas soluciones o distintas formas de encarar los problemas como así también pensar los problemas que no salieron. También ha motivado a investigar sobre temas que aparecieron en la prueba. En fin, discutir más matemática.

Uno de los puntos interesantes, que a la vez siempre se busca fortalecer desde la organización de la CIMA, es la condición *federal* de la prueba, tanto con respecto al lugar como a la carrera universitaria. Un sueño a alcanzar es el de tener representantes de todas las provincias, y de muchas carreras. La matemática está en todos lados, en todos los rincones y hasta en los lugares más remotos. En mi caso soy pampeano, hice la carrera de grado en

La Plata para luego continuar en Córdoba. Tuve la suerte de conocer la matemática a partir de las olimpíadas y tal vez por eso me preocupa tanto llevar este tipo de eventos a todos los lugares posibles.

El año pasado me tocó el regreso al jurado luego de 7 años. Con mucha alegría me sumé a las ediciones iniciales de la CIMA siguiendo el gran entusiasmo que tenían Leandro Cagliero y Juan Pablo Rossetti para *crear una continuación de la competencia Paenza*, y con la misma alegría retomé esta tarea.

Como muestra de la prueba del año 2024, les compartimos aquí uno de los problemas, el número 3, junto con la solución hecha por uno de los grupos de estudiantes durante la prueba. Invitamos a los lectores a leer y pensar todos los problemas de este año, que pueden encontrar en la **página web de la CIMA**, y a los estudiantes universitarios a participar en la edición 2025, a realizarse en agosto.

Problema 3. *Se considera el conjunto $\mathcal{A}$ de todos los números naturales de cinco cifras cuya representación decimal se obtiene permutando los dígitos 1, 2, 3, 4, 5. Probar que $\mathcal{A}$ puede partirse en dos subconjuntos de manera que la suma de los cuadrados de los números en cada uno de ellos sea la misma.*

Les dejamos a continuación la solución realizada por el grupo 52378, conformado por Gianni De Rico y Brian Morris Esquivel (Universidad Nacional de Rosario).

Demostración. Un elemento de $\mathcal{A}$ es de la forma $\overline{abcde}$, donde la barra indica la concatenación de dígitos, y $\{a, b, c, d, e\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Notemos que

$$|\mathcal{A}| = 5! = 1200 = 12 \cdot 10.$$

Separaremos los elementos de $\mathcal{A}$ en 10 conjuntos de la siguiente forma:

$$\begin{Bmatrix} \overline{abcde} & \overline{abced} \\ \overline{bcade} & \overline{bcaed} \\ \overline{cabde} & \overline{cabed} \\ \overline{cbaed} & \overline{cbade} \\ \overline{baced} & \overline{bacde} \\ \overline{acbed} & \overline{acbde} \end{Bmatrix},$$

donde cada conjunto se obtiene a partir de las $3! \cdot 2! = 12$ permutaciones de $\overline{abc}$ y $\overline{de}$ del número $\overline{abcde}$.

La diferencia de los cuadrados de los dos números de la primera línea es

$$\begin{aligned} \overline{abcde}^2 - \overline{abced}^2 &= (\overline{abcde} - \overline{abced})(\overline{abcde} + \overline{abced}) \\ &= (100\overline{abc} + 10d + e - 100\overline{abc} - 10e - d)(100\overline{abc} + 10d + e + 100\overline{abc} + 10e + d) \\ &= (9d - 9e)(200\overline{abc} + 11d + 11e) = 1800(d - e)\overline{abc} + 99(d - e)(d + e). \end{aligned}$$

Análogamente, las demás diferencias son:

$$\begin{aligned} \overline{bcade}^2 - \overline{bcaed}^2 &= 1800(d - e)\overline{bca} + 99(d - e)(d + e), \\ \overline{cabde}^2 - \overline{cabed}^2 &= 1800(d - e)\overline{cab} + 99(d - e)(d + e), \\ \overline{cbaed}^2 - \overline{cbade}^2 &= 1800(e - d)\overline{cba} + 99(e - d)(d + e), \\ \overline{baced}^2 - \overline{bacde}^2 &= 1800(e - d)\overline{bac} + 99(e - d)(d + e), \\ \overline{acbed}^2 - \overline{acbde}^2 &= 1800(e - d)\overline{acb} + 99(e - d)(d + e). \end{aligned}$$

Sumando todas, obtenemos que la diferencia entre la suma de los cuadrados de la primera columna con la suma de los cuadrados de la segunda columna es igual a

$$1800(d-e)(\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}-\overline{cba}-\overline{bac}-\overline{acb})=0,$$

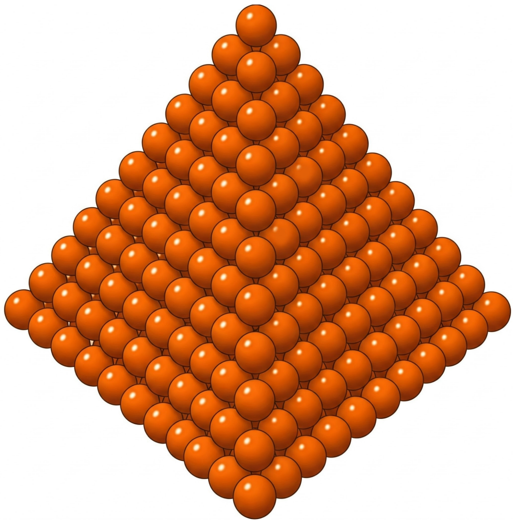
donde el último factor es 0 pues cada dígito aparece una vez sumando y una vez restado en cada una de las tres posiciones (centena, decena y unidad). Se sigue que la suma de los cuadrados de los números de la primera columna es igual a la suma de los cuadrados de los números de la segunda columna.

Eligiendo entonces el conjunto formado por los números de la primera columna de cada uno de los 10 subconjuntos por un lado, y el conjunto formado por los números de la segunda columna de cada uno de los 10 subconjuntos por el otro, tenemos la partición pedida. □

¿Y las pirámides de naranjas? 2024 es suma de los primeros 10 números triangulares:

$$\begin{aligned}&1+3+6+10+15+21+28+36+45+55+66+78+91+105+120\\&+136+153+171+190+210+231+253.\end{aligned}$$

Por lo tanto podríamos hacer una pirámide tetraédrica de 22 pisos con 2024 naranjas:



Pueden animarse a completar este desafío. Y pueden visualizar la CIMA como una pirámide que lentamente, piso a piso, busca seguir creciendo para ayudar a desarrollar y fortalecer el pensamiento matemático en la Argentina.

Sobre el año en curso, ya sabemos que es un cuadrado perfecto, $2025=45^2$, y la suma de los primeros 9 cubos. Pero esas y otras cuestiones quedarán para un próximo artículo...

Agradecimientos. Quisiera agradecer a Juan Pablo Rossetti y Leandro Cagliero, ambos de la Universidad Nacional de Córdoba, por todo lo que han hecho por la prueba; en especial a Juan Pablo por motivarme a regresar al jurado, no es fácil reemplazar a alguien que había estado en todas las ediciones anteriores de la CIMA.

También, a los jurados del año pasado: Rocío Díaz Martín (Tufts University, Estados Unidos), Carlos Di Fiore (Universidad de Buenos Aires), Mauro Subils (Universidad Nacional de Rosario), Luis Ferroni (Institute for Advanced Study, Estados Unidos) y Martín Mereb (Universidad de Buenos Aires. Nuevamente hicieron un gran trabajo realizado y mi vuelta al jurado fue muy fácil por ustedes. Rocío y Mauro, ¡se los va a extrañar! Lo bueno es que tenemos dos grandes incorporaciones, Azul Fatalini (University of Leeds, Reino Unido) y Fiorela Rossi Bertone (Universidad Nacional del Sur), ¡bienvenidas!

▶ Ir al índice general

ISSN 1514-9595 (web)

Distinciones y premios

Andrea Ceretani

La Dra. Andrea Ceretani es especialista en Ecuaciones Diferenciales. Actualmente es Profesora Adjunta de la Universidad Buenos Aires e Investigadora Asistente del CONICET.

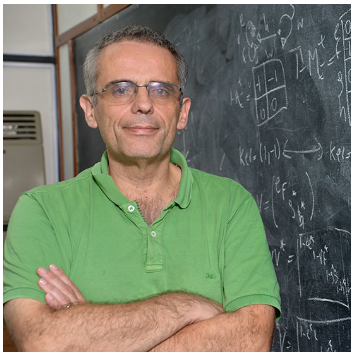
Fue galardonada con el Premio Estímulo de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Octubre 2024.

Miguel Walsh

El Dr. Miguel Walsh es especialista en Teoría Ergódica y Teoría de Números. Actualmente es Profesor Titular de la Universidad de Buenos Aires e Investigador Principal del CONICET.

Fue galardonado con el Premio Salem por sus contribuciones a la teoría ergódica, la teoría analítica de números y el desarrollo del método polinomial, incluyendo un teorema de convergencia para promedios ergódicos no convencionales, límites en la suavidad de Fourier local de funciones multiplicativas y límites en puntos racionales en variedades. Octubre 2024.

Guillermo Cortiñas



El Dr. Guillermo Cortiñas es investigador especialista en K-teoría, Álgebra Homológica y Geometría no-conmutativa. Actualmente es Profesor Titular de la Universidad de Buenos Aires e Investigador Superior del CONICET. Además, es Director del Instituto IMaS UBA-CONICET y socio titular de la UMA.

Ha sido nombrado Fellow de la American Mathematical Society a partir del 2025. Este programa reconoce a miembros que han realizado contribuciones destacadas en la creación, exposición, avance, comunicación y aplicación de las matemáticas. Noviembre 2024.

Recientemente ha sido nombrado Miembro Correspondiente de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Abril 2025.

Alicia Dickenstein

La Dra. Alicia Dickenstein es investigadora especialista en Geometría Algebraica. Actualmente es Profesora Emérita de la Universidad de Buenos Aires e Investigadora Superior del CONICET.

Recibió el Premio Perfil 2024, otorgado por la Editorial Perfil por sus aportes a la ciencia y la tecnología.

ExtraPola

ExtraPola es un grupo de docentes, estudiantes e investigadora/es del Departamento de Matemática de la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Nacional del Litoral dedicado a fomentar la comunicación científica de la Matemática.

El grupo recibió el Premio Dr. Eduardo Braun Menéndez a la Comunicación Científica, otorgado por la Asociación Argentina para el Progreso de las Ciencias (AAPC).

Premio al mejor artículo de la RevUMA

En 2024 se otorgó el Premio al mejor artículo de la RevUMA al trabajo *"Invariants of formal pseudodifferential operator algebras and algebraic modular forms"*, escrito por **François Dumas** y **François Martin.** Ver artículo aquí.

Nuevos socios honorarios de la UMA

En la Asamblea General Ordinaria de la UMA de 2024 fueron nombrados como socios honorarios:

- **Ruben Cerutti**
- **Marisa Gutierrez**
- **Jorge Oviedo**

CIMA 2024

Primer puesto (compartido)

- Federico Mierez y Julian Maximo Cabrera (Universidad Nacional de Rosario).
- Bruno Martín Ziger y Nicolás Ricci (Universidad de Buenos Aires).

Tercer puesto

- Carlos Miguel Soto (Universidad de Buenos Aires).

Cuarto puesto

- Francisco Cirelli y Lorenzo Ruiz Diaz (Universidad de Buenos Aires).

Quinto puesto

- Nicolás Martone y Franco Iotti (Universidad de Buenos Aires).

Menciones de Honor

- Miguel Kalinowski y Mateo Carranza Vélez (Universidad Nacional de Córdoba).
- Gianni De Rico y Brian Morris Esquivel (Universidad Nacional de Rosario).
- Francesco Mozzatti y Matías Raimundez (Universidad Nacional de Rosario).
- Tiziano Brunelli y Eduardo Carranza (Universidad Nacional de Córdoba).
- Vicente Schkolnik Rivas y Aaron Blas Pereda (Universidad Nacional de Córdoba).
- Joaquín Fernández y Juan Perez Garber (Universidad de Buenos Aires).
- Gabriel Bernal Ribotta y Eros Girardi (Universidad Nacional del Litoral).
- Ernesto Salinas Olalla y Jeremías Broin Luque (Universidad Nacional de Córdoba).
- Boris Burd y Numa Grinberg (Universidad de Buenos Aires).
- Ignacio Raimundo Agost y Luca Turi (Universidad Nacional de Córdoba).

Concurso de monografías 2024

Primer puesto

- *“Primos en progresiones aritméticas”*, por Aaron Blas Pereda (Universidad Nacional de Córdoba).

Segundo puesto

- *“Poincaré, Perelman y la conjetura resuelta. Un viaje a través de la topología”*, por Sofía Evelyn Cuva (Universidad Nacional de Córdoba).

Tercer puesto

- *“Escuigonometría. Teoría geométrica de escuírculos”*, por Diego Barrios (Universidad Nacional del Litoral.

Ir al índice general

Noticiero de la Unión Matemática Argentina
http://www.union-matematica.org.ar/noticiero/
ISSN 1514-9595 (en línea)
Volumen 60, Número 1, 2025
noticiero@union-matematica.org.ar