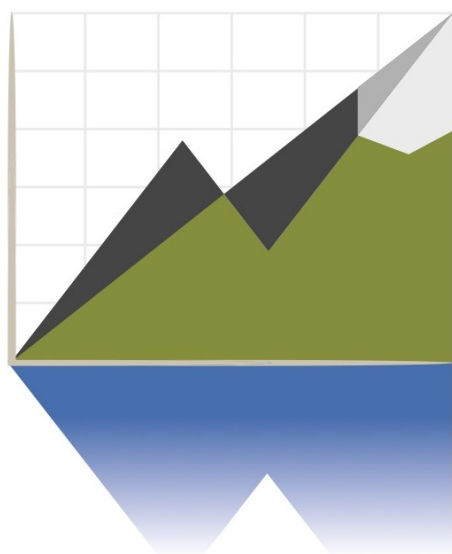


Noticiero de la Unión Matemática Argentina



rsme
uma

- BARILOCHE 2025 -
PATAGONIA ARGENTINA



Índice general

Editorial	3
<i>por Victoria Paternostro</i>	3
Conferencias	4
Conferencias Científicas	4
Conferencias Científicas de la REM	8
Conferencia de Divulgación	12
Conferencia de Clausura	13
LXXIV Reunión de Comunicaciones Científica	14
Resúmenes de las Comunicaciones Científicas	14
Álgebra, Teoría de Números y Topología	14
Análisis Armónico, Real y Teoría de aproximación	22
Análisis Funcional y Complejo	39
Análisis Numérico y Optimización	44
Aplicaciones de la Matemática y Física Matemática	61
Ecuaciones Diferenciales y aplicaciones	80
Estadística, Probabilidad y Ciencias de Datos	95
Geometría y Teoría de Lie	107
Lógica y Computabilidad	115
Matemática Discreta	124
XLVIII Reunión de Educación Matemática	139
Talleres REM	139
Resúmenes de las Comunicaciones REM	147
Experiencias en el Aula	147
Reportes de Investigación	154
Publicaciones REM	160
Relatos de experiencias	160
Reportes de Investigación	245
XXXVI Reunión de Estudiantes	351
Cursos para Estudiantes	351
Mesas Redondas	353
Mesas Redondas de Género y de Industria	353

Actividades de Divulgación**354**

XVII Festival de Matemática	354
Resúmenes de las Comunicaciones de Divulgación	355

Editorial

En los tiempos actuales, marcados por el desfinanciamiento de la ciencia y la educación superior en nuestro país, sostener la realización de la Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina constituye, sin duda, un enorme desafío. En 2025, a esta situación se sumaron la alegría y también la responsabilidad de organizarla de manera conjunta con la Real Sociedad Matemática Española (RSME), fortaleciendo así los lazos históricos y académicos entre ambas comunidades.

La Reunión Anual 2025 se enmarcó en el III Encuentro Conjunto RSME–UMA, que tuvo lugar entre los días 1 y 5 de diciembre de 2025 en la ciudad de San Carlos de Bariloche, Argentina. Manteniendo la tradición, en este número del Noticiario de la UMA recopilamos lo allí actuado.

A pesar de las dificultades, el encuentro fue un éxito rotundo: contó con la participación de más de 650 asistentes y con conferencistas, cursistas y talleristas de primer nivel, tanto de Argentina como de España, quienes ofrecieron un programa científico y académico de gran jerarquía. El paisaje acompañó de manera inmejorable un encuentro tan fructífero como ameno, propiciando el intercambio, la colaboración y la construcción de nuevos proyectos comunes.

Las actividades realizadas en la Reunión fueron las siguientes:

- LXXIV Reunión de Comunicaciones Científicas.
- XLVIII Reunión de Educación Matemática.
- XXXVI Encuentro de Estudiantes de Matemática.
- Mesas Redondas de Género y de Industria.
- Actividades de Divulgación.
- XVII Festival de la Matemática.

Se incluyen todos los resúmenes de las comunicaciones científicas, de educación y de divulgación presentados en el encuentro, así como los títulos y resúmenes de las conferencias dictadas y las descripciones de las distintas actividades desarrolladas. Además, en este número se publican los trabajos completos aceptados para tal fin correspondientes a la Reunión de Educación Matemática.

Queremos destacar especialmente la labor de la organización local, que fue impecable aun trabajando con un presupuesto muy reducido. Su compromiso, profesionalismo y calidez hicieron posible que un encuentro de esta magnitud se desarrollara con excelencia académica y en un clima cordial y estimulante. A todos ellos y a quienes participaron activamente en las distintas instancias del encuentro, nuestro más sincero agradecimiento.

Victoria Paternostro
Directora de Publicaciones



NOTICIERO

ISSN 1514-9595 (web)

Conferencia “Julio Rey Pastor”

UNIFORMIDAD DE FOURIER DE LAS FUNCIONES MULTIPLICATIVAS

Miguel Walsh

Universidad de Buenos Aires

La conjetura de uniformidad de Fourier busca entender qué funciones multiplicativas pueden tener coeficientes de Fourier grandes en muchos intervalos cortos. Vamos a describir el progreso reciente sobre este problema y explicar su conexión con la distribución de los números primos y otros problemas centrales acerca del comportamiento de las funciones multiplicativas, como las conjeturas de Chowla y Sarnak.

TBA

Xavier Tolsa

Universidad Autónoma de Barcelona

TBA



NOTICIERO

ISSN 1514-9595 (web)

Conferencia “Alberto Calderón”

SOLUCIONES EXPLÍCITAS DE LA ECUACIÓN DE YAMABE EN $\mathbb{R}^n$ (Y APLICACIONES)

María Medina

Universidad Autónoma de Madrid

En esta charla analizaremos los ejemplos explícitos de soluciones que cambian de signo que existen para la ecuación de Yamabe, y veremos cómo estos pueden usarse para resolver sistemas elípticos de crecimiento crítico que modelizan interacciones de tipo competitivo.

CONSTRUYENDO SIMETRÍAS CUÁNTICAS

Julia Plavnik

Indiana University

Las simetrías de objetos clásicos (como los sólidos arquimedianos and variedades diferenciables) se describen matemáticamente mediante grupos y sus acciones. Sin embargo, los grupos no suelen ser suficiente para describir simetrías de objetos cuánticos, como los que surgen naturalmente en muchas áreas de matemática y física, entre ellos las álgebras de von Neumann, los grupos cuánticos, la topología de baja dimensión, las álgebras de operadores de vértice, la física de altas energías y la física de la materia condensada. La estructura matemática que unifica estos contextos diferentes son las categorías tensoriales, las cuales son interpretadas como simetrías cuánticas.

En esta charla, comenzaremos presentando algunas definiciones, propiedades básicas y ejemplos concretos de categorías de fusión para familiarizarnos mejor con su estructura. También haremos un recorrido por algunas construcciones de categorías de fusión, y nos focalizaremos en el producto bicruzado, que está inspirado por el producto Zappa–Szép de grupos. Si el tiempo lo permite, mencionaremos algunas preguntas abiertas y otras direcciones de estudio relevantes en el área.

Conferencia “Luis Santaló”

INTERSECCIONES DE RECTAS BORROSAS

Pablo Shmerkin

University of British Columbia

Dado un conjunto finito de rectas en distintas direcciones, ¿cuán chico puede ser el conjunto de todas las intersecciones de pares de rectas? Si todas las rectas pasan por un mismo punto, la respuesta es “uno”. ¿Pero qué pasa si no todas las rectas pasan por un mismo punto? En 1983, J. Beck dio una respuesta completa a esta pregunta. Por ejemplo, demostró que si ningún punto está en la mitad de las rectas, entonces el conjunto de intersecciones tiene tamaño comparable al número de rectas al cuadrado (que es una cota superior trivial).

Después de contar un poco más sobre el Teorema de Beck, voy a introducir una variante borrosa (fuzzy) del problema, en el que rectas y puntos están definidos solo a una cierta resolución pequeña. El resultado que voy a presentar se puede pensar como una versión borrosa del Teorema de Beck y fue obtenido en conjunto con Tuomas Orponen (Jyväskylä) y Hong Wang (NYU–Courant e IHES). Aunque a primera vista puede parecer un problema artificial, resulta estar conectado a muchos problemas muy profundos en análisis y combinatoria; por ejemplo, nuestro resultado juega un rol importante en la monumental resolución de la conjetura de Kakeya en 3D por Hong Wang y Josh Zahl.

SUPERFICIES MÍNIMAS DE GÉNERO FINITO EN $\mathbb{R}^3$

Joaquín Pérez

Universidad de Granada

Tras revisar el papel de los ejemplos mínimos clásicos de Riemann en la teoría de superficies mínimas, explicaremos la clasificación de las superficies mínimas con género cero y topología infinita propiamente embebidas en $\mathbb{R}^3$, que consta de cuatro pasos: el caso periódico, la cuasi-periodicidad del caso con dos finales límite, la no existencia de ejemplos con un final límite y la clasificación final vía la ecuación de Korteweg de Vries. A continuación, revisaremos las técnicas de laminaciones mínimas (estabilidad de hojas límite, resultados sobre singularidades evitables aisladas, teoremas de estructura de laminaciones mínimas). Terminaremos explicando resultados sobre propiedades dinámicas del conjunto de límites por dilataciones de una superficie mínima propiamente embebida de curvatura total infinita, y sobre la conjetura de Hoffman-Meeks y el problema de Calabi-Yau.

Conferencia “Eleonor Harboure”

THE GLOBAL-LOCAL PRINCIPLE IN GROUP REPRESENTATION THEORY

Carolina Vallejo

Universidad de Florencia

In group representation theory, the global-local principle refers to the philosophy that relevant information on the representation theory of a finite group G can be computed looking only at certain, much smaller, specific subgroups of G with a rich normal structure. This philosophy has originated around a series of conjectures, being the McKay conjecture one of the most paradigmatic examples, that state an equality between character-theoretical invariants of G and the same invariants calculated in the normalizer of a Sylow p -subgroups of G . I will explain some of the history, the motivation and the progress on these conjectures.

ESTIMACIONES CUANTITATIVAS Y OPERADORES SPARSE

Gonzalo Ibañez-Firnkorn

Universidad Nacional del Sur

Durante los últimos años, en el análisis armónico real ha cobrado gran interés el estudio de estimaciones cuantitativas óptimas. En particular, nos interesa estudiar cómo cambia el comportamiento, especialmente la continuidad, de un operador integral cuando modificamos la medida del dominio de la función, siempre bajo ciertos criterios.

En esta charla presentaremos la dominación Sparse para operadores integrales, una técnica de acotación puntual reciente y ampliamente estudiada. Su importancia es su gran utilidad en el estudio de acotaciones cuantitativas óptimas con respecto a las constantes de los pesos involucrados, permitiéndonos pruebas más simples de resultados conocidos y obtener resultados para operadores más generales.

Finalmente, mostraremos aplicaciones para operadores integrales clásicos y estimaciones en distintos espacios de funciones.

Conferencias Científicas de la Reunión de Educación Matemática

ACERCA DEL ENFOQUE STE(A)M Y LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN EL CONTEXTO EDUCATIVO

Mónica Villarreal

Universidad Nacional de Córdoba

En esta conferencia se presentan algunas notas sobre la educación STEM, acrónimo en inglés para Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemática, su origen y evolución histórica, la incorporación de Artes y Humanidades y la transformación de la sigla en STEAM, el objetivo educativo que persigue y las razones que han motivado el interés por su implementación en contextos educativos. Se presentan principios clave y requerimientos para una educación STEM integrada de calidad. Se aborda la idea que la modelización matemática puede actuar como un puente que permite integrar significativamente la matemática junto a otras áreas de conocimiento para el abordaje de tareas de tipo STEAM y se discuten criterios para analizar el potencial STEAM de tareas de modelización matemática. Finalmente, se muestran y analizan algunos ejemplos de tareas STEAM.

LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN LA FORMACIÓN INICIAL DOCENTE Y SU PROYECCIÓN EN OTROS NIVELES EDUCATIVOS

María Florencia Cruz

Universidad Nacional del Litoral

La conferencia aborda el potencial de la modelización matemática como abordaje pedagógico en la formación inicial docente, a partir de experiencias educativas y de investigaciones desarrolladas en una universidad pública Argentina. Se destaca cómo la participación en escenarios que integran distintas prácticas de modelización permite al futuro profesorado construir sentidos sobre la enseñanza de la matemática, sobre su rol docente y sobre las oportunidades que ofrece este enfoque. Las experiencias mencionadas no solo nutren e inspiran reflexiones para ámbitos de formación docentes sino también para otros espacios educativos (por ejemplo, escuelas secundarias o primarias), poniendo especial atención en la construcción de sentido de lo que se enseña y el lugar de quienes aprenden, con el propósito de examinar o reexaminar ideas vinculadas al propio quehacer matemático. En lo posible y a fin de recuperar mis acciones actuales, se rescatará alguna experiencia que he desarrollado en el ámbito español y chileno.

PENSAMIENTO COMPUTACIONAL Y EDUCACIÓN: LA LÓGICA DEL FUTURO

Irene Díaz

Universidad de Oviedo

El pensamiento computacional (PC) [2,9] es cada vez más reconocido como una habilidad fundamental para todas las personas, no solo para los técnicos. Implica los procesos mentales utilizados para formular problemas y soluciones de manera que puedan ser ejecutados por máquinas. A medida que la tecnología se integra cada vez más en la vida cotidiana y en la educación, comprender y enseñar el pensamiento computacional se ha convertido en un objetivo clave, porque representa una competencia esencial para la ciudadanía en la sociedad digital. Su incorporación efectiva en el ámbito educativo requiere una profunda revisión conceptual y metodológica. Se presenta aquí una redefinición del PC [3] basada en tres pilares fundamentales: algoritmos, resolución de problemas y datos. Esta nueva perspectiva pone especial énfasis en la centralidad de los datos, tradicionalmente relegada frente a enfoques más centrados en la programación, y permite comprender el PC no solo como una técnica, sino como una forma de pensar que atraviesa disciplinas y contextos. Este enfoque plantea un reto clave para los formadores: no basta con dominar los contenidos

técnicos, sino que es necesario comprender los fundamentos conceptuales del pensamiento computacional y saber traducirlos didácticamente en experiencias de aprendizaje significativas. Los docentes necesitan formación específica que les permita identificar y trabajar los componentes del PC, para poder trabajar el pensamiento computacional en todas las etapas educativas, desde la educación infantil hasta la formación superior, proporcionando a los estudiantes herramientas para comprender y desenvolverse en el mundo del siglo XXI[1,7]. En este marco ampliado, la inteligencia artificial (IA) emerge como una de las expresiones más sofisticadas del pensamiento computacional contemporáneo. Sus fundamentos reposan precisamente sobre los tres pilares mencionados: se diseñan algoritmos para resolver problemas complejos a partir de grandes volúmenes de datos. Así, la IA puede verse como una manifestación avanzada de cómo el pensamiento computacional se articula en la práctica [8]. Se presentarán ejemplos que muestren que el pensamiento computacional constituye una herramienta cognitiva poderosa para interpretar y actuar en el mundo digital. Incorporarlo en el aula con una mirada crítica y contextualizada es una tarea pedagógica fundamental para el presente y el futuro de la educación [4,5,6].

Referencias

- [1] Angeli, C., and Giannakos, M. (2020). *Computational thinking education: Issues and challenges*. Comput. Hum. Behav., 105, 106185. <https://doi.org/10.1016/j.chb.2019.106185>
- [2] Li, Y., Schoenfeld, A., diSessa, A., Graesser, A., Benson, L., English, L., and Duschl, R. (2020). *Computational Thinking Is More about Thinking than Computing*. Journal for Stem Education Research, 3, 1–18. <https://doi.org/10.1007/s41979-020-00030-2>
- [3] Palop, B., Díaz, I., Rodríguez-Muñiz, L.J., and Santaengracia, J. J. (2025). *Redefining computational thinking: A holistic framework and its implications for K-12 education*. Education and Information Technologies, 26(6), 6751–6770. <https://doi.org/10.1007/s10639-021-10519-3>
- [4] Palop, B., Santaengracia, J. J., and Rodriguez-Muniz, L. J. (2022). *Conceptualization of computational thinking in the elementary school mathematics syllabus under the LOMLOE*. INVESTIGACION EN EDUCACION MATEMATICA XXV, 623.
- [5] Santaengracia, J. J., Palop del Río, B., Rodríguez Muñiz, L. J., and Miguens, A. L. (2024). *¿Donde está pensamiento el computacional?: análisis de tareas diseñadas por maestros/as en activo*. II Congreso Internacional de Investigación, Transferencia e Innovación en Educación: Libro de actas, 21–23.
- [6] Santaengracia, J. J., Aguilar-González, Á., Palop, B., and Rodríguez-Muñiz, L. J. (2024). *Conocimiento especializado de estudiantes para maestro/a en una tarea sobre pensamiento computacional*. En Investigación en Educación Matemática XXVII.
- [7] Santaengracia, J. J., Palop del Río, B., and Rodríguez Muñiz, L. J. (2023). *Percepciones del profesorado sobre pensamiento computacional: estudio de una formación*. Investigación en Educación Matemática XXVI: Logroño, 6, 7 y 8 de septiembre de 2023, 491–498.
- [8] Shih, W. (2019). *Integrating Computational Thinking into the Process of Learning Artificial Intelligence*. Proceedings of the 3rd. International Conference on Education and Multimedia Technology. <https://doi.org/10.1145/3345120.3345134>
- [9] Wing, J. (2010). *Computational Thinking: What and Why?*

EXPERIENCIAS DE DIVULGACIÓN Y TRANSFERENCIA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Pablo Beltrán Pellicer
Universidad de Zaragoza

Los últimos desarrollos curriculares en España han vuelto a poner de manifiesto la necesidad de una transferencia real de resultados de investigación en didáctica de las matemáticas hacia la práctica docente. En esta conferencia se presentarán experiencias concretas de transferencia que se han llevado a cabo desde la Universidad de Zaragoza, tanto desde el Grupo de Investigación en Educación Matemática como a través de la Cátedra Math Bits de Educación Matemática. Una de estas iniciativas son los grupos de Telegram que han sido creados alrededor de propuestas didácticas surgidas directamente de líneas de investigación y tesis doctorales. Estas comunidades virtuales permiten la interacción directa entre investigadores y docentes en ejercicio, promoviendo un intercambio fluido y dinámico de ideas y experiencias. Al mismo tiempo, las

propuestas didácticas evolucionan y se amplían. Por otro lado, entre los objetivos de la Cátedra Math Bits de Educación Matemática se incluye el investigar acerca de la puesta en práctica de propuestas didácticas alineadas con orientaciones didácticas que surgen de resultados de investigación. En paralelo, se ha creado un podcast, titulado «Ábacos y geoplanos» que busca hacer una divulgación clara, accesible y atractiva de sobre educación matemática, acercando las investigaciones y prácticas de aula innovadoras a una audiencia más amplia. Por último, aunque “transferencia” es el término que se utiliza en el ámbito académico universitario, creemos que sería mejor hablar de colaboración y enriquecimiento, puesto que el establecimiento de sinergias redundaría en la creación de redes de innovación e investigación situada.

PROBLEMAS DE FERMI: RETOS Y OPORTUNIDADES PARA INTRODUCIR LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA Y SECUNDARIA

Carlos Segura
Universidad de Valencia

La competencia matemática se puede definir como la habilidad para comprender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de situaciones en las que las matemáticas juegan o pueden jugar un papel [8]. La resolución de problemas matemáticos conectados con la realidad es uno de los pilares de este enfoque, cuyo objetivo último es formar una ciudadanía crítica y preparada para comprender el mundo. En particular, los problemas de modelización son aquellos que implican tránsitos de ida y vuelta entre la realidad y las matemáticas [9]. Estos tránsitos requieren completar el ciclo de modelización, esto es: saber simplificar, estructurar y cuantificar el contexto real (ida), pero también interpretar el resultado obtenido mediante procedimientos matemáticos y validarlo en su contexto (vuelta). Pese a su relevancia en los programas educativos de muchos países del mundo [3], los problemas de modelización siguen teniendo escasa presencia en las aulas de educación secundaria, y aún menos en las de primaria. Gran parte de los docentes declaran tener dificultades para seleccionarlos, implementarlos y evaluarlos. Además, aunque existen autores que señalan que los contextos reales son motivadores para los estudiantes [2], muchos docentes piensan que su dificultad podría desanimarles. El primer objetivo de esta conferencia es mostrar y discutir una caracterización y clasificación de los problemas de modelización que dote al profesorado de instrumentos para su selección y formulación [7]. Además, se explicarán algunos resultados de investigaciones empíricas recientes que proporcionan evidencias sobre el impacto de distintos tipos de problemas de modelización en el rendimiento y en aspectos motivacionales (interés, confianza, valor, etc.) de los estudiantes [5]. Por ejemplo, la cantidad de información de los problemas (problemas con exceso de datos frente a problemas sin datos) parece ser una variable importante. En este sentido, los problemas de Fermi, que presentan una situación real sin datos en la que deben realizarse suposiciones, estimaciones parciales razonadas y cálculos simples para obtener la estimación de una magnitud inalcanzable de manera directa, ofrecen una oportunidad para introducir la modelización en educación primaria y secundaria [12]. El segundo gran objetivo de esta conferencia es ofrecer un panorama sobre el uso de estos problemas en educación matemática, abordando los siguientes aspectos:

- Mostraremos distintos ejemplos y haremos énfasis en que se trata de problemas con múltiples estrategias de resolución [11].
- Fundamentaremos la relevancia de trabajar los problemas de Fermi en secuencias en lugar de manera aislada, pues permiten desarrollar distintas competencias de los estudiantes. Por ejemplo, se pueden introducir secuencias en las que el contexto real promueve la flexibilidad de los estudiantes [11], es decir, la capacidad de usar distintas estrategias cambiando de un problema a otro para adaptarlas a sus características contextuales. Esto es relevante porque la flexibilidad es una habilidad esencial de la competencia matemática [6].
- Explicaremos una clasificación de tipos de error cometidos en estos problemas [10] que permite medir el rendimiento de los estudiantes. Muchos de estos errores están vinculados con carencias en el conocimiento previo de medida y estimación de magnitudes, por lo que discutiremos algunos resultados recientes sobre el efecto de este conocimiento previo y de la flexibilidad en el rendimiento cuando se resuelven problemas de Fermi [12].
- Fundamentaremos el uso de otro tipo de secuencias (upscaling) en las que se busca que los estudiantes desarrollen estrategias cada vez más complejas [1]. Mostraremos algunos estudios recientes sobre el impacto del entorno de resolución en el rendimiento y aspectos motivacionales de los resolutores [4]. Así, destacaremos la importancia de que los estudiantes experimenten en la localización real de los problemas, a modo de ruta matemática, en lugar de evocarlos desde el aula. Y también discutiremos el papel de la IA como soporte en su resolución.

Con este panorama sobre los problemas de Fermi esperamos abrir vías para seleccionar e implementar problemas de modelización en educación primaria y secundaria de manera efectiva, con un conocimiento específico de su impacto en determinados aspectos cognitivos y afectivos vinculados al desarrollo de la competencia matemática de los estudiantes.

Referencias

- [1] Albarracín, L., Segura, C., Ferrando, I., and Gorgorió, N. (2022). *Supporting mathematical modelling by upscaling real context in a sequence of tasks*. Teaching Mathematics and its Applications, 41(3), 183–197.
- [2] Boaler, J. (1993). *The role of contexts in the mathematics classroom: Do they make mathematics more “real”?* For the Learning of Mathematics, 13(2), 12–17.
- [3] Cevikbas, M., Kaiser, G., and Schukajlow, S. (2022). *A systematic literature review of the current discussion on mathematical modelling competencies: State-of-the-art developments in conceptualizing, measuring, and fostering*. Educational Studies in Mathematics, 109, 205–236.
- [4] Gallart, C., Segura, C. and Albarracín, L. (2025). *Impacto del entorno de resolución de problemas de Fermi en la complejidad y flexibilidad de las estrategias de maestros en formación*. Contextos educativos, 35.
- [5] García-Cerdá, C., Segura, C., and Ferrando, I. (2024). *Influence of the Type of Mathematical Problems on Students’ and Pre-service Teachers’ Interest and Performance. A Replication and Elaboration Study*. Implementation and Replication Studies in Mathematics Education, 4(1), 125–159.
- [6] Heinze, A., Star, J. R., and Verschaffel, L. (2009). *Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education*. ZDM the International Journal on Mathematics Education, 41, 535–540.
- [7] Maaß, K. (2010). *Classification scheme for modelling tasks*. Journal für Mathematik-Didaktik, 31 (2), 285–311.
- [8] Niss, M. (2003). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project*. En G. Papastavridis (Ed.), 3rd Mediterranean conference on mathematical education (pp. 115–124). The Hellenic Mathematical Society.
- [9] Niss, M., and Blum, W. (2020). *The learning and teaching of mathematical modelling*. Routledge.
- [10] Segura, C., and Ferrando, I. (2021). *Classification and analysis of pre-service teachers’ errors in solving Fermi problems*. Education Sciences, 11(8), 451.
- [11] Segura, C., and Ferrando, I. (2023). *Pre-service teachers’ flexibility and performance in solving Fermi problems*. Educational Studies in Mathematics, 113(2), 207–227.
- [12] Segura, C., Gallart, C., and Ferrando, I. (2025). *Influence of pre-service primary school teachers’ prior knowledge of measurement and measurement estimation in solving modelling problems*. Journal of Mathematics Teacher Education.

Conferencia de Divulgación “Juan Carlos Pedraza”

UNA CHARLA (MÁS) SOBRE NÚMEROS PRIMOS

Juan Sabia

Universidad de Buenos Aires, Argentina

En 1963, el matemático polaco Stanislaw Marcin Ulam, aburrido durante una conferencia, escribió a los números naturales en un papel y marcó los números primos. Sorpresivamente, se dio cuenta de que, en una disposición particular (llamada actualmente “la espiral de Ulam”), los números primos tendían a alinearse a lo largo de diagonales. Esto generó preguntas y conjeturas sobre los primos y algunas fórmulas cuadráticas. El objetivo principal de esta charla es compartir algunos resultados y problemas sobre los números primos o, al menos, aburrir lo suficiente al auditorio como para inspirar nuevas conjeturas sobre estos números.

Conferencia de Clausura

ALGUNOS DE MIS ENCUENTROS CON LAS MATEMÁTICAS

Eugenio Hernández

Universidad Autónoma de Madrid, España

“La vida no es lo que uno vivió, sino lo que uno recuerda y cómo la recuerda para contarla.”
—Gabriel García Márquez

Partiendo de esta idea, en esta conferencia compartiré algunos de mis encuentros personales con las Matemáticas, tal como los recuerdo y soy capaz de contarlos. Recorreremos episodios diversos: desde el tratamiento de señales mediante la compresión de imágenes con teoría de ondículas, hasta el trabajo con adolescentes en programas de detección y estímulo del talento matemático, como los desarrollados en varios lugares de España y de Ecuador. Hablaremos también de la clasificación de datos y señales auditivas mediante redes convolucionales, una aplicación concreta del aprendizaje profundo que conecta la matemática con una parte de la inteligencia artificial.

Álgebra, Teoría de Números y Topología

DOMINIOS PRINCIPALES NO EUCLÍDEOS: UNA VERSIÓN “ARITMÉTICA”

Nicolás Allo Gómez

Universidad de Buenos Aires, Argentina
nicolas.allo.93@gmail.com

La importancia que tienen los dominios de factorización única (DFU) a la hora de resolver ecuaciones es ampliamente conocida. Una de las implicaciones básicas al respecto es que todo dominio principal es un DFU, y también que todo dominio euclídeo (es decir, un dominio con algoritmo de división) es un dominio principal. No obstante, ninguna de estas implicaciones es una equivalencia.

Recientemente, dimos una familia de ejemplos de dominios principales no euclídeos al demostrar el siguiente Teorema:

Si $(F, <)$ es un cuerpo ordenado y $a \in F$ es un elemento positivo, entonces el anillo $F[X, Y]/(X^2 + Y^2 + a)$ es un dominio principal que no es euclídeo.

Se puede demostrar que al cambiar el cuerpo F donde se consideran los coeficientes por otro cuerpo F' no isomorfo a F se obtienen ejemplos de anillos no isomorfos. Sin embargo, fijado el cuerpo F , ¿qué ocurre al modificar el coeficiente independiente a del polinomio $X^2 + Y^2 + a$?

En esta comunicación nos concentraremos en el caso $F = \mathbb{Q}$ con el orden usual y una versión “aritmética” de los ejemplos al abordar la siguiente pregunta: si $a, b \in \mathbb{N}$ con $a \neq b$, ¿cuándo podemos asegurar que los anillos $\mathbb{Q}[X, Y]/(X^2 + Y^2 + a)$ y $\mathbb{Q}[X, Y]/(X^2 + Y^2 + b)$ no son isomorfos? Exhibiremos aquí una familia infinita de valores para los cuales tales anillos resultan no isomorfos.

Trabajo en conjunto con Juan Sabia (Universidad de Buenos Aires e IMAS CONICET-UBA).

INMERSIONES NO POSITIVAS PARA PRESENTACIONES DE WIRTINGER GENERALIZADAS

Agustín Nicolás Barreto

Universidad de Buenos Aires, Argentina
agustin.nbarreto@gmail.com

Un 2-complejo X tiene la propiedad de inmersiones no positivas si para toda inmersión $Y \looparrowright X$ con Y compacto y conexo se cumple que o bien $\chi(Y) \leq 0$, o bien Y es contráctil. Esta noción, introducida por Wise hace dos décadas, es una variante topológica de la noción de curvatura no positiva y recientemente ha cobrado relevancia en diversos problemas de topología, álgebra y geometría.

En un trabajo conjunto con Gabriel Minian exhibimos condiciones sobre los posibles revestimientos de un 2-complejo que son suficientes para probar la propiedad de inmersiones no positivas. Como aplicación, obtenemos un criterio algorítmico que garantiza dicha propiedad en una amplia familia de 2-complejos asociados a presentaciones de Wirtinger generalizadas.

Trabajo en conjunto con Gabriel Minian (Universidad de Buenos Aires).

Referencias

- [1] A. N. Barreto, E. G. Minian, Weakly G-slim complexes and the non-positive immersion property for generalized Wirtinger presentations. arXiv:2506.19105.
- [2] J. Helfer, D. T. Wise, Counting cycles in labeled graphs: the nonpositive immersion property for one-relator groups, International Mathematics Research Notices 2016 (2016), 2813–2827.

BASES DE SCHUR PARA FUNCIONES M-SIMÉTRICAS

Luis Agustín Cardenas Pena

Universidad de Talca, Chile
cardenaspenaluisa@gmail.com

Los polinomios de Macdonald m -simétricos $J_\lambda(x; q, t)$ generalizan tanto a los polinomios de Macdonald simétricos $J_\lambda(x; q, t)$ como los polinomios de Macdonald no simétricos $E_\eta(x; q, t)$. La generalización m -simétrica de la conjetura de Macdonald (teorema desde el 2001) dice que

$$J_\lambda(x; q, t) = \sum_{\Omega} K_{\lambda, \Omega}(q, t) s_{\Omega}(x; t) \quad \text{con } K_{\lambda, \Omega}(q, t) \in \mathbb{N}[q, t]$$

La generalización m -simétrica de las funciones de Schur $s_{\Omega}(x; t)$ es de mayor complejidad que la versión simétrica, ya que depende de un parámetro t . Esta base está relacionada mediante un producto interno a una base $s_{\Omega}^*(x; t)$. La relación entre estas dos, cuando $t = 0$ da lugar a una correspondencia del tipo Robinson-Schensted y una identidad del tipo Cauchy

$$\sum_{\lambda} s_{\lambda}(x; 0) s_{\lambda}^*(y; 0) = \frac{1}{\prod_{i+j \leq m+1} (1 - x_i y_j)} \cdot \frac{1}{\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)}$$

Empleando una generalización del concepto de right key tableau, así como modificación a medida del algoritmo de inserción de Robinson-Schensted-Knuth se puede demostrar esta identidad, la cual generaliza las identidades clásicas:

$$\sum_{\lambda} s_{\lambda}(x) s_{\lambda}(y) = \sum_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j}$$

de funciones de Schur

$$\sum_{\alpha} k_{\alpha}(x) \hat{k}_{\alpha}(y) = \sum_{i+j \leq n+1} \frac{1}{1 - x_i y_j}$$

que relaciona los demazure polynomials con los demazure atoms.

Trabajo en conjunto con Luc Lapointe (Universidad de Talca).

Referencias

- [1] I. Cherednik. Non-Symmetric Macdonald Polynomials. Int. Math. Res. Not. 1995 (1995), 483–515.
- [2] M. Haiman. Hilbert schemes, polygraphs, and the Macdonald positivity conjecture. J. Amer. Math. Soc. 14 (2001), 941–1006.
- [3] L. Lapointe. m -Symmetric functions, non-symmetric Macdonald polynomials and positivity conjectures. <https://arxiv.org/abs/2206.05177>
- [4] A. Lascoux. Double Crystal Graphs. Prog. Math. 210 (2003), 95–114.
- [5] I. G. Macdonald. Symmetric functions and Hall polynomials . Clarendon Press, Oxford, 1995.

SOBRE EL TEOREMA DE POURCHET EFECTIVO

Carlos D'Andrea

Universitat de Barcelona, España
cdandrea@ub.edu

En 1971, Y. Pourchet demostró en [2] que todo polinomio $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se puede expresar como la suma de hasta 5 cuadrados de polinomios en $\mathbb{Q}[x]$, y que ese número es óptimo, en el sentido de que hay polinomios positivos que no son suma de 4 cuadrados.

La demostración original utiliza fuertemente el principio local-global para formas cuadráticas p -ádicas, lo cual hace casi imposible de conseguir una versión computacional/algorítmica del mismo siguiendo los pasos del trabajo hecho por Pourchet.

Recientemente, un algoritmo fue propuesto en [1] para descomponer un polinomio racional positivo como suma de hasta 6 cuadrados, con la conjetura de que en realidad siempre consigue 5, la cual resolvería completamente el problema de Pourchet de manera efectiva.

En este trabajo, mostramos que el algoritmo propuesto no siempre funciona, y utilizando el Lema de Hensel p -ádico conseguimos extender su validez a varios casos más de los ya comprobados en [1].

Trabajo en conjunto con Teresa Cortadellas (Universitat Pompeu-Fabra), Ana Belén de Felipe (Universitat Politècnica de Catalunya), Joel Hurtado Moreno y Eulàlia Montoro (Universitat de Barcelona).

Referencias

- [1] V. Magron, P. Koprowski, T. Vaccon. Pourchet's theorem in action: decomposing univariate nonnegative polynomials as sums of five squares. Proceedings of the International Symposium on Symbolic & Algebraic Computation (ISSAC 2023), 425–433, ACM, New York, 2023.
- [2] Y. Pourchet. Sur la représentation en somme de carrés des polynômes à une indéterminée sur un corps de nombres algébriques. Acta Arith. 19 (1971), 89–104.

DEFORMACIONES DE ÁLGEBRAS DE HOPF A TRAVÉS DE SUCESIONES EXACTAS Y GEOMETRÍA

Gastón Andrés García

Universidad Nacional de La Plata, CMaLP, CONICET, Argentina
ggarcia@mate.unlp.edu.ar

Las álgebras de Hopf son objetos que codifican las simetrías de objetos geométricos a través de sus diferentes categorías de representaciones. Ejemplos básicos son las álgebras de grupo, las álgebras envolventes de las álgebras de Lie, las álgebras de funciones sobre grupos algebraicos afines, y las versiones cuánticas de las anteriores.

Un problema aún abierto (difícil y muy amplio) es la clasificación de todas las álgebras de Hopf, por ejemplo, para saber si hay (muchos) ejemplos más exóticos o todas son variaciones leves de los ejemplos básicos. Uno de los resultados más completos es el de la clasificación de las álgebras de Hopf punteadas complejas de dimensión finita sobre grupos abelianos (de cierto orden) dada por Andruskiewitsch y Schneider. A grandes rasgos, el teorema dice que esta familia de álgebras se obtiene como una variación de los grupos cuánticos pequeños introducidos por Lusztig asociados a álgebras de Lie $\mathfrak{g}$. Dicha variación está dada por una deformación del grupo cuántico pequeño como álgebra, y esta última se puede describir a través de ciertos 2-cociclos.

Si bien este teorema da la estructura y posible forma de las deformaciones, la construcción explícita depende una fórmula recursiva que depende de la combinatoria del sistema de raíces de $\mathfrak{g}$. Es así que la lista completa de este tipo de álgebras se conoce solo para ciertos tipos de álgebras de Lie y para ciertos rangos.

En esta charla mostraremos una forma diferente de obtener estas deformaciones para ciertos casos utilizando sucesiones exactas e inclusiones de grupos finitos en los subgrupos de Borel asociados al sistema de raíces de $\mathfrak{g}$. De esta forma, obtenemos una descripción geométrica, y fórmulas cerradas, de lo que en la teoría se suelen llamar “liftings”.

Trabajo en conjunto con Dirceu Bagio y Oscar Márquez (Universidad Federal de Santa Catarina).

SYLOW BRANCHING COEFFICIENTS AND THE MCKAY CONJECTURE

Eugenio Giannelli

Università degli Studi di Firenze, Italy
eugenio.giannelli@unifi.it

Let G be a finite group, let p be a prime and let P be a Sylow p -subgroup of G . Motivated by the interest of the community around the “Global-Local Conjectures”, over the last few years I have been studying the decomposition into irreducible constituents of the restriction to P of irreducible characters of G . The multiplicities describing this restriction process are known as Sylow Branching Coefficients (SBCs). In this talk, I will present some recent results on SBCs [1], and I will explain how these results led me to formulate a new refinement of the McKay Conjecture [2].

Referencias

- [1] E. Giannelli and S. Law, Sylow branching trees for symmetric groups. Trans. Amer. Math. Soc., to appear.

[2] E. Giannelli, McKay bijections and character degrees. Preprint arXiv:2507.01730v2.

EL ÁLGEBRA ESFÉRICA DE STEINBERG.

Michael Janou Glaeser

Universidad de Buenos Aires, Argentina

janouglaeser@gmail.com

Los grupoides amplios son una clase de grupoides topológicos $\mathcal{G}$ que permiten la construcción de “álgebras de convolución” $k[\mathcal{G}]$ (llamadas “álgebras de Steinberg”), generalizando las álgebras de grupo $k[G]$. Un teorema de Steinberg [1] establece una equivalencia entre la categoría de haces de k -módulos sobre un grupoide amplio $\mathcal{G}$, y la categoría de módulos sobre $k[\mathcal{G}]$. En esta charla, definiremos la noción de haz sobre un grupoide amplio $\mathcal{G}$ a valores en una ∞ -categoría (completa) arbitraria, por ejemplo la ∞ -categoría Sp de espectra [2, 3]. Por otro lado, construiremos un “álgebra esférica de Steinberg” $\mathbb{S}[\mathcal{G}]$ con coeficientes en el espectro de las esferas $\mathbb{S}$, generalizando las “álgebras esféricas de grupo” $\mathbb{S}[G]$, y enunciaremos una generalización del teorema de Steinberg a este contexto [4].

Referencias

- [1] B. Steinberg. Modules over étale groupoid algebras as sheaves, J. Aust. Math. Soc. 97, no. 3 (2014), 418–429.
- [2] J. Lurie. Higher Topos Theory, Annals of Mathematics Studies 170, Princeton University Press, 2009.
- [3] Jacob Lurie. Higher Algebra, Disponible en <https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/HA.pdf>, 2017.
- [4] M. J. Glaeser, The spherical Steinberg algebra, en preparación.

SOBRE LA CLASIFICACIÓN DE ÁLGEBRAS DE HOPF PUNTEADAS

Omar Steven Gutiérrez Rojas

CIEM- FAMAFA- Universidad Nacional de Córdoba, Argentina

osgutierrezro@mi.unc.edu.ar

La clasificación de álgebras de Hopf punteadas de dimensión finita sobre los números complejos ha tenido importantes avances desde la introducción del método del Levante a fines de los años noventa. Dicho método propone como primer paso clasificar las álgebras de Nichols de dimensión finita (sobre grupos finitos). Luego, decidir si toda álgebra de Hopf corradicalmente graduada es la bosonización de un álgebra de Nichols del primer paso con el álgebra de grupo, lo que se conoce como el Problema de generación en grado uno. Finalmente, si la respuesta a la pregunta del segundo paso es positiva, calcular todas las posibles deformaciones (levantamientos) de dicha bosonización.

Cuando el corradical es un álgebra de grupo abeliano la clasificación ha sido finalizada, mientras que en el caso en que no es abeliano no ha sido completada pero muestra grandes avances. Por un lado, se debe aún determinar todas las álgebras de Nichols de dimensión finita sobre dichos grupos cuyo módulo de Yetter-Drinfeld asociado es simple. Por el otro, el caso en que no es simple fue completamente resuelto por Heckenberger y Vendramin [3, 4], a partir de la introducción del grupoide de Weyl.

Para las álgebras de Nichols de dimensión finita en [3, 4], se busca completar los otros dos pasos restantes del método del Levante, es decir, responder la pregunta de generación en grado uno y calcular todos los levantamientos, que necesitan en primer lugar dar una presentación por generadores y relaciones de las álgebras de Nichols en cuestión. Esto se ha realizado para todas las familias genéricas con una cantidad arbitraria de sumandos simples en [1] y para un ejemplo excepcional donde el módulo de Yetter-Drinfeld consta dos sumandos [2]; restan contemplarse otros tres casos de dos sumandos simples, y dos casos de tres sumandos simples. En el presente trabajo (en preparación) se abordarán los pasos del método del Levante para los casos de dos sumandos aún no estudiados, siguiendo las técnicas empleadas en [2].

Trabajo en conjunto con Iván Angiono (Universidad Nacional de Córdoba).

Referencias

- [1] I. Angiono, S. Lentner and G. Sanmarco. Pointed Hopf algebras over nonabelian groups with nonsimple standard braidings. Proc. Lond. Math. Soc. (3) 127 (2023), 1185–1245.

- [2] I. Angiono and G. Sanmarco. Pointed Hopf algebras over non abelian groups with decomposable braidings. *I. J. Algebra* 549 (2020), 78–111.
- [3] I. Heckenberger and L. Vendramin. The classification of Nichols algebras over groups with finite root system of rank two. *J. Eur. Math. Soc.* 19 (2017), 1977–2017.
- [4] I. Heckenberger and L. Vendramin. A classification of Nichols algebras of semisimple Yetter-Drinfeld modules over non-abelian groups. *J. Eur. Math. Soc.* 19 (2017), 299–356.

TEORÍA DE INVARIANTES Y LA CONJETURA DE RECONSTRUCCIÓN DE GRAFOS

Gabriela Jeronimo

Universidad de Buenos Aires - CONICET, Argentina
jeronimo@dm.uba.ar

La conjetura de reconstrucción de grafos ([2],[5]) dice que todo grafo simple no dirigido G con al menos tres vértices se puede reconstruir a partir del multiconjunto $\mathcal{D}(G)$ formado por (las clases de isomorfismos de) todos los grafos que se obtienen borrando un vértice v de G y todas las aristas incidentes en v ; en otros términos, si G y G' son grafos tales que $\mathcal{D}(G) = \mathcal{D}(G')$, entonces G y G' son isomorfos.

Este problema ha sido ampliamente estudiado y, si bien la conjetura permanece abierta, se han obtenido resultados parciales, incluyendo la demostración de su validez para ciertas clases de grafos: árboles, grafos regulares, grafos completos, grafos disconexos, grafos planares maximales [3]. Recientemente, un enfoque computacional permitió verificar que la conjetura vale para todos los grafos de hasta 13 vértices [4].

Presentaremos un trabajo en curso sobre una nueva formulación de la conjetura de reconstrucción para grafos con pesos sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ por medio de teoría de invariantes. El conjunto de los grafos de n vértices con pesos en $\mathbb{K}$ forma un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial V_n y el anillo de invariantes $\mathbb{K}[V_n]^{S_n}$ de la acción del grupo simétrico S_n permite determinar si dos grafos son isomorfos. Reformulamos la conjetura de reconstrucción de grafos como la pregunta de si ciertos subconjuntos de $\mathbb{K}[V_n]^{S_n}$ son conjuntos separantes, es decir, conjuntos de invariantes que permiten distinguir las órbitas de la acción del grupo. Resultados sobre cálculo de conjuntos separantes (ver [1]) dan lugar a un nuevo acercamiento computacional a la conjetura. Por otra parte, la caracterización algebraico-geométrica del problema permite obtener nuevas demostraciones de la conjetura para familias de grafos.

Trabajo en conjunto con Emilie Dufresne (University of York), Jenny Kenkel (Grinnell College), Haydee Lindo (Harvey Mudd College) y Nelly Villamizar (Swansea University).

Referencias

- [1] H. Derksen, G. Kemper. Computational invariant theory. *Encyclopaedia of Mathematical Sciences* vol. 130, Springer, Heidelberg, 2015.
- [2] P. Kelly. A congruence theorem for trees. *Pacific J. Math.* 7 (1957), 961–968.
- [3] J. Lauri and R. Scapellato. Topics in graph automorphisms and reconstruction. Cambridge University Press, 2016.
- [4] B. McKay. Reconstruction of small graphs and digraphs. *Australas. J. Comb.* 83 (2022), 448–457.
- [5] S. Ulam. A collection of mathematical problems. Wiley, 1960.

ÁLGEBRAS DE EFECTOS VECTORIALES

Diego Morcelle Gullo

CMaLP, Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, UNLP, Argentina
dmorcelle@gmail.com

Consideremos el $\mathbb{C}$ -espacio vectorial de operadores acotados sobre un espacio de Hilbert, $L(\mathcal{H})$, equipado con la noción habitual de conjugación y el orden inducido por el cono de operadores semidefinidos positivos. Los elementos de $L(\mathcal{H})$ pertenecientes al intervalo $[0, I]$ se denominan efectos [1]. Denotamos a este conjunto $E(\mathcal{H})$ y definimos dos operaciones parciales, $\oplus$ y $*$, que coinciden con la suma y el producto por escalar de $L(\mathcal{H})$ cuando están definidas. Diremos que $X \oplus Y$ (respectivamente, $r * X$) está definida, si $X + Y \leq I$ (respectivamente, si $r * X \leq I$ y $r \in \mathbb{R}^+$).

Resulta natural preguntarse si es posible recuperar $L(\mathcal{H})$ a partir de $E(\mathcal{H})$. La respuesta es afirmativa: $L(\mathcal{H})$ es isomorfo a un cierto cociente del $\mathbb{C}$ -espacio vectorial libre sobre $E(\mathcal{H})$.

Análogamente, podemos partir de cualquier $\mathbb{C}$ -espacio vectorial ordenado V con un elemento positivo u y proceder de forma similar para obtener un “álgebra de efectos” $E(V)$. Esta asignación se extiende fácilmente a un funtor E desde la categoría de $\star$ -espacios vectoriales ordenados con unidad [2] hacia una categoría de álgebras parciales adecuadamente definidas. Más concretamente, un álgebra de efectos vectorial (VEA) es, a grandes rasgos, un álgebra de efectos dotada de un producto por escalar parcial, el cual satisface axiomas similares al de un espacio vectorial. Veremos que, emulando la construcción del caso particular de operadores, podemos asociar a toda VEA un $\mathbb{C}$ -espacio vectorial ordenado con unidad, y que esta construcción define un adjunto a izquierda del funtor E . La restricción de E a una subcategoría apropiada resulta en una equivalencia.

Trabajo en conjunto con José Luis Castiglioni (CMA LP, Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, UNLP).

Referencias

- [1] D. Foulis and M. Bennett. Effect algebras and unsharp quantum logics. *Found. Phys.* 24 (1994), 1331–1352.
- [2] V. Paulsen and M. Tomforde. Vector spaces with an order unit. *Indiana Univ. Math. J.* 58 (2009), 1319–1359.

EL CORCHETE DE GERSTENHABER Y EL PRODUCTO CUP VÍA LAS DEFORMACIONES DE ÁLGEBRAS.

Maria Julia Redondo

INMABB (UNS/CONICET), Argentina
juliaredondo@gmail.com

La teoría de deformaciones de álgebras fue introducida por Gerstenhaber en el año 1962. Las deformaciones infinitesimales están estrechamente ligadas a la cohomología de Hochschild. Sea A_f la deformación infinitesimal de una k -álgebra asociativa A , asociada al 2-cociclo de Hochschild f . En esta charla mostraremos la conexión entre la cohomología de Hochschild A_f como k -álgebra y como $k[t]/(t^2)$ -álgebra, y la cohomología de Hochschild de A como k -álgebra. Veremos que esta relación se expresa mediante el uso del corchete de Gerstenhaber $[f, -] : HH^n(A) \rightarrow HH^{n+1}(A)$ y el producto cup $f \cup - : HH^n(A) \rightarrow HH^{n+2}(A)$.

Trabajo en conjunto con Emmanuel Jerez (Guangdong Technion Israel Institute of Technology) y Lucrecia Román (Universidad Nacional del Sur).

ECUACIÓN DE MAURER-CARTAN PARA ÁLGEBRAS GENTILES

Fiorela Rossi Bertone

Universidad Nacional del Sur, Argentina
fiorela.rossib@gmail.com

Las deformaciones de álgebras asociativas están en correspondencia con los elementos de Maurer-Cartan, por lo que nos interesa describir estos elementos que están estrechamente relacionados con el Complejo de Hochschild del álgebra original. Debido al tamaño del complejo de Hochschild muchas veces es conveniente trabajar con otros complejos más pequeños, como el caso del Complejo de Barzdell para álgebras monomiales. En esta charla, para un álgebra (monomial) gentil $A = \mathbb{k}Q/I$, consideraremos la estructura L_∞ del complejo de Bardzell $B(A)$ y pondremos condiciones en el quiver Q que nos permitan asegurar la nilpotencia de los corchetes y calcular los elementos de Maurer-Cartan de A .

Trabajo en conjunto con Monique Müller (Universidade Federal de São João del Rei), María Julia Redondo (Universidad Nacional del Sur) y Pamela Suarez (Universidad Nacional de Mar del Plata).

COHOMOLOGÍA DE HOCHSCHILD DE CORONAS Y DE SUS EXTENSIONES

Franco Nicolás Rufolo

IMaS - Universidad de Buenos Aires, Argentina
francorufolo@hotmail.com

Dada una K -álgebra asociativa A de dimensión finita, es una tarea muy difícil en general calcular su cohomología de Hochschild. Los cocientes admisibles de álgebras de caminos son una subfamilia de estas álgebras, la cual se sabe que encapsula esta información gracias a un teorema debido a Gabriel. Con esto en mente, si bien son más fáciles de manipular para los cálculos que un álgebra arbitraria, su cohomología sigue siendo desconocida.

Las coronas son casos particulares de cocientes admisibles de álgebras de caminos donde se imponen restricciones en el carcaj ordinario del álgebra. Aunque se conoce la cohomología de Hochschild de estas álgebras, el cálculo de la cohomología de sus extensiones es un problema abierto. En [1] hay herramientas que permiten aproximarse a esto en el caso de las extensiones triviales, mientras que el caso de las extensiones torcidas en general está aún lejos de ser resuelto.

En esta charla contaré los resultados conocidos y mostraré los resultados obtenidos en esta dirección.

Trabajo en conjunto con Andrea Solotar (Universidad de Buenos Aires).

Referencias

- [1] C. Cibils, E. Marcos, M. J. Redondo and A. Solotar. Cohomology of split algebras and of trivial extensions. Glasg. Math. J. 45 (2003) 21–40.

FAMILIAS DE CONGRUENCIAS PARA FUNCIONES DE PARTICIONES

Nicolás Sirolli

UBA / CONICET, Argentina

nsirolli@dm.uba.ar

Se sabe que los valores de la función de particiones, así como los de otras funciones de particiones descritas combinatoriamente mediante cocientes eta, son coeficientes de Fourier de formas modulares débilmente holomorfas.

Probando la existencia de congruencias entre estas últimas y formas modulares holomorfas, K. Ono (en el caso de la función de particiones) y posteriormente S. Treneer (en un contexto más general) lograron demostrar, para cada primo m , la existencia de familias infinitas de progresiones aritméticas en las que dichos valores se anulan módulo m .

En esta charla discutiremos cómo obtener explícitamente (miembros de estas) familias para distintos tipos de funciones de particiones; en particular, para la función de sobrepaticiones.

Trabajo en conjunto con Nathan Ryan (Bucknell University, EE. UU.) y Adrián Barquero Sánchez (Universidad de Costa Rica, Costa Rica).

Referencias

- [1] A. Barquero Sánchez, J. P. De Rasis, N. Sirolli, J. C. Villegas Morales. On the efficient computation of Fourier coefficients of eta-quotients. arXiv:2504.01384.
- [2] A. Barquero-Sánchez, G. Collado Valverde, N. Ryan, E. Salas-Jimenez, N. Sirolli and J. C. Villegas Morales. Efficient computation of the overpartition function and applications. J. Math. Anal. Appl. 528 (2023), 127472.
- [3] K. Ono. Distribution of the partition function modulo m . Ann. Math. (2) 151 (2000), 293–307.
- [4] N. Ryan, N. Sirolli, J.C. Villegas Morales and Q.-Y. Zheng. Explicit families of congruences for the overpartition function. Ramanujan J. 65 (2024), 1631–1649.
- [5] S. Treneer. Congruences for the coefficients of weakly holomorphic modular forms. Proc. Lond. Math. Soc. 93 (2006), 304–324.

MORFISMOS IRREDUCIBLES SOBRE ÁLGEBRAS DE GRUPO TORCIDAS

Sonia Trepode

CEMIM; FCEyN, Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina
strepode@gmail.com

En esta charla consideramos un grupo abeliano finito de automorfismos de un álgebra de caminos sobre un cuerpo algebraicamente cerrado. Consideramos que el grupo actúa permutando los vértices y preservando el espacio de las flechas, que el orden del grupo es inversible en el álgebra y estudiamos su álgebra de grupo torcida.

De la Peña estudió álgebras de grupo torcidas de tipo de representación finita y observó que la construcción del álgebra de grupo torcida coincide con una cubierta de Galois si la acción del grupo es libre. Esta idea nos motivó a introducir el concepto del funtor semi-cubierta de Galois entre las categorías de módulos de un álgebra y su álgebra de grupo torcida y mostramos que este funtor no es una cubierta de Galois cuando la acción del grupo no es libre. Estudiamos los morfismos irreducibles y las sucesiones que casi se parten en la categoría de módulos bajo la acción de este funtor.

Decidir si un álgebra de dimensión finita es representación finita, mansa o salvaje es un desafío. Una herramienta útil para esta tarea es conocer el rango (estable). Srivastava, Sinha, y Kuber estudiaron el rango estable de las álgebras especiales biseriales, en particular de las álgebras gentiles. Geiss mostró que las álgebras gentiles torcidas son mansas por ser degeneraciones de álgebras gentiles, pero en general el problema para álgebras de grupo torcida todavía está abierto. En esta charla mostramos que el funtor semi-cubierta de Galois preserva potencias del radical y como consecuencia el rango y el rango estable se preservan bajo el proceso de torcer un álgebra por la acción de grupo.

Como aplicación obtenemos una descripción completa de los morfismos irreducibles de un álgebra de grupo torcida y determinamos el rango estable de las álgebras gentiles torcidas.

Trabajo conjunto con Alfredo González Chaio y Shantanu Sardar (Universidad Nacional de Mar del Plata).

Referencias

- [1] A. González Chaio, S. Sardar and S. Trepode. On the Irreducible Morphisms for Skew group algebras. arXiv:2507.20103.

Análisis Armónico, Real y Teoría de aproximación

MARCOS DE ÓRBITAS DE OPERADORES DE TOEPLITZ EN ESPACIOS DE HARDY

Alejandra Patricia Aguilera
IMAS-CONICET-UBA, Argentina
alejandra1.aguilera@gmail.com

En [1] y [2] se hallaron condiciones necesarias y suficientes para que un operador lineal y acotado actuando en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ admita una cantidad finita o numerable de órbitas que forman un marco de $\mathcal{H}$.

En esta charla estudiaremos este problema en el contexto particular de operadores de Toeplitz actuando en los espacios de Hardy $H^2(\mathbb{T}^N)$ y $H^2(\mathbb{T}^\infty)$. Comenzaremos estudiando condiciones necesarias y suficientes sobre el símbolo φ de un operador de multiplicación M_φ para que dicho operador o su adjunto M_φ^* admitan marcos de órbitas. Por un lado, vemos que si $|\varphi(\zeta)| < 1$ para casi todo $\zeta \in \mathbb{T}^N$ entonces ambos operadores M_φ y M_φ^* generan marcos de Parseval con infinitas órbitas necesariamente. Por otro lado, en el caso $N = 1$, caracterizamos todos los símbolos $\varphi \in H^\infty(\mathbb{T})$ tal que M_φ genera un marco de Parseval de una sola órbita.

Trabajo en conjunto con Daniel Carando (IMAS-CONICET-UBA).

Referencias

- [1] A. Aguilera, C. Cabrelli, F. Negreira and V. Paternostro. Existence and Properties of Frames of Iterations, arXiv:2506.00567.
- [2] C. Cabrelli, U. Molter, V. Paternostro and F. Philipp. Dynamical sampling on finite index sets, J. Anal. Math. 140 (2020), 637–667.

DIMENSIONES INTERMEDIAS DE CONJUNTOS COMPLEMENTARIOS

Nicolas Angelini
Instituto de Matemática Aplicada San Luis (IMASL), Argentina
nicolas.angelini.2015@gmail.com

Dada una sucesión positiva, no creciente y sumable a , denotamos por $\mathcal{C}_a$ a la familia de todos los conjuntos compactos de la recta real cuyo complemento está formado por intervalos abiertos con diámetros iguales a los términos de la sucesión a . En este trabajo obtenemos cotas inferiores y superiores para la dimensión intermedia de los conjuntos $E \in \mathcal{C}_a$, y mostramos que dichas cotas son alcanzadas por ciertos elementos de la familia. Además, establecemos condiciones necesarias para que, dado cualquier s entre esas cotas, exista un conjunto $E \in \mathcal{C}_a$ cuya dimensión intermedia θ sea exactamente s . En consecuencia, las dimensiones intermedias θ de los conjuntos de una misma familia forman un intervalo cerrado.

Esta presentación se basa en un trabajo conjunto con Ursula Molter (IMAS).

DERIVACIÓN FRACCIONARIA DE FUNCIONES LIPSCHITZ Y BESOV EN CONTEXTOS DIÁDICOS GENERALES

Juliana Boasso

IMAL-CONICET, Argentina

jboasso@santafe-conicet.gov.ar

El propósito de este trabajo es mostrar algunos resultados de caracterización con bases de tipo Haar de regularidades de Lipschitz y Besov diádicas en espacios de probabilidad no atómicos y la acción sobre ellos, de operadores naturales de derivación fraccionaria.

Sea $(\mathbb{X}, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de probabilidad no atómico. Sean $\mathcal{D}, \delta_{\mathcal{D}}$ y $\mathcal{H}$ una familia diádica, la pseudo-métrica inducida por $\mathcal{D}$ y un sistema de Haar como en [3]. En [3] probamos el siguiente resultado:

Teorema 1. Sea $\mathcal{D}$ una base de diferenciación de $L^1(\mathbb{X})$. Una función real definida en $\mathbb{X}$ es Lipschitz- α para $\alpha > 0$ ($|f(x) - f(y)| \leq C|f|_{Lip_{\delta_{\mathcal{D}}}(\alpha)}\delta_{\mathcal{D}}(x, y)$) si y sólo si para toda $h \in \mathcal{H}$, $|\langle f, h \rangle| \leq |f|_{Lip_{\delta_{\mathcal{D}}}(\alpha)}\mu(Q(h))^{\alpha+\frac{1}{2}}$, donde $Q(h) \in \mathcal{D}$ soporta a h .

En el contexto de espacios de tipo homogéneo en [2] se introducen espacios de Besov (para $p = q = 2$) diádicos y se caracterizan usando wavelets de Haar.

Teorema 2 (Teorema 5 en [2]). Sea $f \in L^2(\mathbb{X}, \mu)$. Entonces $f \in B_2^\lambda$ ($\int_{\mathbb{X} \times \mathbb{X}} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{\delta_{\mathcal{D}}^{1+2\lambda}(x, y)} d\mu(x)d\mu(y) < \infty$) si solo si $\sum_{h \in \mathcal{H}} \frac{|\langle f, h \rangle|^2}{\mu(Q(h))^{2\lambda}} < \infty$.

Estudiamos la acotación del operador de diferenciación fraccionaria natural del contexto

$$D^\beta f(x) = \int_{y \in \mathbb{X}} \frac{f(x) - f(y)}{\delta_{\mathcal{D}}^{1+\beta}(x, y)} d\mu(y),$$

para $\beta > 0$, entre los espacios de Lipschitz y de Besov introducidos arriba. El resultado es, de alguna manera, el esperado, y su demostración se basa en el análisis espectral de D^β en términos del sistema $\mathcal{H}$.

Lema 3. Para $0 < \beta < 1$ y $h \in \mathcal{H}$, $D^\beta h = m_h \mu(Q(h))^{-\beta} h$, con $0 < m \leq m_h \leq M$, para toda $h \in \mathcal{H}$, con m, M constantes.

Teorema 4. Para todos α, β tales que $0 < \beta < \alpha$ tenemos que $D^\beta : Lip_{\delta_{\mathcal{D}}}(\alpha) \rightarrow Lip_{\delta_{\mathcal{D}}}(\alpha - \beta)$. Además, existe una constante $C > 0$ tal que $|D^\beta f|_{Lip_{\delta_{\mathcal{D}}}(\alpha - \beta)} \leq C|f|_{Lip_{\delta_{\mathcal{D}}}(\alpha)}$.

Teorema 5. Para todos λ, β tales que $0 < \beta < \lambda$ tenemos que $D^\beta : B_2^\lambda \rightarrow B_2^{\lambda - \beta}$ continuamente.

Trabajo en conjunto con Hugo Aimar (IMAL-CONICET).

Referencias

- [1] M. Actis and H. Aimar. Dyadic nonlocal diffusions in metric measure spaces. *Fract. Calc. Appl. Anal.* 18 (2015), 762–788.
- [2] M. Actis, H. Aimar, B. Bongioanni, and I. Gómez. Nonlocal schrödinger equations in metric measure spaces. *J. Math. Anal. Appl.* 435 (2016), 425–439.
- [3] H. Aimar and J. Boasso. A measure theoretic approach to lipschitz regularity and its haar type wavelet analysis. *arXiv.2506.03341*.
- [4] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992.
- [5] M. Holschneider and P. Tchamitchian. Regularite locale de la fonction 'non-differentiable' de Riemann. *Niedersächsische Staats-und Universitätsbibliothek Göttingen. Springer Verlag.* pp. 102–124, 1990.

TIPO FOURIER EN ESPACIOS $\ell^{r(\cdot)}$

Marcos Bonich

Universidad de Buenos Aires, IMAS (UBA-CONICET), Argentina
bonichmarcos@gmail.com

Un espacio de Banach X tiene tipo Fourier $p \in [1, 2]$ si la transformada de Fourier $\mathcal{F} : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ satisface la desigualdad de Hausdorff-Young para funciones con valores en X . En particular, si X es un espacio de sucesiones, esto significa que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|(\mathcal{F}(f_j))_j\|_X \leq C \| (f_j)_j \|_X,$$

para toda sucesión de funciones $(f_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset L^p(\mathbb{R}^n)$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Esta propiedad ha resultado útil en diversos aspectos del análisis armónico, incluyendo el desarrollo de teoremas de multiplicadores y el estudio de multiplicadores de Fourier con valores en operadores (ver [3,4]).

Se sabe que los espacios ℓ^r tienen tipo Fourier p si y sólo si $r \in [p, p']$. En esta charla discutiremos una extensión de este resultado al contexto de espacios $\ell^{r(\cdot)}$, los cuales son una generalización de los espacios de Lebesgue de sucesiones, que han cobrado relevancia en los últimos años debido a sus diversas aplicaciones (ver [1,2]).

Trabajo en conjunto con Daniel Carando (Universidad de Buenos Aires, IMAS-CONICET) y Martín Mazzitelli (Instituto Balseiro, CNEA-UNCUYO, CONICET).

Referencias

- [1] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza. Variable Lebesgue spaces: Foundations and Harmonic Analysis. Birkhäuser, Springer, Basel, 2013.
- [2] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö and M. Ruzicka. Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents. Lecture Notes in Mathematics 2017, Springer, 509 p. (2011).
- [3] M. Girardi and L. Weis. Operator-valued Fourier multiplier theorems on $L_p(\mathbb{R}^n, X)$ and type. Math. Nachr. 251 (2003), 34–51.
- [4] J. Rozendaal and M. Veraar. Fourier multiplier theorems involving type and cotype. J. Fourier Anal. Appl. 24 (2018), 583–619.

CONSTRUCCIÓN DE SOLUCIONES AL PROBLEMA MATRICIAL DE BOCHNER

Ignacio Bono Parisi

FaMAF - Universidad Nacional de Córdoba, Argentina
ignacio.bono@unc.edu.ar

Un problema central en la teoría de los polinomios ortogonales matriciales es el Problema Matricial de Bochner, que busca clasificar los pesos matriciales de tamaño $N \times N$ cuyos polinomios ortogonales asociados $P_n(x)$ son autofunciones de un operador diferencial D de segundo orden,

$$P_n(x) \cdot D = \Lambda_n P_n(x).$$

En esta charla presentaremos un método sistemático para construir soluciones no triviales de tamaño arbitrario a este problema, a partir de colecciones de pesos escalares clásicos (Hermite, Laguerre o Jacobi). El método nos permitirá obtener una gran variedad de nuevos ejemplos, junto con expresiones explícitas para los pesos, los polinomios y el operador diferencial que los tiene como autofunciones.

DESIGUALDADES CON PESOS PARA CONMUTADORES DE OPERADORES INTEGRALES DE TIPO FRACCIONARIO

Adrián Cabral

Facultad de Ciencias Exactas - Universidad Nacional del Nordeste – IMIT - UNNE - CONICET, Argentina
enrique.cabral@comunidad.unne.edu.ar

En esta comunicación presentamos resultados de acotación para operadores integrales de tipo fraccionario y sus conmutadores de orden superior entre espacios pesados, incluyendo estimaciones del tipo $L^p - L^q$ y $L^p - L_\delta$, tanto en el caso constante, como de exponente variable, donde L_δ denota un apropiado espacio de tipo Lipschitz.

Los núcleos de dichos operadores satisfacen cierta condición de tamaño y una regularidad de tipo Lipschitz, ambas asociadas a una función radio crítico ρ , esto es, una función no negativa con la propiedad de que existen constantes c_0, N_0 tales que

$$\rho(x) \leq c_0 \rho(y) \left(1 + \frac{|x - y|}{\rho(y)} \right)^{N_0},$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$. Además de los operadores, también los pesos que vamos a considerar dependen de la función radio crítico ρ .

La principal motivación de este enfoque proviene del análisis armónico asociado a un operador de Schrödinger $-\Delta + V$, donde V es no idénticamente cero y satisface una desigualdad reverse Hölder apropiada. En ese contexto, existe una función radio crítico asociada al potencial V definida como

$$\rho_V(x) = \sup \left\{ r > 0 : \frac{1}{r^{n-2}} \int_{B(x,r)} V(y) dy \leq 1 \right\}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Trabajo en conjunto con Fernán Zabala Lodoli (Universidad Nacional del Nordeste).

RECIENTES AVANCES EN MUESTREO DINÁMICO

Carlos Cabrelli

Universidad de Buenos Aires - CONICET, Argentina
carlos.cabrelli@gmail.com

En esta charla daremos una visión general del muestreo dinámico y sus aplicaciones para luego presentar algunos resultados recientes en esta área que fueron obtenidos en colaboración con Alejandra Aguilera, Felipe Negreira y Vicky Paternostro.

Trabajo en conjunto con Alejandra Aguilera, Felipe Negreira y Victoria Paternostro (UBA-CONICET).

DESIGUALDADES DE FOURIER EN ESPACIOS DE LEBESGUE CON EXPONENTE VARIABLE

Matías Ignacio Caruso

Instituto Balseiro, CNEA - Universidad Nacional de Cuyo, Argentina
matias.caruso@ib.edu.ar

Los espacios de Lebesgue con exponente variable fueron introducidos por Orlicz a principios de la década del '30 y estudiados sistemáticamente por Nakano en la del '50. En los últimos años, han cobrado un gran interés debido a sus aplicaciones en el modelado de fluidos electrorreológicos y el procesamiento de imágenes.

Si bien una gran cantidad de resultados válidos en espacios de Lebesgue clásicos se extienden al caso variable, una excepción es la famosa desigualdad de Hausdorff–Young, que establece que si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq 2$, entonces

$$\|\widehat{f}\|_p \leq C \|f\|_{p'},$$

donde $\widehat{f}$ es la transformada de Fourier de f y p' es el exponente conjugado a p . Esto ha motivado a considerar algún ingrediente extra en la búsqueda de la generalización correcta de la desigualdad en el contexto variable, llevando, por ejemplo, a desigualdades con pesos, con reordenamientos o con hipótesis adicionales.

En esta comunicación, damos diferentes condiciones suficientes y condiciones necesarias para la validez de desigualdades de Fourier, con y sin pesos, en espacios de Lebesgue con exponente variable.

Trabajo en conjunto con Rodrigo Cardeccia, Martín Mazzitelli (Instituto Balseiro, CNEA - Universidad Nacional de Cuyo) y J. Tomás Rodríguez (Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires).

Referencias

- [1] J. J. Benedetto y H. P. Heinig. Weighted Fourier Inequalities: New Proofs and Generalizations, *J. Fourier Anal. Appl.* 9 (2003), 1–37.
- [2] D. V. Cruz-Urbe y A. Fiorenza, *Variable Lebesgue Spaces: Foundations and Harmonic Analysis*, Applied and Numerical Harmonic Analysis, Birkhäuser Basel (2013).
- [3] L. Diening y S. Samko. Hardy Inequality in Variable Exponent Lebesgue Spaces, *Fract. Calc. Appl. Anal.* 10 (2007), 1–18.
- [4] D. Edmunds, V. Kokilashvili y A. Meskhi. On the Boundedness and Compactness of Weighted Hardy Operators in Spaces $L_p(x)$, *Georgian Math. J.* 12 (2005), 27–44.
- [5] A. Fiorenza y J. M. Rakotoson. Relative rearrangement and Lebesgue spaces $L_p(\cdot)$ with variable exponent, *J. Math. Pures Appl.* 88 (2007), 506–521.
- [6] M. Saucedo y S. Tikhonov. Note on Fourier inequalities, *Nonlinear Anal.* 261 (2025), 113896.

ESTIMACIONES DE OPERADORES CON PESOS MATRICIALES EN ESPACIOS DE TIPO HOMOGÉNEO

Guido Claro

Universidad Nacional de Río Negro, Argentina

gclaro@unrn.edu.ar

Este trabajo presenta una generalización de las estimaciones con pesos matriciales, originalmente desarrolladas en el marco euclídeo $\mathbb{R}^d$, hacia el contexto más general de los espacios de tipo homogéneo (X, d, μ) . El resultado central consiste en una extensión del principio de dominación de operadores por cuerpos convexos, introducido por Nazarov, Petermichl, Treil y Volberg para operadores vectoriales en el caso euclídeo, al escenario de los espacios de tipo homogéneo. Esta generalización permite establecer cotas cuantitativas para operadores integrales singulares y obtener resultados asociados a teoremas sparse de tipo $T(1)$, ampliando así el alcance de las técnicas matriciales clásicas a un marco más general.

Trabajo en conjunto con Pamela Muller (Universidad Nacional del Sur), Luis Nowak, Alejandra Perini (Universidad Nacional del Comahue) e Israel Rivera-Ríos (Universidad de Málaga).

Referencias

- [1] J. Isralowitz, H. Kwon and S. Pott, Sharp estimates for the Christ-Goldberg maximal function, *Adv. Math.*, 2019.
- [2] A. K. Lerner and S. Ombrosi. Some remarks on the pointwise sparse domination. *J. Geom. Anal.* 30 (2020), 10111027.
- [3] E. Lorist, On pointwise l_r -sparse domination in a space of homogeneous type, *J. Geom. Anal.* 31 (2021), 93669405.
- [4] P. A. Muller and I. P. Rivera-Ríos. Quantitative matrix weighted estimates for certain singular integral operators, *J. Math. Anal. Appl.* 509 (2022), 125939, 38 p.
- [5] F. Nazarov, S. Petermichl, S. Treil and A. Volberg. Convex body domination and matrix weighted settings, *Adv. Math.* 318 (2017), 279–306.
- [6] S. Treil and A. Volberg, Wavelets and the angle between past and future, *J. Funct. Anal.* 143 (1997), 269–308.

DESIGUALDADES VARIACIONALES PARA OPERADORES FRACCIONARIOS DE KOLMOGOROV

Estefanía Dafne Dalmasso

IMAL (CONICET-UNL) - FIQ (UNL), Argentina

dafnedalm@gmail.com

Las desigualdades variacionales tienen su origen en la teoría ergódica. Bourgain fue el primero en establecerlas en ese contexto, con el objetivo de medir la velocidad de convergencia de promedios ergódicos sobre distintos subconjuntos de índices. Cabe destacar, sin embargo, que ya Lépingle había probado previamente la desigualdad de ρ -variación en el marco de la teoría de martingalas. Estos desarrollos motivaron un gran interés por el estudio de operadores de variación y oscilación asociados a diferentes clases de operadores en espacios L^p .

En esta charla mostraremos los resultados obtenidos en el marco de los operadores fraccionarios de Kolmogorov, definidos en $\mathbb{R}^d$ por

$$\Lambda_\kappa = (-\Delta)^{\alpha/2} + \frac{\kappa}{|x|^\alpha} x \cdot \nabla,$$

con $\alpha \in (1, 2)$, $\alpha < (d+2)/2$ y $\kappa < \kappa_c$, donde κ_c denota la constante crítica de acoplamiento, que depende del potencial $\frac{\kappa}{|x|^\alpha} x \cdot \nabla$.

Trabajo en conjunto con Jorge J. Betancor (Universidad de La Laguna) y Pablo Quijano (IMAL-CONICET-UNL y FIQ-UNL).

RECONSTRUCCIÓN APROXIMADA EN SUBESPACIOS INVARIANTES POR TRASLACIONES

Jorge Díaz

UNNE, Argentina

jorge.diaz@agr.unne.edu.ar

En contextos donde se emplean marcos para representar señales o funciones, la dualidad oblicua surge cuando el análisis y la síntesis deben realizarse en subespacios distintos [2, 3]. En ciertas situaciones, no es posible obtener una fórmula explícita para los marcos duales oblicuos, y en otras, existe un único marco dual oblicuo que no cumple con las propiedades deseadas. Además, en la práctica, los cálculos suelen ser aproximados y no exactos.

Para abordar estos desafíos, en [1] exploramos el concepto de marcos duales oblicuos aproximados en subespacios de $L^2(\mathbb{R})$ invariantes por traslaciones, estableciendo condiciones sobre los generadores que garantizan su existencia. En este trabajo se considera el caso multidimensional.

Trabajo en conjunto con Sigrid Heineken (UBA-IMAS) y Patricia Morillas (UNSL-IMASL).

Referencias

- [1] J. P. Díaz, S. B. Heineken and P. M. Morillas. Approximate oblique dual frames, Appl. Math. Comput. 452 (2023), 128015.
 - [2] Y. C. Eldar. Sampling with arbitrary sampling and reconstruction spaces and oblique dual frame vectors, J. Fourier Anal. Appl. 9 (2003), 77–96.
 - [3] O. Christensen and Y. C. Eldar. Oblique dual frames and shift-invariant spaces, Appl. Comput. Harmon. Anal. 17 (2004), 48–68.
-

PROPIEDADES CUANTITATIVAS Y ASINTÓTICAS DE LA MEJOR APROXIMACIÓN EXTENDIDA EN ESPACIOS DE LORENTZ-GAMMA $\Gamma_{w,q}$ PARA $q \in (0, 1]$

María Inés Gareis

Universidad Nacional de La Pampa, Facultad de Ingeniería, Argentina
marygareis@ing.unlpam.edu.ar

Los operadores de mejor aproximación polinomial extendidos han demostrado ser herramientas fundamentales en el análisis funcional, ya que permiten recuperar propiedades estructurales y diferenciales de las funciones a partir de sus mejores aproximantes. Mientras su estudio ha sido desarrollado ampliamente en espacios de Lebesgue, Orlicz y Orlicz–Lorentz [1,4,5], el análisis correspondiente en espacios de Lorentz–Gamma [2,3] permanece inexplorado.

En este trabajo abordamos el operador de mejor aproximación polinomial extendido [6], definido en el espacio Γ_0 (el conjunto de funciones medibles cuyo promedio integral de la función reordenada decreciente es finito casi en todas partes), y estudiamos su comportamiento en los espacios $\Gamma_{w,q}$ para todo $0 < q \leq 1$. Mostramos desigualdades ponderadas que establecen cotas explícitas para su norma, y verificamos que las mejores aproximaciones extendidas desde Γ_0 resultan casi óptimas en $\Gamma_{w,q}$. Más precisamente, probamos que si $f \in \Gamma_{w,q}$ y $B \subseteq (0, \alpha)$ es un conjunto medible con medida positiva, entonces todo polinomio $g \in \overline{\mathcal{P}}_{w,1,B}^m(f)$ satisface

$$\|g \chi_B\|_{L^\infty} \leq C W_1(|B|)^{-\frac{1}{q}} \|f \chi_B\|_{\Gamma_{w,q}} \quad \text{y} \quad \|(f - g) \chi_B\|_{\Gamma_{w,q}} \leq C' W_1(|B|)^{-\frac{1}{q}} \inf_{h \in \Pi^m} \|(f - h) \chi_B\|_{\Gamma_{w,q}}.$$

Aquí, $W_1(s) = s \int_s^\alpha \frac{w(t)}{t} dt$, Π^m denota el espacio de polinomios de grado menor o igual a m , y $\overline{\mathcal{P}}_{w,1,B}^m(f) \subset 2^{\Pi^m}$ representa el conjunto de mejores aproximaciones extendidas desde Γ_0 en el conjunto B . Las constantes C y C' dependen únicamente de q , m y del peso w , pero no de la función f ni de B .

Además, analizamos el comportamiento asintótico de estas aproximaciones cuando el conjunto B se contrae a un conjunto finito de puntos, y probamos que las sucesiones de mejores aproximaciones extendidas convergen hacia un polinomio de Hermite generalizado, lo que permite interpretar al operador extendido como un puente entre la aproximación global y la reconstrucción local.

En conjunto, estos resultados completan el panorama teórico del operador $\overline{\mathcal{P}}_{w,1,B}^m$ en los espacios $\Gamma_{w,q}$, y refuerzan su utilidad como herramienta analítica en contextos con pesos singulares y estructura cuasi-Banach.

Este trabajo está parcialmente subvencionado por la Universidad Nacional de Río Cuarto (PPI 18/C614-2), Universidad Nacional de La Pampa, Facultad de Ingeniería (Resol. Nro. 203/23) y CONICET (PIP 112-202001-00694CO).

Trabajo en conjunto con Federico D. Kovac (Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Pampa), Fabián E. Levis y Ludmila Zabala (FCEFQyN, Universidad Nacional de Río Cuarto, CONICET).

Referencias

- [1] D. E. Ferreyra, M. I. Gareis and F. E. Levis. Extended best polynomial approximation operator in Orlicz–Lorentz spaces. *Math. Nachr.* 295 (2022), 1292–1311.
- [2] A. P. Calderón. Intermediate spaces and interpolation, the complex method. *Studia Math.* 24 (1964), 113–190.
- [3] M. Ciesielski, A. Kamińska and R. Pluciennik. Gâteaux derivatives and their applications to approximation in Lorentz spaces $\Gamma_{p,w}$. *Math. Nachr.* 282 (2009), 1242–1264.
- [4] M. I. Gareis, F. D. Kovac and F. E. Levis. Inequalities in Lorentz spaces for the extended best polynomial approximation operator. *Bull. Sci. Math.* (submitted, 2024).
- [5] F. D. Kovac and F. E. Levis, Extended best approximation in L^{p-1} is near best approximation in L^q for $q \in [p-1, p)$. *J. Approx. Theory* 284 (2022), 105819.
- [6] F. D. Kovac, F.E. Levis and L. Zabala. Best approximations and their extensions in Lorentz–Gamma spaces. *J. Approx. Theory* (available online, 2025).

CONVERGENCIA UNIFORME DE SERIES TRIGONOMÉTRICAS

Santiago Giordani

CONICET, Argentina

sgjordani@alumnos.exa.unicen.edu.ar

Caracterizar de manera completa las sucesiones cuya serie de senos converge uniformemente es un problema notoriamente difícil. Por este motivo, a lo largo del tiempo se han propuesto diversas caracterizaciones parciales: la condición clásica de Chaundy y Jolliffe, los criterios de Leindler basados en variación acotada, y las extensiones más generales debidas a Tikhonov y Dyachenko, entre otros. Cada una de estas condiciones aporta información valiosa, aunque siempre sobre clases específicas de sucesiones.

En esta charla presento una nueva caracterización parcial, sencilla de formular y sorprendentemente eficaz. Se trata de una extensión natural de la condición de Chaundy y Jolliffe, que conserva su simplicidad pero amplía significativamente la familia de sucesiones para las cuales la serie de senos converge uniformemente. Una de las principales ventajas de esta aproximación es que algunos resultados previamente establecidos para sucesiones que satisfacen la condición de Chaundy y Jolliffe se transfieren de manera inmediata a la clase ampliada que introducimos.

Trabajo en conjunto con Jorge Tomás Rodríguez (UNICEN) y Martín Mazzitelli (Instituto Balseiro).

Referencias

- [1] T. W. Chaundy and A. E. Jolliffe. The uniform convergence of a certain class of trigonometrical series. *Proc. Lond. Math. Soc.* 2 (1917), 214–216.
- [2] L. Leindler. A note on the uniform convergence and boundedness of a new class of sine series. *Anal. Math.* 31 (2005), 269–275.
- [3] S. Tikhonov. On the uniform convergence of trigonometric series. *Math. Notes* 81 (2007), 268–274.
- [4] M. Dyachenko, A. Mukanov, and S. Tikhonov. Uniform convergence of trigonometric series with general monotone coefficients. *Canad. J. Math.* 71 (2019), 1445–1463.
- [5] S. Giordani. Trabajo final de Licenciatura en Ciencias Matemáticas. UNICEN. 2024.

CARACTERIZACIÓN DE PESOS DISTANCIA EN LAS CLASES A_p DE MUCKENHOUP

Ignacio Gómez Vargas

Instituto de Matemática Aplicada del Litoral (IMAL-UNL-CONICET). Santa Fe, Argentina

ignaciogomez@santafe-conicet.gov.ar

Dentro de la teoría de pesos A_p de Muckenhoupt, las funciones de la forma $w(x) = |x|^{-\alpha}$, con $-n < \alpha < n(p-1)$, son ejemplos clásicos de elementos pertenecientes a esta clase. Dado que $|x| = \text{dist}(x, \{0\})$, los denominados **pesos distancia**, definidos según la asignación $x \mapsto \text{dist}(x, E)^\theta$ con $E \subset \mathbb{R}^n$, engloban a estos ejemplos previamente conocidos y permiten plantear el siguiente interrogante: ¿qué condición geométrica se le debe imponer al conjunto E para que éste tenga asociado un peso distancia perteneciente a alguna de las clases A_p ? Recientemente, el concepto de **porosidad débil** ha surgido en la literatura especializada para dar una respuesta en el caso $p = 1$. En resumidas cuentas, un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ es débilmente poroso si y sólo si existe $\alpha > 0$ tal que $w(x) = \text{dist}(x, E)^{-\alpha} \in A_1$ [3]. Este resultado fue además extendido a espacios más generales que los euclídeos como lo son los espacios métricos con medida duplicante [5], los espacios de tipo homogéneo [1] e incluso ha sido reformulado en contextos laterales [2].

En este trabajo, nos proponemos caracterizar los subconjuntos E de $\mathbb{R}^n$ para los cuales se cumple que dado $p > 1$ existe $\theta \neq 0$ tal que $\text{dist}(\cdot, E)^\theta \in A_p$. Debido a la contención $A_1 \subsetneq A_p$, para esto será necesario introducir una nueva condición geométrica sobre dichos conjuntos que generalice a la de porosidad débil y que puede enunciarse de la siguiente forma. Dado un cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$, consideremos la colección $\mathcal{D}_E(Q) = \{Q' \in \mathcal{D}(Q) : Q' \cap E = \emptyset \wedge \pi Q' \cap E \neq \emptyset\}$ donde $\mathcal{D}(Q)$ denota la familia de subcubos diádicos de Q y $\pi Q'$ es el padre diádico de Q' . Veremos que la condición adecuada es entonces la existencia de constantes $0 < s < 1$ y $C > 0$ tales que

$$0 < \frac{\sup \left\{ L \geq 0 : \sum_{Q' \in \mathcal{D}_E(Q) \wedge l(Q') \geq L} |Q'| \geq s|Q| \right\}}{\inf \left\{ L \geq 0 : \sum_{Q' \in \mathcal{D}_E(Q) \wedge l(Q') \leq L} |Q'| \geq s|Q| \right\}} \leq C$$

para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$ que interseque $\bar{E}$ y donde $|Q'|$ y $l(Q')$ denotan el volumen y la longitud de lado de Q' , respectivamente. El resultado principal de este trabajo es el siguiente.

Teorema. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(i) Existen constantes $C > 0$ y $0 < s < (1 + 2^n)^{-1}$ tales que la condición anterior se cumple para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$ que interseque $\bar{E}$;

(ii) Para todo $p \in (1, \infty)$, existe $\theta \neq 0$ tal que $\text{dist}(\cdot, E)^\theta \in A_p$.

Con respecto al ítem (i) del teorema anterior discutiremos, además, de qué forma esta engloba al concepto de porosidad débil propuesto en [3] y presentaremos un enfoque probabilístico que será de utilidad para el estudio de ejemplos concretos de conjuntos $E \subset \mathbb{R}$ que tienen asociados pesos distancia ya sea del tipo A_p o meramente duplicantes (*doubling weights*). Los resultados de esta comunicación están contenidos en [4].

Referencias

- [1] H. Aimar, I. Gómez and I. Gómez Vargas. Weakly porous sets and A_1 Muckenhoupt weights in spaces of homogeneous type, arXiv 2406.14369.
- [2] H. Aimar, I. Gómez, I. Gómez Vargas and F. J. Martín-Reyes. One-sided Muckenhoupt weights and one-sided weakly porous sets in $\mathbb{R}$. J. Funct. Anal. 289 (2025), 111110.
- [3] T. C. Anderson, J. Lehrbäck, C. Mudarra and A. V. Vähäkangas. Weakly porous sets and Muckenhoupt A_p distance functions. J. Funct. Anal. 287 (2024), 110558.
- [4] I. Gómez Vargas. New characterizations of Muckenhoupt A_p distance weights for $p > 1$, arXiv:2507.18805.
- [5] C. Mudarra. Weak porosity on metric measure spaces, arXiv 2306.11419.

REDES DE DISPERSIÓN EN GRUPOS FINITOS PARA CLASIFICACIÓN DE IMÁGENES Y SONIDOS

Eugenio Hernández

Universidad Autónoma de Madrid, España
eugenio.hernandez@uam.es

Muchos problemas requieren clasificar datos definidos en conjuntos finitos con alguna estructura, por ejemplo, grupos finitos no necesariamente conmutativos. Antes de usar un clasificador (máquinas de soporte vectorial o redes neuronales) es conveniente hacer un preprocesado de los datos. Las redes de dispersión permiten extraer características de los datos que incrementan la fiabilidad de la clasificación.

En esta conferencia mostraremos la estructura de las redes de dispersión sobre grupos finitos basada en la convolución con marcos de Parseval, así como sus propiedades. Expondremos también los resultados obtenidos en la clasificación de algunas imágenes y sonidos.

Trabajo en conjunto con María Teresa Arias y Davide Barbieri (Universidad Autónoma de Madrid).

OPERADORES SCHRÖDINGER-CALDERÓN-ZYGMUND CON DECAIMIENTO EXPONENCIAL: ESTIMACIONES CON PESOS PARA $p = 1$

Gabriela Rocío Lezama

Instituto de Matemática Aplicada del Litoral- Dra. Eleonor Harboure(UNL-CONICET), Argentina
lgabrielarocio@gmail.com

Motivados por el estudio de operadores asociados a $\mathcal{L} = -\Delta + \mu$, donde μ es una medida de Radón no negativa que satisface ciertas propiedades, se considera la familia de operadores integrales singulares de tipo Schrödinger–Calderón–Zygmund exponencial.

Esta familia de operadores, cuyos núcleos exhiben decaimiento exponencial asociados a una función de radio crítico ρ , fue introducida en [3]. Allí se prueban resultados de acotación en espacios $L^p(w)$, con $1 < p < \infty$ y $w \in H_{p,c}^{\rho,m}$, con $m, c > 0$, donde la familia de pesos, definida en [1], extiende de manera natural a las clases A_p^ρ introducidas en [2].

En esta comunicación nos centramos en el caso extremo $p = 1$ y establecemos la acotación de $L^1(w)$ en $L^{1,\infty}(w)$ para pesos w en la clase $H_{1,c}^{\rho,m}$, con $m, c > 0$.

Trabajo en conjunto con Estefanía Dalmasso (Instituto de Matemática Aplicada del Litoral, UNL, CONICET y FIQ, UNL) y Marisa Toschi (Instituto de Matemática Aplicada del Litoral, UNL, CONICET, y FHUC, UNL).

Referencias

- [1] J. Bailey, J. Weights of exponential growth and decay for Schrödinger-type operators. J. Funct. Anal. 281 (2021), 108996, 93 pp.
- [2] B. Bongioanni, E. Harboure and O. Salinas. Classes of weights related to Schrödinger operators. J. Math. Anal. Appl. 373 (2011), 563–579.
- [3] E. Dalmasso, G. Lezama and M. Toschi. Weighted estimates for Schrödinger–Calderón–Zygmund operators with exponential decay. To appear in Banach J. Math. Anal., arxiv:2412.08566.

GRAFOS PONDERADOS EN EL SENTIDO DE JOHN Y LA DESIGUALDAD DE POINCARÉ

Fernando López García

Cal Poly Pomona, Estados Unidos
fal@cpp.edu

En este trabajo establecemos una condición sobre grafos ponderados de medida finita que asegura la validez de la desigualdad de Poincaré global. Dicha condición puede entenderse como un análogo discreto del criterio introducido por J. Boman en 1982 para cubos de Whitney en dominios en el espacio euclídeo, el cual a su vez caracteriza la condición formulada originalmente por F. John en su trabajo seminal de 1961.

Trabajo en conjunto con John Rodriguez (University of Washington, Estados Unidos).

DESIGUALDADES DE SÓBOLEV-POINCARÉ EN $L^{p(\cdot)}(\Omega)$

Ignacio Ojea

Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UBA - IMAS, CONICET, Argentina
iojea@dm.uba.ar

Estudiamos desigualdades de la forma

$$\|f - f_{\Omega}\|_{L^{q(\cdot)}(\Omega)} \leq C \|d^{1-\alpha} \nabla f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)},$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio de John, d es la distancia al borde $\partial\Omega$, $p : \Omega \rightarrow (1, \infty)$ es un exponente variable, $0 \leq \alpha < 1$ y $q(\cdot)$ se define por:

$$\frac{1}{q(\cdot)} = \frac{1}{p(\cdot)} - \frac{\alpha}{n}.$$

Esta familia de desigualdades contempla la desigualdad de Poincaré mejorada, que ocurre cuando $q(\cdot) = p(\cdot)$ y $\alpha = 0$, y recibe ese nombre a raíz del peso con exponente positivo en el lado derecho. En el otro extremo, se tiene que para $\alpha = 1$, $q(\cdot) = p(\cdot)^*$, que corresponde a la desigualdad de Sóbolev-Poincaré (sin peso).

Estas desigualdades son bien conocidas en espacios de Sóbolev clásicos. En particular, se sabe que los dominios de John son esencialmente la clase más general de dominios para los cuales son válidas. En espacios con exponente variable, la desigualdad de Sóbolev Poincaré fue demostrada bajo la hipótesis de log-Hölder continuidad del exponente $p(\cdot)$, como consecuencia de la continuidad del operador maximal de Hardy-Littlewood.

En esta charla mostramos que (1) (con $\alpha < 1$) vale sobre dominios de John bajo condiciones mucho más laxas. En particular, necesitamos una condición de log-Hölder continuidad solo en el borde del dominio y un control de la oscilación de $p(\cdot)$ en el interior de Ω que admite saltos discontinuos. De hecho, $p(\cdot)$ puede ser discontinuo en todo punto. Nuestra demostración se basa en una técnica de descomposición de funciones acompañada de un argumento de local a global.

Presentamos además un contraejemplo que muestra que nuestra condición de log-Hölder continuidad en el borde es necesaria. Concretamente, construimos un exponente $p(\cdot)$ uniformemente continuo que no satisface esta hipótesis y para el cual la desigualdad no puede ser cierta. Una adaptación del mismo ejemplo permite probar que la log-Hölder continuidad clásica (en el interior de Ω) es necesario para la validez de otras desigualdades relacionadas, como la acotación de la solución del operador divergencia o la desigualdad de Korn.

Trabajo en conjunto con David Cruz-Urbe OFS (University of Alabama) y Fernando López-García (California State Polytechnic University Pomona).

UN CONTRAEJEMPLO DE LA DESIGUALDAD DE FEFFERMAN-STEIN PARA LA MAXIMAL LATERAL EN DIMENSIÓN 3

Sheldy Javier Ombrosi

Universidad Nacional del Sur, Argentina
sheldyombrosi@gmail.com

La teoría de pesos laterales ha tenido un gran desarrollo en dimensión $n = 1$. Sin embargo, en dimensiones superiores solo se conocen resultados parciales. En esta charla, repasaremos algunos de esos resultados y mostraremos un contraejemplo a la desigualdad natural en el extremo ($p = 1$) esperable en dimensión $n = 3$ para el operador M^+ . Si el tiempo lo permite, también exhibiremos una variante más débil que sí puede ser obtenida. Esta charla se basa en un trabajo conjunto con F. Nazarov.

Trabajo en conjunto con Fedor Nazarov (Kent State University).

OPERADORES CON NÚCLEOS QUE SATISFACEN UNA CONDICIÓN TIPO HÖRMANDER $H_{r(\cdot)}$

Rodrigo Matías Pastrana

FAMAF-UNC-CIEM-CONICET, Argentina
rodrigompastrana@gmail.com

Siguiendo la idea de [2] definiremos una condición de tipo Hörmander, $H_{r(\cdot)}$, donde $r(\cdot)$ es un exponente variable. Mostraremos que dado T un operador inducido por un núcleo K , $p > 0$, w un peso en A_∞ , se obtiene una desigualdad de tipo Coifman:

$$\int |Tf|^p w \leq c \int (M_{r'(\cdot)} f)^p w,$$

donde $M_{r'(\cdot)}$ es el operador maximal introducido en [1]. Este se define de la siguiente manera

$$M_{r(\cdot)} f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{\|f \chi_Q\|_{r(\cdot)}}{\|\chi_Q\|_{r(\cdot)}}$$

donde el supremo es tomado sobre todos los cubos Q de lados paralelos a los ejes conteniendo a x .

Además obtendremos una desigualdad de tipo fuerte para T en espacios de Lebesgue variable. Finalmente presentaremos algunos ejemplos de núcleos en $H_{r(\cdot)}$, analizando como son las contenciones de estas clases $H_{r(\cdot)}$.

Trabajo en conjunto con María Silvina Riveros y Raúl Emilio Vidal (FAMAF-UNC-CIEM-CONICET).

Referencias

- [1] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö and M. Ruzicka. Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents. Lecture Notes in Mathematics 2017, Springer, 509 p. (2011).
- [2] M. Llorente, M. S. Riveros and A. De La Torre. Weighted estimates for singular integral operators satisfying Hörmander's conditions of Young type. J. Fourier Anal. Appl. 11 (2005), 497–509.
- [3] J. M. Martell, C. Pérez and R. Trujillo-González. Lack of natural weighted estimates for some singular integral operators. Trans. Amer. Math. Soc. 357 (2005), 385–396.

EXTENSIONES DEL TEOREMA DE SOBOLEV

Carlos Pérez Moreno

Universidad del País Vasco y BCAM, España
cperez@bcamath.org

En esta comunicación se presentarán extensiones del teorema de Sobolev generalizando la fórmula clásica de (sub) representación:

$$|f(x)| \leq c_n \int_1^{|x|} |\nabla f|(t) dt$$

en varias direcciones. Enfatizaremos la conexión con conceptos fundamentales como las desigualdades isoperimétricas y el teorema de extrapolación no diagonal de Harboure-Macias-Segovia.

Trabajo en conjunto con Cong Hoang (Florida Agricultural and Mechanical University, Estados Unidos) y Kabe Moen (University of Alabama, Estados Unidos).

Referencias

- [1] C. Hoang, K. Moen and C. Pérez, Pointwise estimates for rough operators with applications to Sobolev inequalities, J. Anal. Math. 155 (2025), 43–74.
- [2] C. Hoang, K. Moen and C. Pérez, New pointwise bounds by Riesz Potential Type Operators, J. Funct. Anal. 289 (2025), 111060, 35 p.

RESTRICCIÓN A CONJUNTOS CON DIMENSIÓN 0

Iván Polasek

IMAS, Argentina
ivanpolasek17@gmail.com

El Teorema de Stein-Thomas-Mockenhaupt garantiza la posibilidad de restringir la transformada de Fourier a un conjunto E si este soporta una medida μ que satisface dos condiciones: una condición de tipo Frostman

$$\mu(B(x, R)) \lesssim R^\alpha \quad \forall x \in E, R > 0$$

y un decaimiento de Fourier

$$|\widehat{\mu}(\xi)| \lesssim (1 + |\xi|)^{-\beta/2} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

En particular, esto fuerza al conjunto E a tener dimensión de Hausdorff y de Fourier positivas, y no resulta claro a priori que un resultado similar pueda obtenerse para conjuntos de dimensión 0.

En esta charla compartiremos una versión generalizada del Teorema de Stein-Thomas-Mockenhaupt y un conjunto de dimensión Hausdorff 1 y dimensión de Fourier 0 sobre el cual puede restringirse la transformada de Fourier gracias a este resultado generalizado.

Trabajo en conjunto con Ezequiel Rela (IMAS).

DOMINACIÓN SPARSE CANCELATIVA

Guillermo Rey

Universidad Autónoma de Madrid, España
guillermo.rey@uam.es

We prove a sparse domination result which preserves the cancellative structure of the input function. The result holds for martingale transforms and Calderón-Zygmund operators, and has applications to boundedness of these operators on Hardy spaces.

Trabajo en conjunto con José M. Conde Alonso (Universidad Autónoma de Madrid) y Emiel Loris (TU Delft).

MEJOR APROXIMACIÓN LOCAL Y DESIGUALDADES TIPO PÓLYA EN ESPACIOS DE LEBESGUE CON EXPONENTE VARIABLE

Claudia Vanina Ridolfi

Universidad Nacional de San Luis, FCFMyN, Argentina
claudiavridolfi@gmail.com

La teoría de la mejor aproximación local estudia el comportamiento asintótico de las mejores aproximaciones polinomiales en vecindades que se contraen hacia un conjunto finito de puntos. Este problema se ha tratado clásicamente en espacios L^p para funciones suficientemente diferenciables, y sus soluciones guardan una estrecha relación con la interpolación de Hermite de la función a aproximar [1,5].

En este trabajo extendemos dicho análisis al marco de los espacios de Lebesgue de exponente variable $L^{p(\cdot)}$, una generalización natural de los espacios L^p , ampliamente utilizada en análisis armónico y en el cálculo de variaciones [2,3]. Este contexto más flexible permite modelar fenómenos con regularidad variable y plantea nuevos desafíos en la teoría de la aproximación. En particular, obtenemos una forma asintótica del error de la mejor aproximación polinomial, medido en la norma de Luxemburgo promediada con exponente variable, la cual resulta especialmente adecuada para capturar la variabilidad del exponente.

Demostramos que, al reescalar correctamente estas expresiones, es posible caracterizar con precisión el comportamiento límite de las mejores aproximaciones. Más aún, mostramos que dichos aproximantes convergen hacia las soluciones de un problema de minimización discreto sujeto a restricciones de tipo Hermite.

Además, se presenta una versión generalizada de la desigualdad de tipo Pólya en este contexto, que juega un papel central en el análisis. Esta desigualdad constituye una herramienta fundamental para obtener estimaciones cuantitativas del error de aproximación, y representa una extensión natural de resultados conocidos en el marco clásico de los espacios L^p [4].

Este trabajo está parcialmente subvencionado por Universidad Nacional de Río Cuarto (PPI 18/C614-2), Universidad Nacional de San Luis (PROICO 03/0720), Universidad Nacional de La Pampa, Facultad de Ingeniería (RCD 203/23) y CONICET (PIP 11220200100694CO).

Trabajo en conjunto con Fabián Levis (Universidad Nacional de Río Cuarto, CONICET, FCEFYQyN), Claudia Rodríguez (Universidad Nacional de Río Cuarto, FCEFYQyN) y Juan Costa Ponce (Universidad Nacional de San Luis, CONICET, IMASL).

Referencias

- [1] R. Beatson and C. Chui. Best multipoint local approximation, Functional Analysis and Approximation: Proc. Conf. Mathematical Research Institut Oberwolfach 1980 (1981), 283–296.
- [2] O. Kováčik and J. Rákosník. On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$. Czechoslovak Math. J. 116 (1991), 592–618.
- [3] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö and M. Ruzicka. Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents. Lecture Notes in Mathematics 2017. Springer, 509 p. (2011).
- [4] H. Cuenya and F. Levis, Pólya-type polynomial inequalities in L^p spaces and best local approximation. Numer. Funct. Anal. Optim. 26 (2005), 813–827.
- [5] M. Marano, Mejor Aproximación Local, Tesis Doctoral. Universidad Nacional de San Luis. (1986).

RESULTADOS RECIENTES EN TEORÍA DE PESOS LATERALES

Israel Pablo Rivera Ríos

Universidad de Málaga, España
israelpriverarios@uma.es

En esta charla presentaremos algunos resultados obtenidos en teoría de pesos laterales en los últimos años en trabajos conjuntos con María Lorente, y Francisco J. Martín-Reyes. En particular, mostraremos resultados sobre desigualdades cuantitativas y extrapolación de la compacidad.

Trabajo en conjunto con María Lorente y Francisco J. Martín-Reyes (Universidad de Málaga, España).

Referencias

- [1] F. J. Martín-Reyes and I. P. Rivera-Ríos. A note on one sided extrapolation of compactness and applications (Aceptado en Studia Math.)
- [2] M. Lorente, F. J. Martín-Reyes and I. P. Rivera-Ríos. Some quantitative one-sided weighted estimates J. Math. Anal. Appl. 529 (2024), 126943.
- [3] M. Lorente, F. J. Martín-Reyes and I. P. Rivera-Ríos. One-sided C_p estimates via Msharp function Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 153 (2023), no. 6, 2079–2105.

SAMPLING PROPERTIES OF THE ZEROES OF THE GAUSSIAN ENTIRE FUNCTION

Joaquín Camilo Singer

Universidad de Buenos Aires, Argentina
jsinger@dm.uba.ar

We study sampling properties of the zero set of the Gaussian entire function on Fock spaces. Firstly, we relax Seip and Wallstén's density and separation conditions for sampling sets on Fock spaces to obtain weighted inequalities for sets that are not necessarily sampling. On the probabilistic front, we estimate the number of zeroes of the Gaussian entire functions that are close to each other. We use these to prove random sampling inequalities for polynomials of degree at most d using $d + o(d)$ points, and show that, with high probability, the sampling constants grow slower than d^ε for any $\varepsilon > 0$.

In particular, we recover a result from Lyons and Zhai in the case of the Gaussian entire function, where it is shown that the zeroes are (almost surely) a uniqueness set for the Fock space.

Trabajo en conjunto con Jeremiah Buckley (King's College London, United Kingdom) y Felipe Marceca (Acoustics Research Institute - Austrian Academy of Sciences, Austria).

REARRANGEMENT-INVARIANT HULLS OF WEIGHTED LEBESGUE SPACES

Javier Soria

Universidad Complutense de Madrid, España
javier.soria@ucm.es

We characterize the rearrangement-invariant hull, with respect to a given measure μ , of weighted Lebesgue spaces. The solution leads us to first consider when this space is contained in the sum of $(L^1 + L^\infty)(\mathbb{R}, \mu)$ and the final condition is given in terms of embeddings for weighted Lorentz spaces.

Trabajo en conjunto con Martin Křepela y Zdeněk Mihula (Czech Technical University in Prague).

OPERADORES MULTILINEALES INDUCIDOS POR HIPERMÉTRICAS

Joaquín Toledo

IMAL, Argentina
joaquintoledo@santafe-conicet.gov.ar

Dados $n \geq 1$ y $m \geq 2$ enteros, si Δ denota la diagonal de $(\mathbb{R}^n)^{m+1}$, es decir, $\Delta = \{(x, x, \dots, x) : x \in \mathbb{R}^n\}$, definimos $\rho(x_1, \dots, x_{m+1}) = d((x_1, \dots, x_{m+1}), \Delta)$. En analogía con los potenciales que provienen de la física clásica que son del tipo $\varphi(|x|)$ para un perfil φ generalmente monótono decreciente, estudiamos en este trabajo las propiedades de acotación de los operadores multilineales generados por núcleos que son de la forma

$$K(x_1, \dots, x_m, x) = \varphi(\rho(x_1, \dots, x_m, x))$$

con φ adecuadas para producir núcleos (integrables) aptos para la versión multilineal [2] del lema de Schur y otros perfiles φ que son potencias negativas de ρ y generan operadores de tipo integración fraccionaria multilineales que difieren de los usuales [1] en el hecho de que en nuestro caso la singularidad está concentrada en la diagonal de $(\mathbb{R}^n)^{m+1}$. Este segundo problema lo abordamos desde los resultados de acotación clásicos de la teoría del operador de integración fraccionaria y usando el Teorema de Interpolación Multilineal de [1]. Por simplicidad enunciamos los resultados para el caso bilineal.

Teorema 1 Si φ es decreciente en sentido amplio y $\int_0^\infty \varphi(t)t^{2n-1}dt < \infty$, entonces el operador

$$T(f, g)(x) = \int_{x_1 \in \mathbb{R}^n} \int_{x_2 \in \mathbb{R}^n} K(x_1, x_2, x) f(x_1) g(x_2) dx_1 dx_2$$

aplica $L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \times L^{p_2}(\mathbb{R}^n)$ en $L^r(\mathbb{R}^n)$ con $\|T(f, g)\|_r \leq C(\varphi) \|f\|_{p_1} \|g\|_{p_2}$ para $1 < p_1 < \infty$, $1 < p_2 < \infty$ y $1 < r < \infty$ con $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{r}$.

El Teorema 1 se obtiene del Lema de Schur multilineal de [2]. Ninguna potencia $\varphi(t) = t^\alpha$, $t > 0$, satisface la condición $\int_0^\infty \varphi(t)t^{2n-1}dt < \infty$. Por consiguiente, el Teorema 1 no contiene lo que son los análogos de los potenciales newtonianos para estas hipermétricas ρ . Un resultado en la dirección del análisis de integrales fraccionarias asociadas a ρ es el siguiente.

Teorema 2 Sea $0 < \gamma < n$ y $K(x_1, x_2, x) = \rho^\gamma(x_1, x_2, x)$. Entonces el operador

$$T^\gamma(f, g)(x) = \int_{x_1 \in \mathbb{R}^n} \int_{x_2 \in \mathbb{R}^n} \frac{f(x_1)g(x_2)}{\rho^\gamma(x_1, x_2, x)} dx_1 dx_2$$

es de tipo débil restringido (p, q', ∞) , $(\tilde{q}', \tilde{p}, \infty)$ y $(p^\diamond, 1, q^\diamond)$ con $\frac{1}{q'} = 1 - \frac{1}{p} + \frac{n-\gamma}{n} \frac{1}{q}$, $\frac{1}{\tilde{p}} = 1 - \frac{1}{p} + \frac{n-\gamma}{n} \frac{1}{q^\diamond} = \frac{1}{p^\diamond} - \frac{n-\gamma}{n}$ y $1 < p, \tilde{p}, p^\diamond < \frac{n}{n-\gamma}$. Por consiguiente T^γ es acotado de $L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \times L^{p_2}(\mathbb{R}^n)$ en $L^r(\mathbb{R}^n)$ para toda terna (p_1, p_2, r) tal que $(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}, \frac{1}{r})$ pertenezca a la cápsula convexa de $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q'}, 0)$, $(\frac{1}{\tilde{q}}, \frac{1}{\tilde{p}}, 0)$ y $(\frac{1}{p^\diamond}, 1, \frac{1}{q^\diamond})$ para cualquier elección de $p, \tilde{p}$ y $p^\diamond$ como arriba.

Trabajo en conjunto con Ivana Gómez y Hugo Aimar (IMAL).

Referencias

- [1] L. Grafakos. Modern Fourier Analysis. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2014.
- [2] L. Grafakos y R. Torres. A multilinear Schur test and multiplier operators. J. Funct. Anal. 187 (2001), 1–24.
- [3] C. Kenig y E. Stein. Multilinear estimates and fractional integration. Math. Res. Lett. 6 (1999), 1–15.

ACOTACIONES DEL TIPO $L^\infty - BMO$ CON PESOS PARA OPERADORES DE CALDERÓN-ZYGMUND FUERTEMENTE SINGULARES

Ignacio Viltes

Facultad de Ingeniería Química (UNL-CONICET), Santa Fe, Argentina
viltesignacio@hotmail.com

Los operadores de Calderón-Zygmund fuertemente singulares constituyen un pilar fundamental del Análisis Armónico y la Teoría de Ecuaciones en Derivadas Parciales, debido a su estrecha relación con una amplia gama de operadores pseudodiferenciales e integrales oscilatorias. Como su nombre sugiere, estos operadores comparten muchas de las propiedades esenciales de la teoría clásica, diferenciándose de ella por sus núcleos, que no requieren condición de tamaño y exhiben singularidades más pronunciadas en la diagonal de $\mathbb{R}^{2n}$.

Siguiendo las definiciones de Álvarez y Milman [1], consideramos operadores lineales acotados $T: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$, que se extienden de manera continua a L^2 y cuya acción se describe mediante

$$\langle Tf, g \rangle = \iint K(x, y) f(y) g(x) dy dx, \quad \forall f, g \in \mathcal{S} \text{ con soportes disjuntos,}$$

donde K es continua fuera de la diagonal de $\mathbb{R}^{2n}$ y satisface la condición de regularidad

$$|K(x, y) - K(x, z)| + |K(y, x) - K(z, x)| \leq C \frac{|y - z|^\delta}{|x - z|^{n+\frac{\delta}{\alpha}}} \quad \text{si } |x - z| \geq 2|y - z|^\alpha,$$

para ciertos parámetros $0 < \delta, \alpha \leq 1$. Además, asumimos una propiedad de mejora de la integrabilidad, de modo que tanto T como su adjunto T^* se extienden de manera continua de L^q en L^2 , con

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{q} - \frac{\beta}{n}, \quad \text{para algún } \frac{n(1-\alpha)}{2} \leq \beta < \frac{n}{2}.$$

Esta clase de operadores constituye así una generalización natural de los conocidos multiplicadores

$$\widehat{T_{\alpha\beta}f}(\xi) = \frac{e^{i|\xi|^\alpha}}{|\xi|^\beta} \theta(\xi) \hat{f}(\xi),$$

donde $0 < \alpha < 1$, $\beta > 0$ y θ es una función de corte estándar (cf. [9, 4, 5]).

En el marco de los espacios L^p , Álvarez y Milman [1, 2] obtuvieron resultados que extienden la teoría clásica de operadores de Calderón–Zygmund al caso fuertemente singular. A diferencia del ejemplo paradigmático del operador $T_{\alpha\beta}$ con $\beta = n\alpha/2$, que cuenta con una teoría de pesos A_p consolidada (cf. [3, 6]) y para el cual hemos obtenido recientemente criterios suficientes para la acotación $L^\infty - BMO$ con pesos, en este contexto generalizado, ciertos casos extremos de interés permanecen inexplorados (e.g., [8, 7]). En este trabajo proponemos condiciones sobre los pesos que garantizan la acotación $L^\infty - BMO$ para operadores de Calderón–Zygmund fuertemente singulares, y discutimos extensiones naturales junto con posibles perspectivas futuras.

Trabajo en conjunto con Gladis G. Pradolini (Facultad de Ingeniería Química, UNL-CONICET), Fabio M. Berra (Facultad de Ingeniería Química, UNL-CONICET) y Wilfredo A. Ramos (Instituto de Modelado e Innovación Tecnológica, CONICET-UNNE).

Referencias

- [1] J. Álvarez and M. Milman, H^p continuity properties of Calderón–Zygmund-type operators, J. Math. Anal. Appl. 118 (1986), 63–79.
- [2] J. Álvarez and M. Milman, Vector valued inequalities for strongly singular Calderón–Zygmund operators, Rev. Mat. Iberoamericana 2 (1986), 405–426.
- [3] S. Chanillo, Weighted norm inequalities for strongly singular convolution operators, Trans. Amer. Math. Soc. 281 (1984), 77–107.
- [4] C. Fefferman, Inequalities for strongly singular convolution operators, Acta Math. 124 (1970), 9–36.
- [5] C. Fefferman and E. M. Stein, H^p spaces of several variables, Acta Math. 129 (1972), 137–193.
- [6] J. García-Cuerva, E. Harboure, C. Segovia and J. L. Torrea, Weighted norm inequalities for commutators of strongly singular integrals, Indiana Univ. Math. J. 40 (1991), 1397–1420.
- [7] W. Li and L. Wu, Weighted norm inequalities for multilinear strongly singular Calderón–Zygmund operators on RD -spaces, Math. Nachr. 297 (2024), 657–680.
- [8] T. Picon and C. Vasconcelos, On the Continuity of Strongly Singular Calderón–Zygmund-Type Operators on Hardy Spaces, Integr. Equ. Oper. Theory 95 (2023), no. 9.
- [9] S. Wainger, Special trigonometric series in k -dimensions, Mem. Amer. Math. Soc. 59 (1965).

APROXIMACIÓN MATRICIAL DE RANGO BAJO: CARACTERIZACIÓN GEOMÉTRICA Y FORMA EXPLÍCITA DE LAS SOLUCIONES

Ludmila Zabala

Universidad Nacional de Río Cuarto, CONICET, FCEFYQ, Argentina
 lzabala@exa.unrc.edu.ar

En álgebra matricial, el problema de aproximación de rango bajo consiste en hallar, entre todas las matrices de rango acotado, la que mejor aproxima una dada. Una solución analítica está caracterizada por el teorema de Eckart–Young–Mirsky, basado en la descomposición en valores singulares [1, 2]. Esta teoría es central en áreas como compresión de datos, aprendizaje automático y análisis de señales.

Desde un punto de vista más general, la idea de encontrar una subestructura lineal que represente óptimamente un conjunto de datos, motivó la noción de subespacios óptimos, introducida por Kolmogorov [3]. Estos subespacios permiten describir clases de funciones o señales a través de bases reducidas que capturan su estructura esencial. En espacios de Hilbert, su existencia y construcción explícita fueron establecidas en los trabajos [4, 5].

En esta charla se presenta una nueva caracterización geométrica del problema de aproximación de rango bajo, mostrando que toda solución óptima puede obtenerse mediante proyecciones ortogonales sobre subespacios óptimos. Este enfoque no solo ofrece una interpretación intuitiva de las soluciones, sino que

además permite caracterizar todas las aproximaciones de rango bajo, y extender naturalmente los resultados al contexto de espacios de Hilbert, de gran utilidad en problemas infinito-dimensionales [6]. Más precisamente, sea $G \in \mathbb{R}^{m \times k}$ con descomposición en valores singulares (SVD) $G = U\Sigma Q^\top$ y sea $\mathcal{M}_n(G)$ el conjunto de todas las mejores aproximaciones a G de rango n . Mostramos que toda $\hat{G} \in \mathcal{M}_n(G)$ se puede escribir como

$$\hat{G} = U_1 \Sigma_1 Q_1^\top + \sigma_n U_2 B_2 Q_2^\top,$$

donde U_1 , U_2 , Q_1 , Q_2 y Σ_1 provienen de una partición específica de la SVD de G , B_2 es una matriz de proyección ortogonal de rango $n - p$, y p denota el índice del último valor singular estrictamente mayor que σ_n entre los primeros n valores singulares (con la convención $p = 0$ si $\sigma_1 = \sigma_n$). Esta expresión permite describir de forma explícita todas las soluciones óptimas como sumas de proyecciones sobre subespacios de singularidades dominantes y degeneradas.

Este trabajo está parcialmente subvencionado por la Universidad Nacional de Río Cuarto (PPI 18/C614-2), Universidad Nacional de La Pampa, Facultad de Ingeniería (Resol. Nro. 203/23), y CONICET (PIP 112-202001-00694CO).

Trabajo en conjunto con Federico Kovac, Marina V. Roldán (Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Pampa) y Fabián Levis (FCEFQyN, Universidad Nacional de Río Cuarto, CONICET).

Referencias

- [1] E. Schmidt. Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. Math. Ann. 63 (1907), 433–476.
- [2] L. Mirsky. Symmetric gauge functions and unitarily invariant norms. Q. J. Math. 11 (1960), 50–59.
- [3] A. N. Kolmogorov. On the best approximation of functions of a given class. Ann. of Math. 37 (1936), 107–110.
- [4] A. Aldroubi, C. Cabrelli and U. Molter. Optimal non-linear models for sparsity and sampling. J. Fourier Anal. Appl. 14 (2008), 793–812.
- [5] H. Cuenya, F. Levis, M. Lorenzo and C. Rodríguez. Optimal subspaces in normed spaces. East J. Approx. 16 (2010), 193–207.
- [6] J. Conway. A Course in Functional Analysis. Springer-Verlag, New York, 1990.

Análisis Funcional y Complejo

IGUALDAD DE TIPO LIDSKII PARA OPERADORES COMPACTOS Y POSITIVOS: POSIBLES APLICACIONES

María José Benac

Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías - Universidad Nacional de Santiago del Estero, Argentina
mjbenac@gmail.com

En dimensión finita han sido caracterizadas las matrices que verifican la igualdad de Lidskii, tanto en el caso aditivo como en el multiplicativo, y esos resultados han sido fundamentales para caracterizar los óptimos de ciertas distancias que se definen sobre órbitas unitarias de matrices.

El objetivo de esta charla es extender la igualdad de Lidskii a operadores compactos y positivos utilizando herramientas del análisis matricial y, por otro lado, estudiar las aplicaciones de los resultados que surjan en dimensión infinita a problemas de distancias entre operadores positivos de tipo traza.

Trabajo en conjunto con Pedro Massey, Noelia Ríos y Mariano Ruiz (Universidad Nacional de La Plata).

Referencias

- [1] M. J. Benac, P. Massey, N. Ríos and M. Ruiz. Local minimizers of the distances to the majorization flows. *J. Phys. A, Math. Theor.* 56 (2023), Article ID 505203, 32 p.
- [2] A. Markus. The eigen-and singular values of the sum and product of linear operators. *Russ. Math. Surv.* 19 (1964), 91–120.
- [3] P. Massey, M. Ruiz and D. Stojanoff. Optimal frame completions with prescribed norms for majorization. *Advances in Computational Mathematics*, 40 (2014), 1011–1042.

PRODUCTO SEMI-INTERNO Y ÁNGULOS EN IDEALES SCHATTEN

Tamara Bottazzi

CONICET y Universidad de Río Negro (Sede Andina), Argentina
tbottazzi@unrn.edu.ar

Sean $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, el espacio de los operadores lineales y acotados definidos sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, y el ideal de los operadores p -Schatten, definido para $p > 1$ como

$$\mathcal{B}_p(\mathcal{H}) = \left\{ X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \|X\|_p = \left(\text{tr}(X^* X)^{p/2} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

Definimos a estas clases $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})$ como espacios con semi-producto interno (espacios SIP), en el sentido de Giles y Lumer [2,4]. La principal diferencia de un SIP con un producto interno es que no vale la linealidad en las dos componentes, sólo en una de ellas. En este contexto, exploramos nociones geométricas y analíticas como la ortogonalidad Birkhoff-James [1,3] y el paralelismo entre operadores, asociadas al SIP que surge naturalmente de estos ideales.

En este contexto, también obtenemos distintas desigualdades de operadores inherentes a estos SIP y a la norma p .

Finalmente, definimos una nueva noción de ángulo en $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})$, la cual unifica y generaliza las nociones existentes en espacios normados.

Trabajo en conjunto con Cristian Conde (Universidad Nacional de General Sarmiento y CONICET).

Referencias

- [1] G. Birkhoff. Orthogonality in linear metric spaces, Duke Math. J. 1 (1935), 169–172.
- [2] J. R. Giles. Classes of semi-inner-product spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 129 (1967), 436–446.
- [3] R. C. James. Orthogonality in normed linear spaces, Duke Math. J. 12 (1945), 291–301.
- [4] G. Lumer. Semi-inner-product spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 100 (1961), 29–43.

NÚMEROS DE ENTROPÍA Y DIMENSIÓN BOX EN ESPACIOS DE BANACH

Daniel Carando

Universidad de Buenos Aires - CONICET, Argentina
dcarando@dm.uba.ar

En esta charla estudiaremos números de entropía y dimensión “box” en espacios de Banach, con énfasis en las imágenes de bolas bajo distintas funciones. Veremos que un conjunto conexo y relativamente compacto tiene dimensión finita si y sólo si sus números de entropía decaen exponencialmente.

Luego analizaremos la imagen de una bola bajo un polinomio homogéneo. Mostraremos que su dimensión box es finita exactamente cuando genera un subespacio de dimensión finita. Aunque esto es inmediato para operadores lineales, resulta mucho más difícil para polinomios de grado mayor y, además, no vale para funciones holomorfas.

Finalmente, describiremos una relación entre los números de entropía de la imagen de una función holomorfa y los de los polinomios de su serie de Taylor.

Trabajo en conjunto con Carlos D’Andrea (Universitat de Barcelona), Leodan A. Torres (Universidade Federal de Uberlândia) y Pablo Turco (Universidad Buenos Aires y CONICET).

APROXIMACIÓN DIAGONAL SIMULTÁNEA DE DOS MATRICES HERMITIANAS 2×2

Erica Micaela Chaile

UNLP - IAM, Argentina
emchaile@mate.unlp.edu.ar

Sean X e Y matrices hermitianas de 2×2 y denotemos $\|\cdot\|$ la norma de operadores. Abordamos el problema de encontrar una matriz diagonal real $D \in D_2(\mathbb{R})$ que minimice la mayor de las normas de $X + D$ e $Y + D$. Es decir, encontramos explícitamente los valores $a, b \in \mathbb{R}$ que resuelven:

$$\min_{a,b \in \mathbb{R}} \max \left\{ \left\| X + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \right\|, \left\| Y + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \right\| \right\}.$$

Clasificamos las soluciones en casos según las relaciones entre las trazas y entradas diagonales de X e Y , permitiendo identificar en qué casos el minimizador es único.

Este problema de aproximación diagonal simultánea se enmarca en el estudio de la geometría del espacio de pares de proyecciones con conmutador fijo, cuyas órbitas admiten una estructura de espacio homogéneo (ver [4]). La solución presentada permite construir explícitamente levantamientos mínimos (es decir, matrices minimales) y, con ello, describir curvas de longitud mínima en un espacio homogéneo de la forma $\mathcal{U}_A/\mathcal{U}_B$ donde $\mathcal{U}_A$ son las matrices unitarias del álgebra $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ es una subálgebra. Estos espacios están dotados de la métrica de Finsler cociente inducida por la norma de operadores [1]. En particular, mostramos cómo la solución explícita obtenida permite resolver un problema de valor inicial en un caso especial de estas álgebras.

Trabajo en conjunto con Eduardo Chiumiento (Universidad Nacional de La Plata & IAM-CONICET).

Referencias

- [1] C. Durán, L. Mata-Lorenzo, L. Recht, Metric geometry in homogeneous spaces of the unitary group of a C^* -algebra. Part I: minimal curves, Adv. Math. 184 (2004) 342–366.
- [2] E. Andruchow, G. Larotonda, L. Recht and A. Varela, A characterization of minimal Hermitian matrices, Linear Algebra Appl. 436 (2012), 2366–2374.

- [3] A. H. Klobouk and A. Varela, Concrete minimal 3 x 3 Hermitian matrices and some general cases, Demonstr. Math. (2017), 330–350.
- [4] E. Chiumiento, M. Chaile. On projections with fixed commutator, operator angles and their geometry (2025).

EL OPERADOR DE CESÀRO EN SERIES DE DIRICHLET

Tomás Ariel Fernández Vidal
IMAS (UBA - CONICET), Argentina
tfernandezvidal@gmail.com

El operador de Cesàro actúa sobre una sucesión reemplazando el n -ésimo elemento por el promedio de los primeros n . Esto es, el operador de Cesàro $\mathcal{C}$ en una sucesión $(a_n)_n$ se define como

$$\mathcal{C}((a_n)_n) = \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)_n.$$

Esta definición induce un operador en series de potencias de forma natural, dada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ entonces

$$\mathcal{C} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^n a_k \right) z^n.$$

Como puede observarse en la bibliografía (ver por ejemplo [1]) ambas versiones del operador fueron estudiadas ampliamente. En el caso de las series de potencias, el principal interés estuvo centrado en la aplicación de $\mathcal{C}$ en los espacios de Hardy del disco clásicos.

En esta charla estudiaremos al operador de Cesàro en las series de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$. Veremos cómo este operador modifica la región de convergencia de una serie y cómo actúa en los espacios de Hardy de series de Dirichlet.

Trabajo en conjunto con Daniel Carando (Universidad de Buenos Aires), Felipe Marceca (Universidad de Viena) y Pablo Sevilla-Peris (Universidad Politécnica de Valencia).

- [1] W. T. Ross. The cesaro operator. Recent Progress in Function Theory and Operator Theory, Contemp. Math. 799 (2024), 185–215.

PROYECCIONES EN ESPACIOS DE POLINOMIOS SOBRE ESTRUCTURAS DISCRETAS DE ALTA DIMENSIÓN

Daniel Galicer
Universidad Torcuato Di Tella - IMAS, Argentina
daniel.galicer@utdt.edu

En este trabajo estudiamos proyecciones extremales en espacios de polinomios asociados al esquema de Hamming q -ario n -dimensional, que es simplemente el conjunto de todas las n -uplas cuyas coordenadas toman valores en un grupo cíclico de q elementos. Dentro de este marco aparecen de manera natural dos familias polinomiales muy importantes: por un lado, el espacio esférico de grado d , generado por funciones “básicas” cuyo soporte involucra exactamente d coordenadas, y por otro, el espacio de polinomios homogéneos de grado d , generado por monomios cuyo grado total es d .

Discutiremos un enfoque combinatorio–probabilístico que permite describir proyecciones de norma mínima a estos espacios y entender cómo se comportan cuando la dimensión n tiende a infinito para grado d fijo.

Trabajo en conjunto con Andreas Defant (Carl von Ossietzky Universität), Martín Mansilla (Universidad de Buenos Aires), Mieczysław Mastyło (Adam Mickiewicz University) y Santiago Muro (Universidad Nacional de Rosario).

ON FREQUENCIES OF PARABOLIC KOENIGS DOMAINS

Carlos Gómez-Cabello

Universidad del País Vasco, España
carlos.gomezca@ehu.eus

In recent times, C_0 -semigroups of operators have attracted an increasing attention in the Analysis community. Indeed, some challenging problems concerning interesting properties of operators become more manageable when such an operator is assumed to belong to a C_0 -semigroup. That is the case, for instance, of the computation of the point spectrum of composition operators.

In this talk, we will consider C_0 -semigroups $\{C_{\varphi_t}\}_{t \geq 0}$ of composition operators on the Hardy spaces H^p . More precisely, those induced by parabolic semigroups of analytic functions on the unit disc $\mathbb{D}$, with Koenigs function h . We are interested in the study of the point spectrum of the operators C_{φ_t} . To do so, it suffices to look at the point spectrum of the infinitesimal generator of the semigroup of composition operators. This reduces to characterising those $\lambda \in \mathbb{C}$ such that $e^{\lambda h} \in H^p$. We will derive containment relations for the point spectrum and provide sufficient conditions for its complete characterization. We shall briefly discuss the techniques used in the proofs. They rely heavily on the geometric properties of $h(\mathbb{D})$ and on careful estimates of the harmonic measure of some boundary subsets of $h(\mathbb{D})$.

Trabajo en conjunto con F. Javier González-Doña (Universidad Carlos III de Madrid).

PROYECCIONES NORMALES NO ACOTADAS EN ESPACIOS DE KREIN

Francisco Martínez Pería

Centro de Matemática de La Plata (CMaLP) e Instituto Argentino de Matemática (IAM-CONICET), Argentina
martinezperia@gmail.com

En esta charla extenderemos el estudio de las proyecciones normales en espacios de Krein al caso no acotado. Caracterizaremos tanto las proyecciones normales como las débilmente normales, y mostraremos que toda proyección normal admite una descomposición como suma de una proyección autoadjunta y una proyección cerrada con rango neutro.

Además, mostraremos que todo subespacio cerrado $\mathcal{S}$ de un espacio de Krein es el rango de una proyección normal (posiblemente no acotada) y parametrizaremos el conjunto $\mathcal{Q}_{\mathcal{S}}$ de proyecciones normales sobre $\mathcal{S}$ utilizando el concepto de subespacios compañeros normales.

Trabajo en conjunto con Maximiliano Contino (Depto. de Matemáticas, CUNEF Universidad) y Alejandra Maestripieri (Instituto Argentino de Matemática).

SERIES DE TAYLOR EN VARIAS VARIABLES Y SU RADIO DE CONVERGENCIA

Jorge Tomás Rodríguez

NuCoMPA - Universidad nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires y CONICET, Argentina
jorgetomasrodriguez@gmail.com

Es bien conocido que si $f : \Omega \subseteq \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ es una función analítica (real o compleja) cuya serie de Taylor alrededor del origen tiene radio de convergencia 1, entonces la serie de Taylor centrada en cualquier punto z_0 con $|z_0| < 1$ tiene radio de convergencia al menos $1 - |z_0|$.

Un resultado análogo se verifica para funciones analíticas definidas en dominios de $\mathbb{C}^n$, independientemente de la norma utilizada.

En esta charla mostraremos que, en contraste con el caso complejo, dicho resultado no se extiende a funciones analíticas reales definidas en $\mathbb{R}^n$ para normas arbitrarias. La construcción del contraejemplo se apoya en técnicas de complejificación.

SOBREMUESTREO EN ESPACIOS DE DE BRANGES REGULARES Y SIMÉTRICOS

Julio H. Toloza

Instituto de Matemática (INMABB), Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur & CONICET,
Argentina
julio.toloza@uns.edu.ar

Un espacio de De Branges $\mathcal{B}$ es regular si las funciones constantes pertenecen al correspondiente espacio de funciones asociadas, y es simétrico si la transformación $F(z) \mapsto F(-z)$ es una isometría en $\mathcal{B}$. Sea $K(z, w)$ el núcleo reproductor de $\mathcal{B}$ y S el operador de multiplicación por la variable independiente, cuyo dominio supondremos denso en $\mathcal{B}$.

Dado $p \in (2, \infty]$, diremos que $\mathcal{B}$ tiene la propiedad de p -sobremuestreo relativa a un subespacio (de De Branges) propio $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ si existe una función $J : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que, para alguna extensión autoadjunta S_γ de S se cumple

$$\sum_{\lambda \in \sigma(S_\gamma)} \left(\frac{|J(z, \lambda)|}{K(\lambda, \lambda)^{1/2}} \right)^{p/(p-1)} < \infty \quad \text{y también} \quad F(z) = \sum_{\lambda \in \sigma(S_\gamma)} \frac{J(z, \lambda)}{K(\lambda, \lambda)} F(\lambda),$$

para toda función $F \in \mathcal{A}$.

Esta comunicación versa sobre algunas condiciones suficientes para que un espacio de De Branges regular y simétrico posea la propiedad de p -sobremuestreo relativa a una cadena de subespacios de De Branges [1].

Trabajo en conjunto con Luis O. Silva (Universidad Nacional Autónoma de México).

- [1] Luis O. Silva y Julio H. Toloza, Oversampling on a class of symmetric regular de Branges spaces, Complex Var. Elliptic Equ. 69 (2024), 2118–2137.

Análisis Numérico y Optimización

DESARROLLO DE UNA HERRAMIENTA INFORMÁTICA PARA EL TRASLADO DE ONDAS DE CRECIDA EN CURSOS DE AGUA

Juan Arrospide

Grupo de Investigación en Hidráulica - Universidad Tecnológica Nacional - Facultad Regional La Plata,
Argentina
ghidraulica@gmail.com

En el presente trabajo se estudia el traslado de la onda de crecida en cursos de agua, resolviendo en forma numérica el sistema de las ecuaciones de Saint Venant, aplicando diferencias finitas y acoplado la resolución al software Autocad.

Para el cálculo del tránsito de crecientes, se pueden considerar los modelos distribuidos, llamados modelos de tránsito hidráulico, que están basados en las ecuaciones de Saint Venant para flujo unidimensional. En este abordaje, tanto el caudal Q como el tirante hidráulico h tienen una doble dependencia del espacio y del tiempo, es decir $Q = Q(x, t)$ y $h = h(x, t)$. Existen distintas formas de abordar el problema, en las que se incorporan menor o mayor cantidad de términos dentro de la ecuación de Saint Venant, que representan a las resistencias friccionales, la acción de la gravedad, el gradiente de presiones, la aceleración convectiva y la aceleración local. El enfoque adoptado en el presente trabajo es utilizando *modelos distribuidos*, con la siguiente caracterización:

- El problema de la crecida de un curso de agua o conducción se caracteriza como el tratamiento de “ondas traslatorias”, en el que las partículas se propagan en el espacio durante el traslado de la onda.
- Estas ondas en canales, ríos y conducciones son “longitudinales” (en la dirección del movimiento).
- Se considera, además, que la crecida afecta a toda la columna de agua, por lo que se la caracteriza como “ondas en aguas poco profundas” Estas ondas son gobernadas fundamentalmente por gravedad y por fricción.
- Los modelos hidrodinámicos se basan en las ecuaciones de continuidad y de cantidad de movimiento (ecuaciones de Saint Venant), y representan el flujo impermanente gradualmente variado en función del caudal $Q = Q(x, t)$ y de la profundidad $h = h(x, t)$.

La formulación adoptada es la llamada Onda Cinemática, que incluye solo los términos de pendiente y roce para flujo impermanente gradualmente variado, identificada como modelo hidrodinámico unidimensional. Luego, la resolución por diferencias finitas serán propuestas sobre una malla $x - t$ y planteando un esquema implícito, evaluando una solución numérica del caudal Q en una sección $i + 1$ del canal y un instante $j + 1$ de tiempo. Conociendo las condiciones de borde como las dimensiones del canal, pendiente y condiciones iniciales como caudal inicial y un hidrograma de crecida, que es la onda que genera el evento, se procede a implementar el algoritmo en el lenguaje VisualBasic del entorno del software Autocad, de forma que la ventana gráfica de este se convierta en la salida de los cálculos, incluyendo representación de la forma de la crecida para cada instante en el curso de agua. DESARROLLO: La formulación de Onda Cinemática, se define por medio de las siguientes expresiones para la ecuación de continuidad y de Momentum: Continuidad:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = q \quad (1)$$

En la que A es el área de la sección transversal del curso de agua y q el caudal lateral de entrada. Momentum:

$$S_0 = S_f \quad (2)$$

En la que S_0 es la pendiente del fondo del canal y S_f es la pendiente de la línea de energía o pendiente de fricción. La ecuación de Momentum también puede expresarse como:

$$A = \alpha \cdot Q^\beta \quad (3)$$

Como ecuación de resistencia al escurrimiento se utiliza la ecuación de Manning:

$$Q = \frac{S_0^{1/2}}{n \cdot P^{2/3}} \cdot A^{5/3} \quad (4)$$

En la que n es el coeficiente de rugosidad de las paredes del curso de agua, y P es el perímetro mojado de la sección transversal. Combinando estas ecuaciones se obtiene:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \alpha \cdot \beta \cdot Q^{\beta-1} \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} = q \quad (5)$$

Para resolver numéricamente esta ecuación, utilizando aproximaciones por diferencias finitas, los cálculos se realizan en una malla del plano $x - t$, que se conforma con un conjunto de puntos separados incrementos de distancia Δx e incrementos de tiempo Δt . Se indexan los puntos de distancia por i y los puntos de tiempo por j . La derivada parcial de Q respecto de x y respecto de t se aproximan mediante expresiones en diferencias hacia adelante que se muestran a continuación:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{Q_{i+1}^{j+1} - Q_i^{j+1}}{\Delta x} \quad (6)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{Q_{i+1}^{j+1} - Q_{i+1}^j}{\Delta t} \quad (7)$$

El valor de Q se encuentra mediante el siguiente promedio:

$$Q = \frac{Q_{i+1}^j - Q_i^{j+1}}{2} \quad (8)$$

Con lo que la expresión en diferencias finitas de la Onda Cinemática resulta:

$$\frac{Q_{i+1}^{j+1} - Q_i^{j+1}}{\Delta x} + \alpha \cdot \beta \cdot \left(\frac{Q_{i+1}^j - Q_i^{j+1}}{2} \right)^{\beta-1} \cdot \left(\frac{Q_{i+1}^{j+1} - Q_{i+1}^j}{\Delta t} \right) = \frac{q_{i+1}^{j+1} + q_{i+1}^j}{2} \quad (9)$$

De la que se puede despejar el valor del caudal Q para el siguiente tiempo y en la siguiente posición, quedando:

$$Q_{i+1}^{j+1} = \frac{\frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot Q_i^{j+1} + \alpha \cdot \beta \cdot \left(\frac{Q_{i+1}^j + Q_i^{j+1}}{2} \right)^{\beta-1} \cdot Q_{i+1}^j + \Delta t \cdot (q_{i+1}^{j+1} - q_{i+1}^j) / 2}{\frac{\Delta t}{\Delta x} + \alpha \cdot \beta \cdot \left(\frac{Q_{i+1}^j - Q_i^{j+1}}{2} \right)} \quad (10)$$

Con:

$$\beta = 0.6 \quad (11)$$

$$\alpha = \left(\frac{n \cdot P^{2/3}}{S_0^{1/2}} \right)^{0.6} \quad (12)$$

La componente principal en la implementación del algoritmo en el lenguaje VisualBasic del entorno Autocad, se conforma como una estructura de repetición (que varía desde la sección 1 hasta la sección $n - 1$, dentro de otra estructura de repetición, que varía desde el instante 1 hasta la cantidad de intervalos menos uno. En el párrafo siguiente se transcribe ese núcleo principal del programa:

```
For j=1 To Canttiempos-1
For i=1 To Cantsecciones-1
A=((Q(i+1,j)+Q(i,j+1))/2)^(Beta-1)
B=(Atc/Ax)+Alfa*Beta*A
Q(i+1,j+1)=((Atc/Ax)*Q(i,j+1)+Alfa*Beta*Q(i+1,j)*A)/B
Next
Next
```

Una de las ventajas de implementar el algoritmo del traslado de crecidas en un entorno de diseño asistido como el Autocad, consiste en la posibilidad de utilización de las múltiples herramientas de dibujo del programa.

Como muestra de esta ventaja se transcribe un sector del programa en el que tomando los resultados de los distintos valores de caudal para cada sección transversal, en cada instante analizado $Q(x, t)$, se grafican curvas dibujadas en la ventaja gráfica del programa, las que se muestran suavizadas por la utilización de polinomios segmentarios interpolantes, esto se logra con la función "ThisDrawing.Modelspace.AddSpline"

```
For j=1 To Canttiempos
DesplazamientoX=50000
For i=1 To Cantsecciones-1
puntos(i*3)=DesplazamientoX+(i)*Ax/Escala 'Coordenada x
puntos(i*3+1)=(Val(Q(i+1,j))-500*j)/Escala 'Coordenada y
puntos(i*3+2)=0 'Coordenada z
Next
Dim nuevaSpline as AcadSpline
Set nuevaSpline=ThisDrawing.ModelSpace.AddSpline(puntos, startTAn,endTan)
nuevaSpline.color=acBlue
Next
```

Los datos de entrada pueden ingresarse a través de una caja de diálogo, de fácil interpretación e interacción con el usuario. Estos datos son el hidrograma de entrada y el caudal en el instante inicial.

RESULTADOS Y CONCLUSIONES: Como se destacó, los resultados pueden verse en forma de tabla con los resultados numéricos del caudal Q en cada sección transversal y en cada instante, y también en forma gráfica mostrando la evolución de la forma de la onda de crecida en las distintas secciones transversales de cálculo a través de todo el intervalo de tiempo de análisis. La herramienta informática desarrollada es sencilla, económica en términos de recursos de Hardware y Software, para el programa de diseño asistido por computadora, existen licencias educativas disponibles, y el programa funciona adecuadamente con una PC de modesta configuración. Los resultados no solamente se muestran en forma de tabla, sino también en forma gráfica, permitiendo estas gráficas mostrar la evolución espacio-temporal del fenómeno, y contribuir a una rápida interpretación intuitiva del traslado de la onda de crecida. Además del uso específico para el cálculo del traslado de ondas en cursos de agua reales, las características de la herramienta pueden ser especialmente aprovechadas con fines académicos, para asignaturas de grado relacionadas con la hidráulica, la hidrología y la utilización de métodos numéricos.

Trabajo en conjunto con Guillermo Mena, Diana Chavasse, Lorenzo Elías, Tobías Simian y Delfina Raggio (Grupo de Investigación en Hidráulica - Universidad Tecnológica Nacional - Facultad Regional La Plata.)

AN A POSTERIORI ERROR ESTIMATOR FOR LINEAR ELASTICITY PROBLEM WITH NONHOMOGENEOUS DIRICHLET BOUNDARY CONDITION

Tomás P. Barrios

Universidad Católica de la Santísima Concepción, Facultad de Ingeniería, GIANuC² y Departamento de Matemática y Física Aplicadas, Chile
tomas@ucsc.cl

We develop a locking-free numerical analysis for the linear elasticity problem with non homogeneous Dirichlet boundary condition, approximated by an unusual conforming finite element scheme. The starting point is the performing of a homogenization procedure that lets us to analyse a similar elasticity problem with homogeneous boundary condition. Next, we add some kind of least square terms to the variational formulation, allowing to consider any pair of finite-dimensional subspaces of the continuous ones. The resulting augmented scheme is different from others available in literature, but coincide when we deal with homogeneous Dirichlet condition. We prove the well posedness of our scheme, as well as the optimal rate of convergence for the a priori error analysis, which turn out to be valid for both 2D and 3D. The a posteriori error analysis is based on the Ritz projection of the error, and we present an indicator that consists of just two residual terms, which is reliable and local efficient. We provide numerical experiments that illustrate the performance of the corresponding adaptive algorithm and support its use in practice.

Trabajo en conjunto con Edwin Behrens (Universidad Católica de la Santísima Concepción, Chile) y Rommel Bustinza (Universidad de Concepción, Chile).

Referencias

- [1] J. A. Almonacid, G. N. Gatica and R. Ruiz-Baier, Ultra-weak symmetry of stress for augmented mixed finite element formulations in continuum mechanics. *Calcolo* (1) 57 (2020).
- [2] T. P. Barrios, E. M. Behrens and M. González. Low cost A posteriori error estimators for an augmented mixed FEM in linear elasticity. *Applied Numerical Mathematics* 84 (2014), 46—65.

- [3] J. Camaño, R. Oyarzúa, R. Ruiz-Baier and G. Tierra. Error analysis of an augmented mixed method for the Navier-Stokes problem with mixed boundary conditions. *IMA Journal of Numerical Analysis* 38 (2018), 1452—1484.

UN MÉTODO PROFUNDO DE MÍNIMOS CUADRADOS PARA EL PROBLEMA DEL OBSTÁCULO

Francisco Bersetche

DM-FCEyN-UBA / IMAS-CONICET, Argentina

bersetche@gmail.com

Proponemos un enfoque de aprendizaje profundo para el problema del obstáculo, inspirado en el marco de mínimos cuadrados de sistemas de primer orden (FOSLS, por sus siglas en inglés). Este método reformula el problema como una tarea de minimización convexa. Al aproximar simultáneamente la solución, el gradiente y el multiplicador de Lagrange, nuestro enfoque proporciona una alternativa flexible, meshfree, que escala eficientemente a configuraciones de alta dimensionalidad. Las contribuciones teóricas incluyen la coercividad y la continuidad local de Lipschitz del funcional de mínimos cuadrados propuesto, junto con garantías de convergencia a través de la teoría de Γ -convergencia bajo supuestos de regularidad suaves. Experimentos numéricos en dimensiones de hasta 20 demuestran la robustez y escalabilidad del método, incluso en dominios no Lipschitz.

SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL PROBLEMA DE AUTOVALORES DE STEKLOV USANDO EL MÉTODO HÍBRIDO DE ALTO ORDEN (HHO)

Rommel Bustinza

Universidad de Concepción, Chile

rbustinza@udec.cl

En esta charla, discutimos la aproximación del espectro del problema de autovalores de Steklov, aplicando el método Híbrido de Alto Orden (HHO en inglés). Para esto, se adaptan las ideas descritas en un trabajo previo para aproximar el problema espectral clásico. Como es de esperar en esta estrategia, también es posible eliminar las incógnitas volumétricas, introduciendo un operador discreto adecuado. De esta manera, el trabajo consiste en resolver el problema de autovalores matricial (generalizado), definido en el esqueleto de la malla, reduciendo así el costo computacional. Esto lo hace competitivo con esquemas de elementos finitos conformes. El análisis de error a priori nos permite obtener tasas de convergencia óptimas para los valores propios y las funciones propias, cuando estas últimas son suficientemente suaves. Ejemplos numéricos, en 2D y 3D, los cuales corroboran nuestros resultados teóricos, son incluidos en esta presentación.

Trabajo en conjunto con Matteo Cicuttin (Politecnico di Torino, Torino, Italia) y Ariel L. Lombardi (Universidad Nacional de Rosario, Rosario, Argentina).

Referencias

- [1] Babuška, I.; Osborn, J. Eigenvalue problems. *Handbook of Numerical Analysis*, volume II of *Handb. Numer. Anal.* North-Holland, Amsterdam, (1991), 641–787.
- [2] Bustinza, R.; Cicuttin, M.; Lombardi, A. L. A hybrid high-order method for the mixed Steklov eigenvalue problem. *Numerische Mathematik* (2) 157 (2025), 47–475.
- [3] Calo, V.; Ciccutin, M.; Deng, Q.; Ern, A. Spectral approximation of elliptic operators by the Hybrid High-Order method. *Mathematics of Computation* (318) 88 (2019). 1559–1586.

ON THE ROBUSTNESS AND FULLY DISCRETE ENTROPY STABILITY OF THREE-POINT WELL-BALANCED FINITE-VOLUME SCHEMES

Manuel Jesús Castro Díaz

Universidad de Málaga. Dpto. Análisis Matemático, Estadística e Investigación Operativa y Matemática Aplicada, España
mjcastro@uma.es

This presentation introduces a simple and robust approach to enforce discrete entropy stability in first-order well-balanced finite volume schemes for systems of balance laws, including those with non-conservative terms. Building on Tadmor's artificial viscosity method and its recent extensions, the authors present an entropy-preserving modification that can be applied to a broad class of three-point schemes. The key contribution is the design of a viscosity coefficient that preserves the well-balanced property while ensuring entropy dissipation at the discrete level. A rigorous theoretical framework is established to guarantee robustness, well-balancing, and entropy stability under an appropriate CFL condition. The effectiveness of the method is demonstrated through numerical experiments on shallow water systems and two-layer flows, confirming both accuracy and stability.

Trabajo en conjunto con Christophe Berthon (Université de Nantes, Laboratoire de Mathématiques Jean Leray, Francia), Ludovic Martaud (Université Rennes, Inria Rennes and IRMAR UMR CNRS 6625, F-35042 Rennes, Francia) y Tomás Morales de Luna (Universidad de Málaga, Dpto Análisis Matemático, Estadística e Investigación Operativa y Matemática Aplicada, España).

Referencias

- [1] C. Berthon, M.J. Castro, A. Duran, T. Morales De Luna, and K. Saleh. Artificial viscosity to get both robustness and discrete entropy inequalities. *Journal of Scientific Computing* 97 (2023), p. 65.
- [2] M.J. Castro and C. Parés. Well-balanced high-order finite volume methods for systems of balance laws. *J. Sci. Comput.* (2) 82 (2020).
- [3] L. Martaud and C. Berthon. How to enforce an entropy inequality of (fully) well-balanced godunov- type schemes for the shallow water equations. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis* (2) 59 (2025), 955–997.
- [4] C. Parés. Numerical methods for nonconservative hyperbolic systems: a theoretical framework. *SIAM Journal on Numerical Analysis* (1) 44 (2006), 300–321.
- [5] E. Tadmor. Numerical viscosity and the entropy condition for conservative difference schemes. *Mathematics of Computation* (168) 43 (1984), 369–381.
- [6] E. Tadmor. The numerical viscosity of entropy stable schemes for systems of conservation laws. I. *Mathematics of Computation* (179) 49 (1987), 91–103.
- [7] E. Tadmor. Entropy stable schemes. *Handbook of Numerical Methods for Hyperbolic Problems: Basic and Fundamental Issues*, edited by R. Abgrall and C.-W. Shu (North-Holland, Elsevier, Amsterdam, 17 (2026), 467–493.

UNA FORMULACIÓN MIXTA PARA EL PROBLEMA DE POISSON FRACCIONARIO

Nahuel de León

Universidad de la República, Uruguay
nahueldeleon6@gmail.com

La formulación mixta del problema de Poisson clásico consiste en introducir un flujo como nueva variable con condiciones de borde adecuadas, obteniendo un sistema de ecuaciones acopladas. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un abierto acotado y Lipschitz. Consideramos el problema de Poisson fraccionario en Ω , i.e.,

$$\begin{aligned} (-\Delta)^s u &= f \quad \text{en } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{en } \Omega^c := \mathbb{R}^d \setminus \Omega, \end{aligned}$$

donde $s \in (0, 1)$, $f \in L^2(\Omega)$ y $(-\Delta)^s$ denota el Laplaciano fraccionario

$$(-\Delta)^s u(x) := C(d, s) \text{ p.v. } \int_{\mathbb{R}^d} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{d+2s}} dy, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

con

$$C(d, s) := \frac{2^{2s} s \Gamma(s + \frac{d}{2})}{\pi^{d/2} \Gamma(1 - s)}.$$

Usando identidades del cálculo no local, el Laplaciano fraccionario se puede entender como la composición de ciertos operadores no locales. Concretamente [1]

$$(-\Delta)^s = \operatorname{div}^s \circ \nabla^s,$$

donde

$$\nabla^s w(x) := \mu(d, s) \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(w(y) - w(x))}{|x - y|^{d+s}} \frac{(y - x)}{|x - y|} dy$$

y

$$\operatorname{div}^s w(x) := \mu(d, s) \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(w(y) - w(x))}{|x - y|^{d+s}} \cdot \frac{(y - x)}{|x - y|} dy.$$

En este trabajo, introduciendo el flujo $\Phi := \nabla^s u$, exploramos una formulación mixta del problema de Poisson fraccionario y probamos que el problema está bien planteado. Una discretización directa del problema no parece posible, por lo que siguiendo ideas de Hughes y Masud [2] introducimos una formulación estabilizada, que da lugar a un problema coercivo y bien planteado. La coercividad implica que cualquier discretización por elementos finitos conforme sea estable. Por último, obtenemos estimaciones del orden de convergencia de estas discretizaciones y realizamos experimentos numéricos en 1d y 2d.

Trabajo en conjunto con Juan Pablo Borthagaray (Universidad de la República, Uruguay).

Referencias

- [1] M. ˇSilhav’y. Fractional vector analysis based on invariance requirements (critique of coordinate approaches). *Continuum Mechanics and Thermodynamics* (1) 32 (2020), 207—228.
- [2] A. Masud and T. J. R. Hughes. A stabilized mixed finite element method for Darcy flow. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* (39-40) 191 (2002), 4341—4370.

A CONVERGENT NUMERICAL SCHEME FOR THE POROUS MEDIUM EQUATION WITH FRACTIONAL PRESSURE

Félix del Teso

Universidad Autónoma de Madrid, España
felix.delteso@uam.es

We introduce and analyze a numerical approximation of the porous medium equation with fractional potential pressure introduced by Caffarelli and Vázquez:

$$\partial_t u = \nabla \cdot (u^{m-1} \nabla (-\Delta)^{-\sigma} u) \quad \text{for} \quad m \geq 2 \quad \text{and} \quad \sigma \in (0, 1).$$

Our scheme is for one space dimension and positive solutions u . It consists of solving numerically the equation satisfied by $v(x, t) = \int_{-\infty}^x u(y, t) dy$, the quasilinear nondivergence form equation

$$\partial_t v = -|\partial_x v|^{m-1} (-\Delta)^s v \quad \text{where} \quad s = 1 - \sigma,$$

and then computing $u = v_x$ by numerical differentiation. Using upwinding ideas in a novel way, we construct a new and simple, monotone and L^∞ -stable, approximation for the v -equation. The full scheme then becomes a conservative up-wind finite volume approximation for the u -equation. We show local uniform convergence to the unique discontinuous viscosity solution for the v -problem, and using ideas from probability theory, we prove that the approximation of u converges up to normalization in $C(0, T; P(\mathbb{R}))$ where $P(\mathbb{R})$ is the space of probability measures under the Rubinstein-Kantorovich (bounded Lipschitz) metric. The analysis includes also fundamental solutions where the initial data for u is a Dirac mass.

Trabajo en conjunto con Espen R. Jakobsen (Norwegian University of Science and Technology).

ANÁLISIS LOCAL DE LA FUNCIÓN LAGRANGIANA AUMENTADA SHARP

Damián Fernández

CIEM-CONICET, FAMAF-Universidad Nacional de Córdoba, Argentina
dfernandez@unc.edu.ar

Para resolver problemas de optimización no lineal con restricciones, se sabe que el método del Lagrangiano aumentado sharp es globalmente convergente inclusive en problemas donde el Lagrangiano clásico (Powell-Hestenes-Rockafellar) no converge, [3]. En lo que respecta al estudio de la convergencia local, el clásico ha sido muy estudiado en la literatura [5] mientras que pocos resultados existen sobre el sharp [1,2,4,6]. En este trabajo mostraremos la estabilidad local de la función Lagrangiana aumentada sharp, su relación con condiciones de optimalidad de segundo orden y con cotas de error a las soluciones del sistema de Karush-Kuhn-Tucker.

Referencias

- [1] M. Antitescu. Degenerate nonlinear programming with a quadratic growth condition. SIAM Journal on Optimization (4) 10 (2000), 1116—1135.
- [2] J.F. Bonnans and A. Shapiro. Perturbation analysis of optimization problems. Springer Science & Business Media, 2000.
- [3] R.S. Buravhik, A.N. Iusem and J.G. Melo. A primal dual modified subgradient algorithm with sharp Lagrangian. Journal of Global Optimization 46 (2010), 347—361.
- [4] D. Fernández. Augmented Lagrangians quadratic growth and second-order sufficient optimality conditions. Optimization (1) 71 (2022), 97—115.
- [5] D. Fernández and M. V. Solodov. Local convergence of exact and inexact augmented Lagrangian methods under the second-order sufficient optimality condition. SIAM Journal on Optimization (2) 22 (2012), 384—407.
- [6] R.T. Rockafellar and R.J.B. Wets. Variational Analysis. Springer Science & Business Media, 1998.

HOW MUCH INFORMATION CAN WE RECOVER FROM PIECEWISE POLYNOMIAL APPROXIMATIONS?

Thomas Fuehrer

Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile
thfuehrer@uc.cl

It is well known that the L^2 best approximation $\Pi_{\mathcal{T}}^p$ onto $\mathcal{T}$ -piecewise polynomials of degree $\leq p \in \mathbb{N}_0$ satisfies

$$\|u - \Pi_{\mathcal{T}}^p u\|_{L^2(\Omega)} \lesssim h^{p+1} \|D^{p+1} u\|_{L^2(\Omega)}$$

and this result is sharp. Here, $\mathcal{T}$ is a regular simplicial mesh of the Lipschitz domain $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ($d = 1, 2, 3$). In this talk I present recent results from [1] where we show how to recover approximations from $\mathcal{T}$ -piecewise polynomial approximation that converge at higher rates. We do this by introducing a family of quasi-interpolation operators J^p that satisfy $J^p = J^p \circ \Pi_{\mathcal{T}}^p$, i.e., the operators only “see” piecewise polynomials of degree p , and that map into the space of piecewise polynomials of degree $p + 1$. We prove for $d = 1, 2$ that these operators satisfy

$$\|u - J^p u\|_{L^2(\Omega)} \lesssim h^{p+2} \|D^{p+2} u\|_{L^2(\Omega)}.$$

This means that $J^p u$ converges at a higher rate than the best approximation $\Pi_{\mathcal{T}}^p u$ although both use the same information. While the latter result is of purely theoretic nature, it can be exploited to enhance accuracy of, e.g., finite element solutions u_h . Indeed, many methods including mixed finite element methods, (hybridizable) discontinuous (Petrov-)Galerkin methods satisfy a supercloseness property of the form (or similar)

$$\|\Pi_{\mathcal{T}}^p(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} = \mathcal{O}(h^{p+2}).$$

Combining this observation with our operator we prove that

$$\|u - J^p u_h\|_{L^2(\Omega)} = \mathcal{O}(h^{p+2}), \quad \text{although } \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} = \mathcal{O}(h^{p+1}).$$

While popular postprocessing like [2] achieve the same order of convergence and can be computed more efficiently, our approach extends to more general situations where, e.g., discrete gradient approximations are not directly accessible.

A second family of operators is introduced that is based on piecewise constant approximations and for $d = 1$ we establish that an arbitrary (but fixed) order of convergence can be achieved under mild assumptions on the mesh. Throughout the talk we present numerical examples.

Our main results are based on highly technical results that analyze the intersection of orthogonal polynomials on patches [3].

Trabajo en conjunto con Manuel A. Sánchez (Pontificia Universidad Católica de Chile).

Referencias

- [1] T. Führer and M. A. Sánchez. Quasi-interpolators with application to postprocessing in finite element methods. Preprint (2004). arXiv:2404.13183.
- [2] R. Stenberg. Postprocessing schemes for some mixed finite elements. *RAIRO Modélisation Mathématique et Analyse Numérique* (1) 25 (1991), 151–167.
- [3] T.H. Koornwinder and S. Sauter. The intersection of bivariate orthogonal polynomials on triangle patches. *Mathematics of Computation* (294) 84 (2015), 1795–1812.

APROXIMACIÓN NUMÉRICA DE UN PROBLEMA DE CONTROL ÓPTIMO CON INCERTEZAS

Victoria María García

Universidad Nacional de Rosario, CIFASIS-CONICET, Argentina
victoriagarcia_@hotmail.com

En esta presentación abordamos un problema de control óptimo de tipo minimax con horizonte finito que incorpora incertezas en la función objetivo y en la dinámica. Comenzamos analizando la discretización temporal del problema continuo, y demostramos la convergencia de los valores del problema discreto al problema original. Luego, introducimos un enfoque basado en promedios muestrales para resolver el problema aproximado. Teniendo en cuenta las condiciones de optimalidad de los problemas de control óptimo involucrados, proponemos un método de descenso estocástico para aproximarlos. En cada iteración del algoritmo se elige una nueva muestra, se calcula una dirección de descenso para ese problema y se sigue la regla de Armijo. Mostramos ejemplos numéricos que ilustran la efectividad del método propuesto y lo comparamos con otros métodos existentes.

Trabajo en conjunto con Justina Gianatti (UNR y CIFASIS-CONICET), Pablo Lotito (UNCPBA y CONICET) y Lisandro Parente (UNR y CIFASIS-CONICET).

HYBRID STRESS ELEMENTS FOR LINEAR ELASTICITY

Norbert Heuer

Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile
nheuer@uc.cl

The construction of divergence conforming symmetric stress elements for mixed methods requires to use higher polynomial degrees, and makes implementation cumbersome. There are several strategies of simplification by relaxation of conformity. We present a hybrid framework that allows for simple stress elements while maintaining conformity, including symmetry, with respect to the underlying hybrid stress space. We cover both two and three dimensions with triangular [1] and tetrahedral elements [2], respectively. Numerical examples confirm the locking-free convergence of our mixed scheme.

This work has been supported by ANID-Chile through grant Fondecyt Regular 1230013.

Trabajo en conjunto con Carsten Carstensen (Humboldt-Universität zu Berlin, Germany).

Referencias

- [1] C. Carstensen, N. Heuer. Normal-normal continuous symmetric stresses in mixed finite element elasticity. *Math. Comp.* 94 (2025), 1571—1602.

- [2] C. Carstensen, N. Heuer. Normal-normal continuous symmetric stress approximation in three-dimensional linear elasticity. Preprint (2005). ArXiv 2502.00609.

STRUCTURE PRESERVING MULTISCALE METHODS FOR SUPERCRITICAL FOKKER-PLANCK EQUATIONS

Tettamanti Horacio

Universita di Pavia, Italia

horacio.tettamanti01@universitadipavia.it

We focus on the construction of numerical schemes for Fokker–Planck equations with superlinear drifts that preserve key structural properties, such as non-negativity of the solution, entropy dissipation, and the correct large-time behavior. The proposed methods exploit the multiscale features of these equations and are capable of capturing condensation phenomena while converging to the steady state. These properties are essential for the correct description of the underlying physical problem which is linked to indistinguishable bosonic particles. Applications of the schemes to several nonlinear Fokker–Planck equations arising in Bose–Einstein condensation are presented.

Trabajo en conjunto con Mattia Zanella (Universita di Pavia, Italia).

Referencias

- [1] E. Calzola, G. Dimarco, G. Toscani, M. Zanella. Emergence of condensation patterns in kinetic equations for opinion dynamics. *Physica D: Nonlinear Phenomena (Part A)* 470, (2024), 134356, ISSN 0167-2789, <https://doi.org/10.1016/j.physd.2024.134356>.
- [2] F. Franceschi, L. Pareschi, M. Zanella. Superlinear Drift in Consensus-Based Optimization with Condensation Phenomena. Preprint (2025). 10.48550/arXiv.2506.09001.
- [3] G. Kaniadakis and P. Quarati. Classical model of bosons and fermions. *Phys. Rev. E* 49 (1994), 5103–5110.
- [4] L. Pareschi and M. Zanella. Structure preserving schemes for nonlinear FokkerPlanck equations and applications. *J. Sci. Comput.* (3) 74 (2018), 1575–1600.
- [5] G. Toscani, M. Zanella. Supercritical Fokker-Planck equations for consensus dynamics: large-time behaviour and weighted Nash-type inequalities. Preprint (2024). ArXiv:2411.01359.

APROXIMACIÓN POR ELEMENTOS FINITOS DE UN PROBLEMA FRACCIONARIO USANDO MALLAS GRADUADAS

Ariel L. Lombardi

Universidad Nacional de Rosario & CONICET, Argentina

ariel@fceia.unr.edu.ar

Consideramos la aproximación numérica del siguiente problema de Dirichlet para potencias fraccionarias de un operador elíptico de segundo orden

$$\mathcal{L}^s u = f \quad \text{en } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{en } \partial\Omega, \quad (1)$$

donde Ω es el cuadrado unitario $(0, 1)^2$, el operador $\mathcal{L}$ es de la forma $\mathcal{L}v = -\Delta v + c(x)v$, con $c(x) \geq 0$, y $s \in (0, 1)$. La principal dificultad para obtener métodos numéricos eficientes para (1) es que $\mathcal{L}^s$ es un operador no local.

En [1], por ejemplo, se propusieron diferentes técnicas para obtener esquemas computacionales efectivos. Las mismas se basan en la discretización de un problema extendido, en un cilindro infinito, introducido por Caffarelli y Silvestre en [2]. Una de estas técnicas resulta, luego de una semidiscretización en la variable extendida y un proceso de diagonalización, en la solución de una sucesión de problemas de reacción-difusión, varios de ellos siendo singularmente perturbados. Se propusieron estrategias para resolver estos problemas adecuadamente, las cuales requieren el uso de mallas anisotrópicas refinadas geométricamente hacia la frontera de Ω . Para obtener resultados apropiados, dichas mallas deben ser elegidas dependiendo de cada parámetro de perturbación singular.

Respecto de este último punto, en esta charla proponemos el uso de elementos finitos en un tipo de mallas graduadas (introducidas en [3]) que pueden ser definidas independientemente del valor del parámetro de perturbación singular y para las cuales se obtienen resultados óptimos de aproximación en la norma de energía. Así, todos los problemas de reacción-difusión se discretizan sobre la misma malla y esto, entre otras cosas, disminuye el costo computacional de ensamblado. Combinando esta técnica con nuevos resultados de superconvergencia para problemas de reacción-difusión, logramos convergencia óptima respecto del parámetro de discretización.

Trabajo en conjunto con Melani Barrios y Cecilia Penessi (Universidad Nacional de Rosario & CONICET, Argentina).

Referencias

- [1] L. Banjai, J.M. Melenk, R.H. Nochetto, E. Otárola, A.J. Salgado, C. Schwab. Tensor FEM for spectral fractional diffusion. *Found. Comput. Math.* 19 (2019), 901–962.
- [2] L. Caffarelli, L. Silvestre. An extension problem related to the fractional Laplacian. *Comm. Partial Diff. Eq.* (8) 32 (2007), 1245–1260.
- [3] R.G. Durán, A.L. Lombardi. Error estimates on anisotropic Q_1 elements for functions in weighted Sobolev spaces. *Math. Comp.* (252) 74 (2005), 1679–1706.

BILINEAR OPTIMAL CONTROL FOR THE STOKES-BRINKMAN EQUATIONS: A PRIORI AND A POSTERIORI ERROR ANALYSES.

Enrique Otárola

Universidad Técnica Federico Santa María, Chile
enrique.otarola@usm.cl

We analyze a bilinear optimal control problem for the Stokes–Brinkman equations: the control variable enters the state equations as a coefficient. In two- and three-dimensional Lipschitz domains, we perform a complete continuous analysis that includes the existence of solutions and first- and second-order optimality conditions. We also develop two finite element methods that differ fundamentally in whether the admissible control set is discretized or not. For each of the proposed methods, we perform a convergence analysis and derive a priori error estimates; the latter under the assumption that the domain is convex. Finally, assuming that the domain is Lipschitz, we develop an a posteriori error estimator for each discretization scheme and obtain a global reliability bound.

Trabajo en conjunto con Alejandro Allendes (Universidad Técnica Federico Santa María) y Gilberto Campaña (Universidad Técnica Federico Santa María).

MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS EN MALLAS GRADUADAS PARA UN PROBLEMA SINGULARMENTE PERTURBADO CON RETARDO

Cecilia Penessi

Universidad Nacional de Rosario - CONICET, Argentina
cecilia@fceia.unr.edu.ar

Consideramos el problema con retardo y perturbación singular de la forma

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 u''(x) + a(x) u(x) + b(x) u(x-1) = f(x), & x \in (0, 2), \\ u(x) = \varphi(x), & x \in (-1, 0), u(2) = L, \end{cases} \quad (1)$$

donde a , b y f son funciones suaves en $[0, 2]$, y φ es una función suave en $[-1, 0]$, que satisfacen

$$a(x) \geq \alpha > 0, \quad \beta_0 \leq b(x) \leq \beta < 0, \quad \alpha + \frac{\beta_0}{2} \geq \eta > 0, \quad \forall x \in [0, 2],$$

para ciertas constantes α, β_0, β y η , L es una constante dada y $\varepsilon > 0$ es el parámetro de perturbación singular que se asume pequeño $\varepsilon \ll 1$. Este tipo de problemas surge, por ejemplo, en control óptimo y modelos de difusión con retardo, y presenta soluciones con capas límite en $x = 0$ y $x = 2$, así como una capa interior en $x = 1$, inducida por el retardo.

Debido a la naturaleza multiescala del problema, el diseño de métodos numéricos robustos respecto de ε representa un desafío importante. En [2], los autores analizan el problema (1) utilizando el método hp-FEM sobre una malla espectral dependiente de ε , obteniendo convergencia exponencial en la norma de la energía, uniforme respecto de ε . Si bien este enfoque es efectivo, requiere que los datos sean analíticos y la definición de la malla depende fuertemente del parámetro ε , de modo que una malla adecuada para un valor dado puede resultar ineficaz para otros.

En este trabajo proponemos estudiar el problema (1) mediante una discretización por elementos finitos de bajo orden sobre mallas graduadas independientes de ε , como las introducidas por Durán y Lombardi en [1]. Estas mallas han demostrado ser efectivas en problemas de reacción-difusión (sin retardo), y permiten capturar las capas sin recurrir a refinamientos adaptativos ni al conocimiento explícito de ε .

Con base en esta aproximación, nuestro análisis se centra en la posibilidad de obtener estimaciones de error robustas en la norma de la energía

$$\|v\|_{\varepsilon} := \left(\varepsilon^2 \int_0^2 |v'(x)|^2 dx + \int_0^2 a(x) |v(x)|^2 dx + \int_1^2 b(x) v(x-1) v(x) dx \right)^{1/2},$$

uniformemente en ε . Además, analizamos la convergencia en una norma balanceada, que es de interés fundamental cuando el parámetro es muy pequeño.

Trabajo en conjunto con Melani Barrios y Ariel L. Lombardi (Universidad Nacional de Rosario - CONICET).

Referencias

- [1] Durán, R. G., and Lombardi, A. L. Error estimates on anisotropic Q1 elements for functions in weighted Sobolev spaces. *Math. Comput.* (252) 74 (2005), 1679—1706.
- [2] Nicaise, S., and Xenophontos, C. Robust approximation of singularly perturbed delay differential equations by the hp-finite element method. *Computational Methods in Applied Mathematics* (12) 13 (2013), 21—37.

OPTIMIZACIÓN MULTIOBJETIVO: TÉCNICAS NO MONÓTONAS PARA RESOLVER EL PROBLEMA

Viviana Analía Ramírez

Centro Regional Universitario Bariloche, Universidad Nacional del Comahue, Argentina
viviramirezana@gmail.com

Una de las ramas importantes de la optimización es la programación multiobjetivo, también conocida como optimización multicriterio. En este tipo de problemas, se deben tomar decisiones en presencia de múltiples objetivos o criterios, por lo que la optimización se realiza sobre una función vectorial. Las soluciones para esta clase de problemas se conocen como soluciones no inferiores o eficientes, entre otras. Esta programación es objeto de estudio desde hace varios años y se han diseñado diferentes métodos para abordarla. En este trabajo nos centramos en técnicas no monótonas, con el objetivo de acelerar la convergencia a un punto crítico. El algoritmo propuesto combina el método de Newton con una estrategia globalizadora de región de confianza no monótona, junto con una variante del modelo cuadrático, utilizado para comparar el decrecimiento real con el decrecimiento predicho por el modelo. Para la estrategia de región de confianza no monótona, comparamos el método desarrollado por V. A. Ramírez y G. N. Sottosanto en 2022 con la adaptación a multiobjetivo de la técnica propuesta por H. Zhang, W. W. Hager en 2004 para el caso de búsqueda lineal, utilizando dos variantes para la elección del parámetro no monótono.

Trabajo en conjunto con Graciela N. Sottosanto (Universidad Nacional del Comahue, Neuquén, Argentina).

Referencias

- [1] V. A. Ramírez, G. N. Sottosanto. Nonmonotone trust region algorithm for solving the unconstrained multiobjective optimization problems. *Computational Optimization and Applications* (3) 81 (2022), 769—788.
- [2] H. Zhang, W. W. Hager. A nonmonotone line search technique and its application to unconstrained optimization. *SIAM J. Optim.* (4) 14 (2004), 1043—1056.

DUALIDAD EN OPTIMIZACIÓN SEMI INFINITA APLICADA A LA DUALIDAD EN OPTIMIZACIÓN COPOSITIVA

Andrea Ridolfi

Facultad de Ciencias Aplicadas a la Industria. Facultad de Ciencias Económicas.
Universidad Nacional de Cuyo, Argentina
aridolfi@fcai.uncu.edu.ar

En este trabajo, se utiliza la teoría de optimización lineal semi-infinita para obtener nuevos resultados sobre dualidad en problemas de optimización copositiva. Además, se realiza una revisión de la teoría del dual de Haar y se aplica a la dualidad estándar en optimización copositiva, aportando nuevos teoremas y recuperando otros ya conocidos.

En particular, se caracterizan las situaciones en las que el salto de dualidad es cero, es decir, cuando el valor óptimo del problema primal coincide con el valor óptimo del problema dual, así como las situaciones en las que el salto de dualidad cero se acompaña de un problema dual resoluble (dualidad fuerte). Por otro lado, se introducen nuevas calificaciones de restricciones que nos permiten generalizar el conocido teorema de optimalidad de Karush-Kuhn-Tucker para problemas de optimización copositiva. También se proporcionan condiciones que garantizan un salto de dualidad cero, con la obtención de una solución óptima del problema primal (dualidad fuerte inversa).

Trabajo en conjunto con Miguel Ángel Goberna (Universidad de Alicante, España) y Virginia Vera de Serio (Universidad Nacional de Cuyo, Argentina).

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN EFICIENTES PARA EL PROBLEMA DE BIOT

Carmen Rodrigo

Universidad de Zaragoza, España
carmenr@unizar.es

La interacción entre el flujo de un fluido y la deformación mecánica en un medio poroso se estudia mediante el modelo de Biot. En el contexto de la simulación numérica de este problema poroelástico, existen distintas estrategias para abordar la resolución de los grandes sistemas de ecuaciones que surgen tras la discretización del problema: desde métodos monolíticos o totalmente acoplados hasta métodos totalmente desacoplados, pasando por los métodos de acoplamiento iterativo que consisten en iterar entre los problemas de flujo y mecánica. En esta charla, nos centraremos en estas dos últimas familias de métodos y presentaremos los últimos resultados que hemos obtenido en este contexto.

Trabajo en conjunto con Francisco J. Gaspar (Universidad de Zaragoza, España) y Xiaozhe Hu (Tufts University, USA).

RESOLVIENDO EL SUBPROBLEMA EN EL MÉTODO DEL LAGRANGIANO SHARP SUAVIZADO

José Luis Romero

IMIT-CONICET, Argentina
joseluisromero@unc.edu.ar

En esta presentación analizamos en detalle cómo resolver el subproblema sin restricciones que surge en cada iteración del método del Lagrangiano sharp con suavizado, propuesto recientemente en [1] para problemas de programación no lineal con restricciones de igualdad. Este método evita la minimización global de una función no diferenciable, reemplazándola por la búsqueda de puntos estacionarios de una función diferenciable de dos variables. Estudiaremos dos reformulaciones equivalentes del subproblema: una basada en una transformación clásica que evita el mal condicionamiento numérico cuando el parámetro de penalización crece, y otra que explicita el parámetro de suavizado como variable auxiliar. En ambos casos, se aprovecha la estructura de la función suavizada para construir un método quasi-Newton especializado, con garantía de descenso y convergencia bajo condiciones razonables. Mostraremos además que la dirección de descenso puede obtenerse resolviendo un problema cuadrático-lineal con restricciones lineales, lo cual permite aprovechar solvers existentes y mejora la eficiencia práctica del enfoque. La charla se centrará en estas estrategias computacionales para abordar el subproblema, que resultan clave para la implementación eficaz del método completo.

Trabajo en conjunto con Damián Fernández (CIEM-CONICET) y Germán Torres (IMIT-CONICET).

Referencias

- [1] J. L. Romero, D. Fernández y G. A. Torres. Enhancing sharp augmented Lagrangian methods with smoothing techniques for nonlinear programming. Preprint (2024). ArXiv:2410.03050, <https://arxiv.org/abs/2410.03050>

APROXIMACIÓN NUMÉRICA DEL p -LAPLACIANO FRACCIONARIO MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS

José Camilo Rueda Niño

Universidad de la República, Uruguay
jcrueda@fing.edu.uy

En esta charla mostraremos un acercamiento numérico del operador p -Laplaciano fraccionario, que surge en la interpolación compleja de espacios de Sobolev [1]. En términos generales, el problema se formula del siguiente modo: dado un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ y $p \in (1, \infty)$, buscamos encontrar una función $u \in V$ tal que:

$$\begin{aligned} -\Delta_p^s u &= f && \text{en } \Omega, \\ u &= 0 && \text{en } \Omega^c, \end{aligned}$$

donde $\Delta_p^s u := \operatorname{div}_s (|\nabla^s u|^{p-2} \nabla^s u)$. Cuando $p = 2$, este operador coincide con el Laplaciano fraccionario usual; sin embargo, para $p \neq 2$, difiere del (p, s) -Laplaciano obtenido mediante interpolación real entre espacios de Sobolev. Presentaremos un método de descomposición-coordenada, basados en Savaré [2], que utiliza una formulación de Lagrangiano aumentado para calcular las soluciones y sus gradientes fraccionarios. Adicionalmente, mostraremos un análisis de la convergencia del método y su implementación numérica.

Trabajo en conjunto con Juan Pablo Borthagaray y Leandro Del Pezzo (Universidad de la República, Uruguay).

Referencias

- [1] Shieh, T. T. and Spector, D. E. On a new class of fractional partial differential equations. *Advances in Calculus of Variations* (4) 8 (2015), 321–336.
- [2] Glowinski, R. and Marroco, A. Sur l'approximation, par éléments finis d'ordre un, et la résolution, par pénalisation-dualité d'une classe de problèmes de Dirichlet non linéaires. *Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Analyse numérique* (R2) 9 (1975), 41–76.

DISCRETIZATION REDUCTION FOR ELLIPTIC PROBLEMS WITH ROUGH COEFFICIENTS

Marcus Sarkis

Worcester Polytechnic Institute , USA
msarkis@wpi.edu

We consider multiscale finite element methods to approximate the solution of an elliptic partial differential equation with rough coefficients. The methods follow the Variational Multiscale and the Localized Orthogonal Decomposition–LOD methods and the adaptive domain decomposition method denoted by BDDC–Balancing Domain Decomposition with Constraints in order to select local modes based on localized generalized eigenvalue problems. On the first stage of the proposed method, the degrees of freedom of the multiscale basis functions are based on the corners of a coarse triangulation, and on the second stage modes on the edges of coarse triangulation are chosen based on these local generalized eigenvalue problems. As a result, optimal error energy estimate is achieved which is mesh and coefficient independent and with localized multiscale functions, and without assuming any regularity of the solution beyond the H^1 norm. Numerical experiments are provided.

Trabajo en conjunto con Alexandre Madureira (Laboratorio Nacional de Computacao Cientifica- LNCC, Brazil).

Referencias

- [1] Alexandre Madureira and Marcus Sarkis. Spectral ACMS: A Robust Localized Approximated Component Mode Synthesis Method. *SIAM Journal on Numerical Analysis* (3) 63 (2025), 1055–1077.

- [2] Alexandre Madureira and Marcus Sarkis. Hybrid localized spectral decomposition for multiscale problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis* (2) 59 (2021), 829–863.

OPTIMIZACIÓN DE PLANIFICACIONES EN UN PROBLEMA DE TAMAÑO DE LOTE

Lian-Choon Teo

Universidad Nacional de Cuyo, Argentina
lcteo@gm.fcen.uncu.edu.ar

La gestión eficiente de inventarios y la planificación de requerimientos de material son claves en entornos competitivos. En este trabajo se aborda el problema del tamaño de lote mediante un modelo analítico de programación lineal entera, considerando costos de pedido y almacenamiento constantes en el tiempo. Este enfoque evita algoritmos complejos y tiempos extensos de cómputo que suelen ocurrir con métodos numéricos en casos de tamaños de pedido grandes. El objetivo es lograr tanto la planificación óptima (de menor costo), como también planificaciones alternativas agrupadas por clases y adaptables a necesidades específicas. Se emplean herramientas de álgebra lineal para comparar costos y particionar las planificaciones en clases de igual costo. Se obtienen condiciones necesarias para la optimalidad y, bajo ciertas condiciones paramétricas, se obtienen soluciones óptimas explícitas. Los resultados facilitan la toma de decisiones y la identificación de mínimos locales según las características de la demanda.

Trabajo en conjunto con Andrea Beatriz Ridolfi (Universidad Nacional de Cuyo, Argentina).

NUMERICAL APPROXIMATION OF A THERMO-ELECTROMAGNETIC PROBLEM IN AXISYMMETRIC GEOMETRIES

Pablo Venegas

Universidad del Bío-Bío, Chile
pvenegas@ubiobio.cl

In this talk we analyze a thermoelectrical problem arising from the modeling of induction heating processes. By taking advantage of the cylindrical symmetry, the three-dimensional problem reduces to a two-dimensional one on a meridional section, provided the current density, written in cylindrical coordinates, has only azimuthal component. A variational formulation in appropriate weighted Sobolev spaces is given and existence of solution is proved by applying a fixed-point argument. Moreover, uniqueness and additional regularity is proved under suitable assumptions on the physical coefficients. Finite element approximation combined with a fixed-point iteration are proposed and a priori error estimates are proved.

Finally, we present numerical results which allow us to confirm the theoretical estimates and to assess the performance of the proposed method in a physical application.

Trabajo en conjunto con D. Gómez (Universidade de Santiago de Compostela, España), P. Salgado (Universidade de Santiago de Compostela, España) y B. López-Rodríguez (Universidad Nacional de Colombia, Colombia).

Referencias

- [1] A. Bermúdez, B. López-Rodríguez, F. J. Pena, R. Rodríguez, P. Salgado, and P. Venegas. Numerical solution of an axisymmetric eddy current model with current and voltage excitations. *J. Sci. Comput.* (1) 91 (2022), 1–26.
- [2] A. Bermúdez and R. Muñoz-Sola. Existence of solution of a coupled problem arising in the thermoelectrical simulation of electrodes. *Quart. Appl. Math.* (4) 57 (1999), 621–636.
- [3] I. Yousept. Optimal control of a nonlinear coupled electromagnetic induction heating system with pointwise state constraints. *Ann. Acad. Rom. Sci. Ser. Math. Appl.* (1) 2 (2010), 45–77.
- [4] J. Zhu, X. Yu, and A. F. D. Loula. Mixed discontinuous Galerkin analysis of thermally nonlinear coupled problem. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* (13-16) 200 (2011), 1479–1489.

DESARROLLO E IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA DE UN MODELO DE LÁMINAS ELÍPTICAS DE KOITER CON CONTACTO

Lucas Venturato

Universidad Austral - Facultad de Ciencias Empresariales; CONICET, Argentina
 venturatolucas@gmail.com

En mecánica de sólidos, las láminas (cuerpos tridimensionales con un espesor pequeño en comparación con su extensión) están presentes tanto en la naturaleza como en la industria, debido a su eficiencia para soportar cargas con una cantidad mínima de material. En las últimas décadas, se han logrado avances significativos en la justificación de modelos bidimensionales de láminas elásticas mediante técnicas de análisis asintótico, destacando los trabajos de Ciarlet y sus colaboradores. Sin embargo, hasta mediados de la década de 2010, eran escasos los modelos que contemplaban el fenómeno de contacto, lo que motivó su desarrollo para láminas elípticas en contacto con obstáculos rígidos o deformables, incluyendo casos dinámicos, con fricción o desgaste.

En este trabajo, consideramos un modelo para láminas elípticas elásticas de Koiter en contacto con un obstáculo deformable. Proponemos y analizamos un esquema numérico, y presentamos simulaciones implementadas en FreeFem++.

Trabajo en conjunto con Ángel Arós (Departamento de Matemáticas, Universidade da Coruña, España; Centro de Investigación e Tecnoloxía Matemática de Galicia (CITMaga), España) y Ariel Lombardi (CONICET, Argentina; Departamento de Matemáticas, FCEIA, Universidad Nacional de Rosario, Argentina).

Referencias

- [1] Ciarlet PG. Mathematical elasticity. Vol. III: Theory of shells, Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 29. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 2000.
- [2] Mardare C. Asymptotic analysis of linearly elastic shells: error estimates in the membrane case. Asymptot Anal. (1) 17 (1998), 31—51.
- [3] Rodríguez-Arós Á. Models of Elastic Shells in Contact with a Rigid Foundation: An Asymptotic Approach. J Elasticity (2) 130 (2018), 211—237.

APROXIMACIÓN NUMÉRICA DE LA DERIVADA PROPORCIONAL DE CAPUTO.

Sebastián Wilhelm

Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina
 swilhelm@campus.ungs.edu.ar

Consideremos una función escalar u , absolutamente continua sobre el intervalo $[0, b]$ con $b > 0$. La derivada proporcional de Caputo de orden $\alpha \in (0, 1)$ para u , introducida en [1], se define por

$$D_{PC}^{\alpha} u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (\mathcal{K}_1(\alpha, \tau) u(\tau) + \mathcal{K}_0(\alpha, \tau) u'(\tau)) (t-\tau)^{-\alpha} d\tau, \quad t \in (0, b],$$

donde $\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1 : [0, 1] \times [0, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ son funciones continuas que satisfacen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_i(\alpha, t) &\neq 0, & \forall t \in (0, b], i = 0, 1 \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \mathcal{K}_0(\alpha, t) &= 0, & \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \mathcal{K}_0(\alpha, t) = 1 \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \mathcal{K}_1(\alpha, t) &= 1, & \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \mathcal{K}_1(\alpha, t) = 0. \end{aligned}$$

Es claro que la derivada proporcional de Caputo puede escribirse en términos del operador integral de Riemann-Liouville de orden $1 - \alpha$, $I_{RL}^{1-\alpha}$, en la forma

$$D_{PC}^{\alpha} = I_{RL}^{1-\alpha} [\mathcal{K}_1 u + \mathcal{K}_0 u'].$$

En general, el cálculo exacto de $D_{PC}^{\alpha} u$ no es posible, aunque esto depende fuertemente de la función u considerada, de los núcleos $\mathcal{K}_0$ y $\mathcal{K}_1$, y del orden α . Por este motivo, resulta relevante contar con algún método que permita aproximar dicha derivada.

En este trabajo, proponemos una regla numérica que permite aproximar la derivada proporcional de Caputo, mediante una suma ponderada de evaluaciones en los nodos de una malla arbitraria del intervalo $[0, t]$ para $t \in (0, b]$. El método propuesto se basa en una regla de cuadratura (del tipo trapecios, con lineamientos similares a los considerados en [2,3]) para aproximar la integral fraccionaria $I_{RL}^{1-\alpha}$ en combinación con una discretización (del tipo diferencias finitas) de la derivada u' . Concretamente, la regla propuesta es:

$$D_{Num}^{\alpha, PC} u(t) = \sum_{j=0}^N c_j \left(\mathcal{K}_{1j} u_j + \mathcal{K}_{0j} \frac{u_j - u_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} \right),$$

donde u_k y $\mathcal{K}_{ik}$ denotan las evaluaciones de u y $\mathcal{K}_i$, respectivamente, en el nodo t_k de la malla; mientras que los coeficientes c_j dependen del orden de la derivada y de los nodos de la partición.

La regla propuesta brinda una aproximación de la derivada proporcional de Caputo en el sentido otorgado por la siguiente estimación del error; en particular, se observa que la aproximación mejora conforme se refina la partición considerada.

TEOREMA Sea Π una partición arbitraria del intervalo $[0, t]$ con $t \in (0, b]$. Entonces

$$\left| D_{PC}^{\alpha} u(t) - D_{Num}^{\alpha, PC} u(t) \right| \leq C t^{1-\alpha} \text{diam}(\Pi),$$

donde C es una constante positiva independiente de la partición elegida.

Mediante ejemplos concretos ilustramos la aplicabilidad de la regla y corroboramos la estimación obtenida. Actualmente, estudiamos el uso de la regla propuesta para obtener métodos de aproximación numérica en problemas de valores iniciales, en principio, del tipo:

$$\begin{cases} D_{PC}^{\alpha} u(t) = f(t, u(t)), \\ u(0) = \mu_0. \end{cases}$$

Trabajo en conjunto con Gabriel Monzón (Universidad Nacional de General Sarmiento).

Referencias

- [1] Baleanu D., Fernandez A., Akgül A. On a fractional operator combining proportional and classical differintegrals. *Mathematics* (3) 8 (2020), pp. 360.
- [2] Akgul A., Baleanu D. Analysis and applications of the proportional Caputo derivative. *Adv. Diff. Equations* (1) 2021 (2021), pp. 136.
- [3] Odibat Z. Approximations of fractional integral and Caputo fractional derivatives, *Appl. Math. Comput.* 178 (2006), 527–533.

COMBINING REDUCED ORDER MODELLING WITH BAYESIAN SCHEMES TO DRASTICALLY ACCELERATE STOCHASTIC INVERSIONS

Sergio Zlotnik

Universidad Politécnica de Cataluña, España
sergio.zlotnik@upc.edu

We propose a combination of well established methodologies for the solution of large scale inversion problems in geophysics.

On the one hand, we use a Markov chain Monte Carlo (MCMC) approach, based on the Metropolis Hastings algorithm, to solve the inverse problem. Internally, we use a Reduced Order (RO) approach to accelerate each one of the forward problems that are tested by the MCMC. The dimensionality of the parametric space does not allow to sample it completely, so the reduced basis is enriched during the inversion and guided by the MCMC scheme.

Our application is based in one of the main challenges in modern geophysics: the understanding and characterizing the present-day physical state of the thermal and compositional structure of the Earth. In doing so, high resolution inverse problems need to be solved (with thousands of parameters to determine).

One of the most abundant and better constrained data used for the inversion is the Earth's topography. Despite its quality, the topography models included in inversion schemes are usually very simplistic, based on density contrasts and neglecting dynamic components. The reason for this is simply computational efficiency;

3D dynamical models require the solution of a Stokes problem and are too expensive to be embedded within inversion schemes.

We tested the proposed approach in a synthetic experiment aiming to recover the base of the African plate. It is well-agreed within the geophysical community that the dynamic component in the region is of first order importance. Our scheme is able to successfully recover the expected shape of the plate while reducing the computational time to less than 1.

Trabajo en conjunto con Olga Ortega Gelabert (Geo3Bcn, CSIC, Spain), Constanza Manassero (University of Tasmania, Australia), Pedro Díez (UPC, Spain), Juan Carlos Afonso (University of Twente, The Netherlands), Shahzaib Mir (UPC, Spain) y Luis Tao (UPC, Spain).

Referencias

- [1] Ortega O., S. Zlotnik, J.C. Afonso and P. Díez. Fast Stokes flow simulations for geophysical-geodynamic inverse problems and sensitivity analyses based on reduced order modeling. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 125 (2020), 1—25. doi:10.1029/2019JB018314
- [2] Manassero M.C., J.C. Afonso, F. Zyserman and S. Zlotnik. A reduced order approach for probabilistic inversions of 3 – D magnetotelluric data I: general formulation. *Geophysical Journal International* (3) 223 (2020), 1837—1863. doi:10.1093/gji/ggaa415
- [3] Manassero M., J.C. Afonso, F. Zyserman, A. Jones, S. Zlotnik and I. Fomin. A Reduced Order Approach for Probabilistic Inversions of 3D Magnetotelluric Data II: Joint inversion of MT and Surface-WaveData. *Journal of Geophysical Research - Solid Earth* (12) 126 (2021). doi:10.1029/2021JB021962

ANÁLISIS DE ERROR PARA LA ESTABILIZACIÓN CON BURBUJAS EXTENDIDAS EN PROBLEMAS DE CONVECCIÓN-DIFUSIÓN

Itati Zocola

Universidad Nacional del Litoral, Argentina
itazocola@gmail.com

Revisamos el método de estabilización con burbujas extendidas para problemas estacionarios de convección-difusión de convección dominante, originalmente introducido como una mejora del enfoque de burbujas libres de residuo al extender el soporte de la burbuja a dos elementos adyacentes.

En esta charla, nos centraremos en el análisis teórico del error cometido en el método. La idea clave es adaptar una expansión asintótica que guíe la construcción y el análisis de la aproximación. Establecemos estimaciones de error para una clase particular de problemas, destacando el rol de los correctores propuestos y la estructura de los términos resultantes en las capas límite. Este marco aporta una mejor comprensión del mecanismo de estabilización y respalda el comportamiento numérico observado.

Trabajo en conjunto con Pedro Morin (Universidad Nacional del Litoral) y Eberhard Bänsch (FAU Erlangen-Nürnberg).

Aplicaciones de la Matemática y Física Matemática

EFFICIENT INTERTEMPORAL ALLOCATIONS WITH VARIATIONAL UTILITY

Luis Alcalá

Instituto de Matemática Aplicada San Luis, CONICET-UNSL, Argentina
lalcala@unsl.edu.ar

We study Pareto optimal allocations for an infinite-horizon economy with many consumers in a deterministic environment. The direct or primal approach with recursive utilities developed in [1,5] sometimes faces technical difficulties or requires unsatisfactory assumptions. Then, we propose a dual approach based on a variational representation of recursive utilities introduced by [2,3], allowing for Pareto weights to vary over time. As a result, we are able to characterize intertemporal efficient allocations, the path followed by Pareto weights, and obtain an aggregate or social discount factor as a by-product of the optimization problem. We also develop analytical results when consumers have Kreps-Porteus [4] recursive utilities and discuss some implications for consistent aggregation and updating of a social welfare function.

Referencias

- [1] R.A. Dana and C. Le Van. Pareto optima in an infinite-horizon economy where agents have recursive preferences. *Journal of Optimization Theory and Applications* (2) 64 (1990), 269–292.
- [2] B. Dumas, R. Uppal, and T. Wang. Efficient intertemporal allocations with recursive utility. *Journal of Economic Theory* 93 (2000), 240–259.
- [3] P.Y. Geoffard. Discounting and optimizing: Capital accumulation as a variational minmax problem. *Journal of Economic Theory* 69 (1996), 53–70.
- [4] D. Kreps and E. Porteus. Temporal resolution of uncertainty and dynamic choice theory. *Econometrica* (1) 46 (1978), 185–200.
- [5] R. Lucas and N. Stokey. Optimal growth with many consumers. *Journal of Economic Theory* 32 (1984), 139–171.

SOBRE UN PROBLEMA INVERSO EN TRANSPORTE ÓPTIMO

Delfina Aldana Correa

Instituto de Matemática Aplicada del Litoral “Dra. Eleonor Harboure” (UNL-CONICET), Argentina
delfinaaldana@gmail.com

La teoría de Transporte Óptimo (OT) ofrece un marco matemático adecuado para formalizar, modelizar y resolver diversos problemas de redistribución minimizando costos. Su utilización resulta fundamental en diversas áreas que van desde la logística y la economía hasta el aprendizaje automático y el procesamiento de imágenes. Existen esencialmente dos formas principales de plantear un problema de Transporte Óptimo: una es la formulación de Monge (1781), consistente en encontrar una asignación directa entre orígenes y destinos minimizando un costo prefijado; la otra es la formulación de Kantorovich (1942), la cual introduce una relajación sobre la formulación de Monge, mediante distribuciones de probabilidad, permitiendo soluciones más generales y aplicables a una mayor variedad de contextos ([3]).

A lo largo de la historia, el problema de OT ha generado numerosas investigaciones y desarrollos matemáticos. Sin embargo, los problemas inversos asociados al transporte Óptimo (IOT) son muy escasos y recientes. En este trabajo analizamos un problema de Transporte Óptimo inverso desde un enfoque basado en

la teoría de estimación Bayesiana cuando el problema directo se plantea según la formulación de Kantorovich regularizada mediante entropía, que garantiza el buen condicionamiento del problema directo. El problema consiste en estimar los parámetros subyacentes de un problema de OT directo, es decir el costo y las distribuciones marginales, a partir de observaciones de planes de transporte óptimo asociados. En particular, para el caso discreto, caracterizamos el hiperplano de todas las matrices de costo asociadas a un mismo plan de transporte, lo que provee una fuerte conexión entre IOT y la geometría algebraica. Por último utilizamos un enfoque probabilístico Bayesiano para caracterizar las distribuciones condicionales de las matrices de costos dado un acoplamiento óptimo y presentaremos algunos ejemplos numéricos de estimación utilizando Metropolis-Hastings ([1], [2]).

Este trabajo fue desarrollado en el marco del Proyecto CAI+D 2024, código 85520240100114LI "Métodos matemáticos para problemas inversos y aplicaciones" IMAL-FIQ-UNL, Santa Fe, Argentina.

Trabajo en conjunto con Rubén Spies (IMAL-FIQ, UNL-CONICET) y Karina Temperini (IMAL-FHUC, UNL-CONICET).

Referencias

- [1] W. Chiu, P. Wang and P. Shafro. Discrete Probabilistic Inverse Optimal Transport. Proceedings of the 39th International Conference on Machine Learning, 2022.
- [2] A. Stuart and M. Wolfram. Inverse Optimal Transport. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2020.
- [3] C. Villani. Topics in Optimal Transportation. Graduate Studies in Mathematics, 2008.

UN MODELO DE PROPAGACIÓN DE ENFERMEDADES INFECCIOSAS EN MULTITUDES: COMPORTAMIENTO SOCIAL Y CONCIENCIA DEL RIESGO DE INFECCIÓN

Claudio Agustín Armas

Universidad Nacional de Córdoba y CIEM-CONICET, Argentina
claudio.armas@unc.edu.ar

Las crisis sanitarias mundiales de los últimos años, como la pandemia de COVID-19, han puesto de manifiesto la importancia de comprender y modelar la dinámica de propagación de enfermedades infecciosas en entornos con alta concentración de personas [1]. Si bien los modelos epidemiológicos tradicionales son efectivos en muchos escenarios, suelen carecer de aspectos claves como el movimiento espacial, el comportamiento social de las personas y, la concientización sobre el riesgo de contagio de una enfermedad infecciosa. Estas características son necesarias para predecir con precisión la transmisión de enfermedades en contextos específicos. En esta charla se presenta un modelo (cinético) [2] que simula la propagación de enfermedades infecciosas en entornos con alta densidad de individuos, considerando las características mencionadas. El modelo evalúa cómo la conciencia sobre el riesgo de contagio de la enfermedad puede modificar el comportamiento individual, reducir la tasa de infección y/o reducir el tiempo de evacuación. Se analizan diferentes escenarios para entender la interacción entre el comportamiento humano y la transmisión de enfermedades, con el objetivo de diseñar estrategias de intervención eficaces.

Trabajo en conjunto con Agnelli Juan Pablo (Universidad Nacional de Córdoba y CONICET, Argentina) y Knopoff Damián (Universidad de Deusto, Bilbao, España).

Referencias

- [1] Zhu, Q.; Gao, Y.; Hu, Q.; Hu, D.; Wu, X. A study on the factors influencing the intention to receive booster shots of the COVID-19 vaccine in China based on the information frame effect. Front. Public Health 12 (2024), 1258188.
 - [2] Agnelli, J.P.; Armas, C.; Knopoff, D.A. Spatial Kinetic Modeling of Crowd Evacuation: Coupling Social Behavior and Infectious Disease Contagion. Symmetry 17 (2025), 123.
-

ANÁLISIS DE TEXTURAS MEDIANTE CUANTIFICADORES DE INFORMACIÓN DE SERIES DE TIEMPO: ROBUSTEZ ANTE LA DESCOMPOSICIÓN POR WAVELETS

María Belén Arouxet

Centro de Matemática de La Plata, Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Nacional de La Plata (CMALP-UNLP), Argentina
belenarouxet@gmail.com

En este trabajo ampliamos un estudio previo [1] enfocado en la discriminación de texturas en imágenes mediante el uso de la curva de Hilbert, la cual transforma una imagen en una serie temporal unidimensional. Tras esta conversión, se aplicaron cuantificadores provenientes de la teoría de la información, como la entropía de permutación [2], la complejidad de permutación y la información de Fisher [3], demostrando la robustez del método frente a transformaciones rígidas como la rotación y la simetría. En el presente trabajo, evaluamos dicha robustez ante distintos niveles de descomposición de las imágenes utilizando transformadas wavelet.

Trabajo en conjunto con Aurelio F. Bariviera (Department of Business, ECO-SOS, Universitat Rovira i Virgili, Reus, España), Roberta Hansen (Facultad de Ingeniería, Departamento de Matemáticas, Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires, Argentina) y Verónica E. Pastor (Facultad de Ingeniería, Departamento de Matemáticas, Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires y Facultad de Ingeniería, Departamento de Ciencias Básicas, Universidad Nacional de La Plata, La Plata, Argentina).

Referencias

- [1] A. F. Bariviera, R. Hansen and V. E. Pastor. Texture discrimination via Hilbert curve path based information quantifiers. *Pattern Analysis and Applications* (1) 28 (2025), 31.
- [2] C. Bandt and B. Pompe. Permutation entropy: A natural complexity measure for time series. *Physical Review Letters* (17) 88 (2002), 174102.
- [3] O. A. Rosso, H. A. Larrondo, M. T. Martín, A. Plastino, and M. A. Fuentes. Distinguishing noise from chaos. *Physical Review Letters* (15) 99 (2007), 154102.

ESTRATEGIAS DE CONTROL ÓPTIMO PARA LA DINÁMICA EPIDÉMICA: INTEGRACIÓN DE MODELOS SIR Y LOTKA–VOLTERRA

Rocío Balderrama

Universidad de Buenos Aires - IMAS, Argentina
rbalde@dm.uba.ar

En este trabajo estudiamos un modelo de control óptimo para enfermedades transmitidas por vectores, integrando la dinámica epidemiológica clásica tipo SIR-SI con interacciones depredador–presa de tipo Lotka–Volterra. El modelo describe la transmisión entre humanos y mosquitos, incorporando además una población de depredadores naturales de mosquitos como mecanismo de control biológico.

Estudiamos la dinámica del problema sin control y, a diferencia de modelos previos, se permite el crecimiento no acotado de la población de vectores, lo cual genera un escenario más realista pero matemáticamente más desafiante para el análisis de estabilidad.

En cuanto al problema de control óptimo, consideramos que la introducción de depredadores está penalizada por costos cuadráticos o lineales, y se recompensa la preservación de individuos susceptibles al final del horizonte de estudio. Mediante el Principio del Máximo de Pontryagin caracterizamos las estrategias óptimas, que pueden adoptar forma continua o tipo “bang-bang” según los parámetros del costo.

Finalmente, presentamos simulaciones numéricas que ilustran cómo el control biológico puede reducir significativamente la prevalencia de la enfermedad.

Trabajo en conjunto con Ignacio Ceresa Dussel (UBA-IMAS) y Constanza Sánchez Fernández de la Vega (UBA-IC-CONICET).

REVISITING THE REDUCTION OF TIME-DEPENDENT HAMILTONIAN SYSTEMS

Carla Benítez García

Universidad de La Laguna, España
cbeniteg@ull.edu.es

In a recent paper [1], the reduction of mechanical presymplectic structures and its application to time-dependent Hamiltonian systems was introduced, addressing some of the limitations of the classical Albert reduction. In this talk, we will present this extended framework for reducing time-dependent Hamiltonian systems. The method combines cotangent bundle reduction with the reduction of presymplectic structures of corank 1 and 2. These results extend earlier work in the area [2]. Several examples will be discussed to illustrate the theory from this updated standpoint.

Trabajo en conjunto con David Iglesias, Juan Carlos Marrero y Edith Padrón (Universidad de La Laguna).

Referencias

- [1] I. Gutierrez-Sagredo, D. Iglesias Ponte, J.C. Marrero, and E. Padrón. Mechanical presymplectic structures and Marsden-Weinstein reduction of time-dependent Hamiltonian systems. *Journal of Geometry and Physics* 213 (2025), 105492.
- [2] I. Lacirasella, J.C. Marrero, and E. Padrón. Reduction of symplectic principal R-bundles. *J. Phys. A* (32) 45 (2012), 325202.

GENERALIZACIÓN DE DEMOCRACIA LÍQUIDA A DELEGACIÓN MULTIAGENTE: UNA MEDIDA DE PESO DE VOTO Y ANÁLISIS DEL EQUILIBRIO

Francisco Bersetche

DM-FCEyN-UBA / IMAS-CONICET, Argentina
bersetche@gmail.com

En este trabajo se propone una generalización del modelo clásico de democracia líquida que incorpora la delegación fraccionada del peso del voto y, al mismo tiempo, asegura la existencia de estados de equilibrio. Nuestro enfoque permite a los agentes dividir y delegar sus votos entre varios representantes, incluso conservando una fracción para sí mismos. Se introduce un mecanismo de penalización dependiente de la longitud de las cadenas de delegación y se analizan las propiedades deseables de una generalización razonable del modelo clásico. Se demuestra que penalizaciones pequeñas aproximan el modelo al cumplimiento de dichas propiedades, bajo cierto margen de error. Posteriormente, se estudia la existencia de estados de equilibrio en un juego de delegación general basado en la medida de voto propuesta. A diferencia del modelo clásico, se prueba que este juego admite equilibrios de Nash siempre que se imponga una penalización positiva sobre la longitud de las cadenas de delegación.

ESTIMACIÓN DE UN PARÁMETRO DEL MODELO DE COLE MEDIANTE UN CONTROLADOR FRACCIONARIO

Natalia Yudit Bravo

Universidad Nacional de Tierra del Fuego AelAS, Argentina
nataliayuditbravo@gmail.com

Un sistema biológico se puede caracterizar mediante sus propiedades eléctricas a partir de mediciones de bioimpedancia. El modelo de Cole está representado por 4 parámetros numéricos; posibilitando ajustar las mediciones experimentales con el modelo representado en la Ecuación (1). En este modelo adaptado a variables eléctricas -Ecuación (1)- los 4 parámetros son R_∞ (resistencia a frecuencia infinita), R_0 (resistencia a frecuencia cero), τ (constante de tiempo adimensional) y α (exponente adimensional con posibles valores entre 0 y 1) [1],

$$Z(\omega) = R_\infty + \frac{R_0 - R_\infty}{1 + (j\omega\tau)^\alpha}. \quad (1)$$

En trabajos anteriores hemos expuesto que la estimación del parámetro τ -al aplicar el Modelo de Cole a más de un centenar de sets de datos experimentales [2]- presenta la mayor desviación estándar en

comparación con otros parámetros característicos en todos los métodos de ajuste analizados [3], lo que motiva la búsqueda de estrategias alternativas para su estimación.

La teoría de control se basa en el análisis de sistemas dinámicos representados por sistemas de ecuaciones diferenciales [4]. En este contexto, el cálculo fraccionario expande el poder descriptivo del sistema haciendo uso de ecuaciones diferenciales de orden no entero [5]. Los controladores que utilizan las herramientas del cálculo fraccionario se denominan controladores fraccionarios.

En este trabajo se propone el uso de un controlador fraccionario para optimizar la estimación del parámetro τ a partir de los datos experimentales [2]. La implementación se realizó en MATLAB utilizando la toolbox Ninteger [6], que permite representar funciones de transferencia de orden no entero. Se empleó la aproximación CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier) de primera generación, identificando a s igual a $j\omega$. El procedimiento parte de un valor inicial $k = \tau^\alpha$, donde τ y α son obtenidos a partir del ajuste por los métodos presentados en el trabajo anterior [3]. Este valor se optimiza mediante la función `fminsearch` de Matlab que minimiza el error entre la respuesta en frecuencia del modelo ajustado y los datos experimentales. La función `crone1(k, v, \omega_l, \omega_h, N)` es utilizada para construir la función fraccionaria $Z(s)$, donde el orden fraccionario $v = \alpha$ se mantiene fijo. Esta función devuelve una aproximación racional de s expresada como una función de transferencia. Esta función de transferencia luego es evaluada en el dominio de la frecuencia utilizando la función de Matlab `freqresp`, lo que permite obtener un vector del espectro de impedancia ajustado a partir del set de datos que se le brinda como vector de entrada. A partir de esto, con el valor óptimo de k , se obtiene una estimación del parámetro τ .

Los resultados muestran una reducción significativa en el error estándar de estimación respecto a los métodos comparados en el trabajo anterior [3], por lo que se concluye que la implementación de un controlador fraccionario para la estimación de τ optimiza los resultados alcanzados previamente y también aporta una herramienta robusta para la caracterización precisa de sistemas biológicos mediante bioimpedancia a partir de la reducción del desvío estándar de los valores de τ "optimizado".

Trabajo en conjunto con Antonio Héctor Dell'Osa (Universidad Nacional de Tierra del Fuego AelIAS, Argentina).

Referencias

- [1] Cole K. S. Permeability and impermeability of cell membranes for ions. Cold Spring Harb. Symp. Quant. Biol. 8 (1940), 110–122. doi:10.1109/IEMBS.2009.5334494
- [2] A. H. Dell'Osa, N. Y. Bravo, and T. Villanueva Jousset. Single dispersion EIS measurements: a compilation. Zenodo (2025). Available: <https://doi.org/10.5281/zenodo.15795175>
- [3] Bravo, N. Y., Domínguez, A., Villanueva, T., Prisching, G. y Dell'Osa, A. H. Cole's Model: A Comparative Study of Curve Fitting Methods, in V Latin American Conf. on Bioimpedance (CLABIO 2024). P. Bertemes-Filho, Ed., IFMBE Proc. 124 (2024). Cham, Switzerland: Springer, 2025.
- [4] Katsuhiko Ogata. Ingeniería de control moderna. Quinta edición. Instituto Tecnológico de Aguascalientes. Pearson Educación, S.A., Madrid, España, 2010.
- [5] Vázquez, L y Velasco M. P. El cálculo fraccionario como instrumento de modelización. Publicaciones del Departamento de Matemática Aplicada. Universidad Complutense de Madrid, España, 2011.
- [6] Valério, D. y Sá Da Costa, J. Ninteger: A Non-Integer Control Toolbox for MATLAB. En: Proceedings of the First IFAC Workshop on Fractional Differentiation and Applications, Bordeaux, France, (2004), 208–213.

FILTRADO Y SEGMENTACIÓN DE IMÁGENES CT MEDIANTE TRANSFORMADA WAVELET DISCRETA

Valentin N. Brunetti Bassini

Universidad Nacional de La Plata, Facultad de Ciencias Exactas, Argentina
valentinbrunetti@gmail.com

Se expone un método de filtrado y reconstrucción de zonas de interés de imágenes de tomografía computarizada, basado en la descomposición wavelet discreta bidimensional y el uso de filtros de Gabor. El análisis sobre la descomposición wavelet de las imágenes supone una ventaja por sobre el estudio directo de los datos, ya que presenta mayor contraste entre objeto y fondo respecto de la imagen original, facilitando la detección de fronteras y la construcción de máscaras [1], [2]. Se aplicó un filtro de Gabor sobre la matriz de coeficientes de aproximación con el fin de realzar estructuras orientadas y mejorar la respuesta frente a

transiciones objeto-fondo. Finalmente, se realizaron tres técnicas de umbrado y postprocesado morfológico para obtener las máscaras de segmentación de la imagen.

En imágenes CT de buena calidad, el filtrado y reconstrucción no produjo mejoras significativas. En cambio, en imágenes ruidosas, el procedimiento pudo reducir la desviación estándar en mediciones de atenuación y uniformidad hasta en un 51 % en el mejor de los casos, aunque a costa de artefactos perceptibles bajo inspección detallada. El proceso de segmentación mostró alta concordancia con máscaras de referencia en los conjuntos de imágenes tomográficas estudiadas. El código está implementado en MATLAB, y es parametrizable por tipo de wavelet, nivel de descomposición y parámetros de Gabor.

Palabras clave: transformada wavelet discreta, filtro de Gabor, segmentación de imágenes, tomografía computarizada (CT), reducción de ruido.

Referencias

- [1] Priyadarsan Parida, Nilamani Bhoi. Wavelet based transition region extraction for image segmentation. *Future Computing and Informatics Journal* (2) 2 (2017), 65–78.
- [2] Procházka Aleš, Hostalkova Eva, Gavlasová Andrea. Wavelet Transform in Image Regions Classification. *Proceedings of the 8th IMA Conference on Mathematics in Signal Processing*, 2008.

INTEGRACIÓN GEOMÉTRICA DE SISTEMAS MECÁNICOS FORZADOS

Matías Ignacio Caruso

Instituto Balseiro (CNEA - Universidad Nacional de Cuyo), Argentina
matias.caruso@ib.edu.ar

Los sistemas mecánicos forzados forman una rica familia de sistemas dinámicos que permiten modelar una gran cantidad de sistemas de interés en robótica e ingeniería. Si bien la presencia de fuerzas externas suele impedir la existencia de magnitudes conservadas, existen condiciones bajo las cuales magnitudes tales como estructuras simplécticas o la aplicación momento sí son preservadas por el flujo del sistema, lo que motiva el interés por construir integradores numéricos que respeten este fenómeno.

En [2], los autores presentan un esquema de construcción de integradores simplécticos para sistemas sin fuerzas basado en la noción de “discretization map”, una generalización del concepto de retracción. Además, si el sistema presenta una simetría que dé lugar a la conservación de la aplicación momento, este marco permite incorporarla de modo que el integrador numérico construido también la preserve [1].

En esta comunicación, veremos cómo el esquema mencionado anteriormente puede adaptarse para incluir sistemas mecánicos forzados, respetando la eventual conservación de la aplicación momento, cuando la simetría del sistema la permita.

Trabajo en conjunto con María Barbero-Liñán (Universidad Politécnica de Madrid, España) y David Martín de Diego (Instituto de Ciencias Matemáticas, España).

Referencias

- [1] Barbero-Liñán, M., Marrero, J. C. y Martín de Diego, D. From retraction maps to symplectic-momentum numerical integrators. *IFAC-PapersOnLine* (6) 58 (2024), 155–159.
- [2] Barbero-Liñán, M. y Martín de Diego, D. Retraction maps: a seed of geometric integrators, *Found. Comput. Math.* 23 (2023), 1335–1380.

MÉTODOS VARIACIONALES EN LA SEGMENTACIÓN MULTI-FASE DE IMÁGENES

Pablo Martín Casal

Universidad Nacional de Moreno, Argentina
pcasal@docentes.unm.edu.ar

En los últimos años se abordó el problema de segmentación en más de dos regiones, tanto desde el punto de vista de la ecuación de Mumford-Shah como de la de Allen-Cahn. En ambos casos se proponen funcionales distintos que involucran diferentes términos de regularización.

La segmentación en dos regiones se realiza a partir de una fase ϕ donde se considera la separación en dos regiones mediante la curva de nivel 0 de ϕ .

Con el objetivo de lograr separaciones que reflejen la imagen original libre de ruido y que produzca un contraste entre las dos regiones se propone el problema variacional

$$\min \mathcal{E}_s(\phi) = \int_{\Omega} \left(W(\phi) + \frac{1}{2} \left| (-\Delta)^{s/2} \phi \right|^2 + |f - \phi|^2 \right) dx dy,$$

donde ϕ y f es la imagen original, $W(\phi) = \frac{1}{4}(1 - \phi^2)^2$ es la función doble pozo de energía potencial y $s \in (0, 1)$ es un parámetro de regularización que interviene en el laplaciano fraccionario del segundo término.

En [1] se resuelve el problema variacional planteando la ecuación de evolución asociada al descenso por gradiente mediante los métodos de descomposición temporal (TSM).

Para extender la segmentación de una imagen en más de una zona se propone resolver el problema multi-fase mediante estos mismos métodos, mostrando que son flexibles, eficientes y de bajo costo computacional en la resolución de problemas variacionales provenientes de funcionales asociados a este problema. Específicamente, el funcional dado por

$$\mathcal{E}^\epsilon = \int_{\Omega} \sum_i^n \left(\epsilon |\nabla u_i|^2 + \frac{1}{\epsilon} W(u_i) \right) + F(u_1, u_2, \dots, u_n, I) dx dy,$$

presentado en [2], para resolver el problema de segmentar una imagen en 2^n regiones. Se comparará su performance con otros algoritmos existentes en la literatura, considerando el tiempo computacional y analizando diferentes medidas de calidad, tanto en imágenes simuladas como reales.

Trabajo en conjunto con Leonardo Dell'Arciprete, Fernando Chorny y Pablo Casal (Universidad Nacional de Moreno, Argentina); Julia Casseti y Daniela Malegarie (Universidad Nacional de Moreno y Universidad de General Sarmiento, Argentina); y Diego Rial (Universidad de Buenos Aires-CONICET, Argentina).

Referencias

- [1] L. Dell'Arciprete, J. Casseti, F. Chorny, D. Rial, D. Malegarie, P. Casal. Resolución de ecuaciones de reacción-difusión no lineal para filtrado de imágenes. Exposición oral, X Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial (MACI 2025), 05 2025.
- [2] Liu, C., Qiao, Z., Zhang, Q. Multi-phase image segmentation by the Allen–Cahn Chan–Vese model. *Computers & Mathematics with Applications* 141 (2023), 207—220.

MODELO ESTOCÁSTICO VECTOR-HOSPEDADOR Y EVALUACIÓN DE ESTRATEGIAS DE CONTROL DEL DENGUE EN TARTAGAL

Ezequiel Francisco Chocobar

Facultad de Ciencias Exactas - Universidad Nacional de Salta , Argentina
ezequiel.chocobar@exa.unsa.edu.ar

Las enfermedades no endémicas transmitidas por vectores, como el dengue en el norte de Argentina, presentan una gran variabilidad interanual en el tamaño de sus epidemias. La ciudad de Tartagal (ubicada al norte de la provincia de Salta, en la frontera con el sur de Bolivia) experimentó una epidemia de gran magnitud en el año 2009. A partir de 2010, se implementaron diversos trabajos de monitoreo de índices larvarios en puntos estratégicos de la ciudad [1]. Cuando se registraban valores críticos en una zona, se procedía a la limpieza de contenedores de agua y a la aplicación de larvicidas en aquellos que no podían eliminarse. Estas acciones de monitoreo y control del *Aedes aegypti* —vector transmisor del dengue— resultaron en una significativa reducción de los casos anuales.

En el presente trabajo, se construyó un modelo estocástico vector-hospedador [2] para simular los casos anuales de dengue en Tartagal. Para el vector *Aedes*, se incorporó un modelo poblacional [3] dependiente de factores ambientales (precipitación, temperatura y humedad relativa). Para los hospedadores, se utilizaron datos censales del INDEC (2010) para desarrollar un modelo metapoblacional donde cada parche representa un radio censal en interacción con sus vecinos más próximos. En cada parche, la información demográfica y de viviendas permitió regular la población del vector en función de la presencia de hospedadores y de las variables climáticas. De acuerdo con los reportes del Boletín Integrado de Vigilancia, los primeros casos en Argentina suelen ser importados; es decir, corresponden a personas que estuvieron en zonas endémicas durante las dos semanas previas. Utilizando datos del flujo de personas en los pasos fronterizos entre Salta y Bolivia (área endémica de dengue), se generó una serie sintética para emular la probabilidad de aparición de un caso importado en alguno de los radios censales.

Al simular en el modelo las estrategias de monitoreo e intervención basadas en índices larvarios, se obtuvieron resultados estadísticamente consistentes con los casos reportados entre 2010 y 2017. De este modo, el modelo desarrollado permite evaluar diferentes escenarios epidemiológicos a partir de la aplicación de diversas estrategias de control biológico. Asimismo, servirá como una herramienta fundamental para cuantificar y comparar el impacto de nuevas intervenciones. En particular, se propone utilizar el modelo para simular y cuantificar la reducción adicional en la incidencia de casos que podría alcanzarse mediante la implementación de campañas de vacunación, complementando las medidas de control vectorial ya existentes. Esto permitirá comparar directamente la efectividad de la estrategia actual —basada en la reducción del vector— con el efecto sinérgico de incorporar una estrategia de inmunización. El objetivo final es cuantificar el impacto potencial de la vacuna en la dinámica epidemiológica del dengue en la región, proporcionando un análisis costo-beneficio que sirva de base para la futura toma de decisiones en materia de salud pública.

Trabajo en conjunto con Javier Armando Gutierrez (Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de Salta, Argentina).

Referencias

- [1] M. Espinosa et al. Temporal Dynamics and Spatial Patterns of Aedes aegypti Breeding Sites, in the Context of Dengue Control Program in Tartagal (Salta Province, Argentina). PLOS Neglected Tropical Diseases (5) 10 (2016), e0004621.
- [2] J. A. Gutierrez et al. Meteorological indicators of dengue epidemics in non-endemic Northwest Argentina. Infectious Disease Modelling 7 (2022), 823–834.
- [3] L.D. Valdez et al. Impact of rainfall on Aedes aegypti populations. Ecological Modelling 385 (2018), 96–105.

IMPLEMENTACIÓN DE LA DISTANCIA DE WASSERSTEIN EN MEDIDAS WAVELET PARA LA COMPARACIÓN DE SEÑALES ELECTROCARDIOGRÁFICAS

Gisela Vanesa Clemente

CMaLP (Centro de Matemática de La Plata), CONICET, Argentina
investigar1matematica@gmail.com

En este trabajo se propone un enfoque alternativo para comparar señales electrocardiográficas (ECG) mediante el uso de la distancia de Wasserstein [1, 2], entre medidas de probabilidad construidas a partir de coeficientes wavelet. A diferencia de propuestas previas basadas en la energía relativa por escala y la entropía de Shannon, como las desarrolladas en [3], aquí se introduce una construcción que preserva información multirresolutiva tanto en tiempo como en frecuencia.

Sea $s(t) \in L^2(\mathbb{R})$ una señal de interés, por ejemplo un complejo QRS [4] extraído del ECG, y consideramos un sistema wavelet $\{\psi_{j,k}\}_{j,k}$ con j y k los parámetros de escala y traslación respectivamente, a partir de una wavelet madre ψ bien localizada; generando una medida de probabilidad μ_s sobre $\mathbb{R}$ mediante la densidad por niveles:

$$\rho_{s(t)} = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K |c_{j,k}|^2 \frac{\chi_{j,k}}{|I_{j,k}|},$$

donde $c_{j,k} = \langle s, \psi_{j,k} \rangle$, $\chi_{j,k}$ es la función característica del soporte $I_{j,k}$ de $\psi_{j,k}$, y $|I_{j,k}|$ su medida de Lebesgue. La construcción resulta en una medida absolutamente continua respecto de la medida de Lebesgue.

Una vez definidas las medidas μ_s para señales reales y μ_u para una señal uniforme $u(t)$ (por ejemplo, constante o de referencia), se cuantifica la distancia entre ellas mediante la métrica de Wasserstein de orden $p \in [1, \infty)$:

$$W_p(\mu_s, \mu_u) = \left(\int_0^1 |F_{\mu_s}^{-1}(\alpha) - F_{\mu_u}^{-1}(\alpha)|^p d\alpha \right)^{1/p},$$

donde F_{μ}^{-1} denota la función inversa de distribución (función cuantil) generalizada de μ .

Este enfoque permite incorporar la geometría subyacente de la señal en el análisis y utilizar herramientas de transporte óptimo, como sugiere Panaretos and Zemel [5]. De esta forma, aplicamos esta metodología al análisis de señales del ECG de bases públicas, como PTB y PTB XL analizadas previamente, comparando grupos de sujetos sanos con pacientes post-infarto en distintas fases, así como con pacientes con cardiomiopatía chagásica, en bases de datos como Code15 y Samitrop. Se evalúa si la distancia $W_p(\mu_s, \mu_u)$

discrimina estadísticamente entre grupos, complementando índices previamente utilizados como los basados en la entropía wavelet normalizada H y en la complejidad estadística C [3].

Finalmente, se discute cómo esta medida inducida puede modularse según la elección de la wavelet madre, evaluando la dispersión de los coeficientes en términos de coherencia (medidas $C_1(\psi)$ y $C_\infty(\psi)$) y proponiendo criterios para seleccionar funciones ψ que generen representaciones más eficientes y robustas frente a la variabilidad interpaciente.

Trabajo en conjunto con Mariano Llamado Soria (Departamento de Ingeniería Electrónica, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Buenos Aires, Argentina), Leandro Andrini (CMaLP-Centro de Matemática de La Plata, CONICET, Buenos Aires, Argentina) y Pedro Massey (IAM-Instituto Argentino de Matemática Alberto P. Calderón, CONICET, Buenos Aires, Argentina).

Referencias

- [1] M. Sommerfeld and A. Munk. Inference for empirical Wasserstein distances on finite spaces. Preprint (2017). ArXiv:1610.03287v2. DOI:10.48550/arXiv.1610.03287.
- [2] J. Wiesel. Measuring association with Wasserstein distances. Preprint (2021). ArXiv:2102.00356. DOI:10.48550/arXiv.2102.00356.
- [3] E. R. Valverde, G. V. Clemente, P. D. Arini and V. Vampa. Wavelet-based entropy and complexity to identify cardiac electrical instability in patients post myocardial infarction. Biomedical Signal Processing and Control 69 (2021). DOI:10.1016/j.bspc.2021.102846.
- [4] L. Sörnmo and P. Laguna. Bioelectrical Signal Processing in Cardiac and Neurological Applications. Elsevier Academic Press, 2005. ISBN: 0-12-437552-9.
- [5] V. M. Panaretos and Y. Zemel. Statistical aspects of Wasserstein distances. Annual Review of Statistics and Its Application 6 (2019), 405—431, 2019. DOI: 10.1146/annurev-statistics-030718-104938.

VARIATIONAL COLLISION INTEGRATORS FOR NONHOLONOMIC SYSTEMS

Leonardo Colombo

Centro de Automática y Robótica (CSIC-UPM), España
leonardo.colombo@csic.es

A discrete theory for implicit nonholonomic Lagrangian systems undergoing elastic collisions is developed. It is based on the discrete Lagrange–d’Alembert–Pontryagin variational principle, and the dynamical equations thus obtained are the discrete nonholonomic implicit Euler–Lagrange equations together with the discrete conditions for the elastic impact. To illustrate the theory, variational integrators with collisions are built for several examples, including a bouncing ellipse and a nonholonomic spherical pendulum evolving inside a cylinder.

Trabajo en conjunto con Álvaro Rodríguez Abella (Electrical and Computer Engineering Department, University of California, Los Angeles, USA).

ROBUSTEZ EN REDES BIOLÓGICAS MULTIVALUADAS

María de las Mercedes Dorda Recalde

Universidad de Buenos Aires, Argentina
mariadorda@hotmail.com

En redes bioquímicas, la robustez de concentración absoluta (ACR) hace referencia a que el valor de una determinada especie de la red sea siempre el mismo en cualquier equilibrio positivo, independientemente de la condición inicial. Este concepto fue definido matemáticamente y estudiado por primera vez en [7] y luego fue abordado desde la matemática por numerosos autores [3,4,5,6].

En este trabajo utilizamos las herramientas de la Lógica Multivaluada [1] propuestas en [2], donde las concentraciones de las especies de la red $x_1, \dots, x_n$ se consideran dentro de un conjunto finito $X_m = \{0, 1/m, 2/m, \dots, 1\}$ de cardinal arbitrario $m + 1$. Las operaciones que consideramos son neg , $\oplus$ y $\odot$, donde $\text{neg}(x) = 1 - x$, $x \oplus y = \min\{1, x + y\}$, $x \odot y = \max\{0, x + y - 1\}$, que se ajustan bien a las interpretaciones biológicas. En estos sistemas dinámicos a tiempo discreto, la dinámica de la red está dada por una función $F : X_m^n \rightarrow X_m^n$, cuyas iteraciones describen la evolución de los estados. Los equilibrios son los vectores

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ tales que $F(x) = x$. Definimos el concepto de ACR en redes multivaluadas y estudiamos ejemplos específicos donde se pudo predecir la presencia o ausencia de ACR.

Trabajo en conjunto con Mercedes Pérez Millán (UBA-CONICET, Argentina).

Referencias

- [1] Cignoli R., D'Ottaviano I., Mundici D. Algebraic foundations of many-valued reasoning. Vol. 7. Springer Science & Business Media, 2013.
- [2] García Galofre J., Pérez Millán M., Galarza Rial A., Laubenbacher R., Dickenstein A. Beyond Boolean networks: new tools for the steady state analysis of multivalued networks. Preprint (2025). ArXiv:2404.16760.
- [3] García Puente L., Gross E., Harrington H., Johnston M., Meshkat N., Pérez Millán M., Shiu A. Absolute concentration robustness: algebra and geometry. J. Symb. Comp. 128 (2025), 102398.
- [4] Joshi B., Craciun G. Foundations of static and dynamic absolute concentration robustness. J. Math. Biol. (5) 85 (2022), 53
- [5] Joshi B., Nguyen T. Bifunctional enzyme provides absolute concentration robustness in multisite covalent modification networks. B. Math. Biol. (36) 88 (2024).
- [6] Pascual-Escudero, B., Feliu, E. Local and global robustness in systems of polynomial equations. Math. Models Methods Appl. Sci. (1) 45 (2022), 359—382.
- [7] Shinar G., Feinberg M. Structural sources of robustness in biochemical reaction networks, Science (5971) 327 (2010), 1389–1391.

MODELOS POBLACIONALES PARA EVALUAR EL IMPACTO DE UNA EPIDEMIA

Mariano Andrés Ferrari

Facultad de Ingeniería, UNPSJB, Argentina
mferrari7@gmail.com

En la Península Valdés, provincia de Chubut, Argentina, se encuentra la única colonia reproductiva del elefante marino del sur (*Mirounga leonina*), de amplio interés turístico para la región. Durante el año 2023 la población sufrió el impacto de una epidemia de gripe aviar, causada por el virus H5N1, que provocó la muerte de las crías nacidas, así como de un número indeterminado de hembras y machos adultos, por lo que las consecuencias demográficas de este evento podrían ser muy significativas [1]. En esta comunicación discutiremos algunos modelos poblacionales que permiten proyectar distintos escenarios sobre el impacto de la epidemia y la posible recuperación de la colonia luego de este evento.

La población de elefantes marinos de Península Valdés ha sido ampliamente estudiada desde el punto de vista de su tendencia, distribución y composición demográfica desde 1969. Con esta información se han construido y estimado modelos demográficos de distinto tipo que servirán de base para proyectar la evolución de la colonia. Siendo los elefantes marinos una especie longeva (las hembras viven más de 20 años) con un ciclo de vida anual, se necesitarán varios años para observar las consecuencias de la epidemia por lo que los modelos resultan esenciales para considerar diferentes escenarios posibles y acciones de manejo.

El esquema general de los modelos considerados se corresponde con un sistema dinámico estocástico:

$$\begin{aligned}x_t &= f_t(x_{t-}, b) + \epsilon_t \\y_t &= x_t + \omega_t\end{aligned}$$

dónde x_t es el vector que describe la estructura de la población en la temporada t , x_{t-} representa los estados anteriores de la población, f_t es el modelo determinista de proyección, con vector de parámetros b e y_t es el vector de las observaciones correspondientes. La estocasticidad está dada por ϵ_t y ω_t que corresponden a los errores de proceso y observación respectivamente. En este marco pueden evaluarse modelos de distinta complejidad en su estructura, considerando uno o dos sexos y distintas clases de edad. Asumiendo luego distintas hipótesis referidas al impacto de la epidemia sobre los parámetros demográficos se proyectaron diferentes escenarios que podrán contrastarse luego con los datos de los próximos relevamientos de la población, procurando evaluar el impacto real de la epidemia sobre las distintas clases de edad y sexo.

Trabajo en conjunto con Jimena Dima, Paola Bonfili e Ivan Mandelman (Grupo de modelado matemático y aplicaciones, MoMAp. Facultad de Ingeniería, UNPSJB).

Referencias

- [1] Campagna et al. Predicting Population Consequences of an Epidemic of High Pathogenicity Avian Influenza on Southern Elephant Seals. *Marine Mammal Science* (2025), e70009. <https://doi.org/10.1111/mms.70009>

UN FORMALISMO ENTRÓPICO PARA SISTEMAS COMPLEJOS QUE TIENDAN AL DESCONTROL

Marcos Gaudiano

CIEM-Conicet, FaMAF-UNC, Argentina
marcosgaudiano@gmail.com

La existencia de estructuras y patrones jerárquicamente organizados es ubicua en sistemas complejos [1]. Una metodología basada en la entropía/fractales incorpora este hecho y provee de una manera natural una forma de clasificar las componentes del sistema de acuerdo a su grado de incontrolabilidad [2]. Propiedades de autosimilaridad encontradas en la función entropía sugerirían aplicaciones potenciales al menos para una fracción no despreciable de todos los sistemas complejos.

Se van a mostrar algunas aplicaciones real-world de esta teoría, por ej. desbordamiento urbano [3], deforestación [4], protestas y paros de transporte público [5, 6], como así también otras aplicaciones en clásicos modelos de agentes: emergencia de 3ras. vías políticas (usando el modelo de Sznaid [7,8]), segregación social (por medio del modelo de Schelling [9]) y divergencia de culturas (con el modelo de Axelrod [10]).

Referencias

- [1] D. Pumain. *Hierarchy in Natural and Social Sciences*. Springer, Dordrecht, 2006.
- [2] M. Gaudiano. An Entropical Characterization for Complex Systems Becoming out of Control. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 440 (2015), 185–199.
- [3] M. Gaudiano, F. Santos, J. Tenedorio and J. Pacheco. Fractal Cartography of Urban Areas. *S. Encarnacao, Scientific Reports* 2, 527 (2012). doi:10.1038/srep00527
- [4] J. Sun, Z.Huang, Q. Zhen, J. Southworth and S. Perz. Fractally Deforested Landscape: Pattern and Process in a Tri-National Amazon Frontier. *Applied Geography* 52 (2014), 204–211.
- [5] M. Gaudiano, J. Revelli and C. Lucca. Entropic Analysis of Public Transport System Strikes. *Advances in Complex Systems* (6) 24 (2022), 2250002.
- [6] M. Gaudiano, J. Revelli and C. Lucca. Hierarchical correlation of joint patterns of urban protests. *Advances in Complex Systems* (7) 28 (2025), 1–15. DOI: 10.1142/S0219525925500134
- [7] M. Gaudiano and J. Revelli. Spontaneous Emergence of a third position in an opinion formation model. *Physica A: Statistical and Theoretical Physics* 521 (2019), 501–511.
- [8] M. Gaudiano and J. Revelli. Entropical analysis of an opinion formation model presenting a spontaneous third position emergence. *The European Physical Journal B* 94 (2021), pp. 89. <https://doi.org/10.1140/epjb/s10051-021-00098-8>
- [9] M. Gaudiano and J. Revelli. On the role of structured initial conditions in the Schelling model. *Physica A: Statistical and Theoretical Physics* 587 (2021), 126476.
- [10] M. Gaudiano and J. Revelli. Entropic analysis of a hierarchically organized Axelrod model. Aceptado para publicación en *Chaos, Solitons & Fractals* (2025). arXiv:2502.03131. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2502.03131>.

LA LÓGICA DE LOS EXPERIMENTOS Y LA “EXPECTATIVA RAZONABLE”

Sergio Grillo

Instituto Balseiro - Centro Atómico Bariloche, Argentina
sergrill@gmail.com

Dado un experimento aleatorio “clásico” con espacio de eventos E , siendo este último un álgebra de Boole (que supondremos completa), existe una manera natural de construir el espacio de eventos del mismo experimento, repetido N veces (donde N es un cardinal numerable), el cual también resulta ser un álgebra de Boole (completa). Si, en cambio, consideramos un experimento más general, “no clásico”, como el asociado a un sistema físico cuántico, el espacio de eventos deja de ser un retículo distributivo y pasa a ser un retículo completo ortocomplementado. Además, en este caso, no es tan natural la construcción del espacio de eventos asociado al experimento repetido. En esta charla vamos a proponer una construcción para este último (para experimentos aleatorios generales y repetibles), y vamos a utilizar la misma para establecer un conjunto de axiomas que, a nuestro entender, debería satisfacer toda noción de “expectativa razonable”, o de “plausibilidad”, sobre el espacio de eventos del experimento original: los “axiomas de Cox no clásicos”.

UN MODELO DE DIFUSIÓN-PENALIZACIÓN APLICADO A LA DISPERSIÓN EN ALIMENTOS

Iván Mandelman

Facultad Regional Chubut - UTN, Puerto Madryn, Argentina
imandelman@mi.unc.edu.ar

Este trabajo presenta y analiza un modelo de difusión penalizada para describir la dispersión de un aditivo en un medio alimentario con dominio acotado. El modelo se enfoca en geometrías regulares donde el proceso puede simplificarse a solo una dimensión espacial: la lámina plana, el cilindro alargado y la esfera.

El modelo matemático se basa en la ecuación de difusión clásica a la que se le añade un término de penalización que representa físicamente mecanismos de absorción, o reacción irreversible, entre otros. La ecuación gobernante tiene la forma general (en coordenadas cilíndricas):

$$c_t = D \left(c_{rr} + \frac{c_r}{r} \right) - \mu c, \quad 0 < r < R, \quad t > 0,$$

$$c(r, 0) = c_0, \quad 0 < r < R,$$

$$c(R, t) = c_B, \quad t \geq 0,$$

donde $c : (0, R] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es la concentración del aditivo en el alimento, D es el coeficiente de difusión, $\mu \geq 0$ es el parámetro de penalización, c_0 es la concentración inicial y c_B es la concentración constante en la frontera. Se puede observar que un valor bajo de μ acerca el comportamiento al de la difusión pura clásica.

Una de las ventajas de esta formulación es la obtención de la solución analítica para la concentración c en cada una de las tres geometrías mencionadas [1]. Estas soluciones se expresan en forma de series infinitas, lo que constituye una ventaja significativa para el análisis y la predicción sin necesidad de recurrir a métodos numéricos.

Además, para facilitar la validación experimental se derivan las expresiones para la concentración total o media $c_T(t)$, integrando las soluciones analíticas sobre el dominio espacial:

$$c_T(t) = \frac{2}{R^2} \int_0^R c(r, t) r \, dr.$$

De esta manera, el modelo de Difusión-Penalización ofrece un marco teórico para describir procesos de transferencia de masa en alimentos donde la estructura del alimento impide la libre movilidad de los solutos. La disponibilidad de una solución analítica lo convierte en una herramienta valiosa para la optimización de procesos, el control de calidad o el diseño en la ingeniería de alimentos.

Trabajo en conjunto con Ferrari Mariano (Centro para el Estudio de Sistemas Marinos, CESIMAR-CONICET, Puerto Madryn, Argentina) y Dima Jimena (Instituto de Biología Marina, IBIOMAR-CONICET, Puerto Madryn, Argentina).

Referencias

- [1] Crank, J. The mathematics of diffusion. Oxford University Press (1979).

CUENCAS DE ATRACCIÓN Y SEPARATRICES EN MODELOS DE COMPETENCIA CON EFECTO ALLEE

Cristian Marín

Universidad Técnica Federico Santa María, Chile
cristian.marinl@usm.cl

En este trabajo se estudian modelos de competencia entre dos especies descritos por sistemas bidimensionales de ecuaciones diferenciales ordinarias, incorporando el efecto Allee en una o ambas especies. El objetivo principal es analizar cómo la presencia del efecto Allee influye en la dinámica de la competencia interespecífica, con especial énfasis en la estructura de las cuencas de atracción, la caracterización de las separatrices y el estudio de bifurcaciones. A través de este análisis, se busca comprender de qué manera los parámetros asociados al efecto Allee pueden afectar la estabilidad de los equilibrios y la persistencia o extinción de las especies, evaluando en particular si la presencia del efecto Allee favorece o perjudica la coexistencia entre los competidores.

Trabajo en conjunto con Pablo Aguirre (Universidad técnica Federico Santa María, Chile).

Referencias

- [1] Jang, S. R. J. On the Lotka–Volterra competition system with Allee effects. *Computational and Applied Mathematics* 32 (2013), 179—189. <https://doi.org/10.1007/s40314-013-0022-x>
- [2] Wang, G., Liang, X. G., & Wang, F. Z. The competitive dynamics of populations subject to an Allee effect. *Ecological Modelling* (2–3) 124 (1999), 183—192.
- [3] Chen, S., Chen, F., Srivastava, V., & Parshad, R. D. Dynamical analysis of a Lotka–Volterra competition model with both Allee and fear effects. *International Journal of Biomathematics* (8) 17 (2024), 2350077. <https://doi.org/10.1142/S1793524523500778>
- [4] Kuznetsov, Y. A. *Elements of Applied Bifurcation Theory* (2nd ed.). Springer, 1998.

ON THE REDUCTION OF HOMOGENEOUS PRESYMPLECTIC HAMILTONIAN SYSTEMS

Juan Carlos Marrero

Universidad de La Laguna (Tenerife, I Canarias, España), España
jcmarrer@ull.edu.es

In the first part of this talk, we will present some motivating examples, for Geometry and Physics, of homogeneous presymplectic Hamiltonian systems. These systems consist of the following objects: i) a principal $\mathbb{R}^\times$ -bundle with total space $\tilde{C}$ and base space C , where $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R}^+$ or $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; ii) a homogeneous presymplectic structure on $\tilde{C}$, which is the differential of a horizontal homogeneous 1-form on $\tilde{C}$ and iii) a homogeneous Hamiltonian function on $\tilde{C}$.

In the second part of the talk, we will prove that from a homogeneous presymplectic Hamiltonian system on $\tilde{C}$ one may construct a homogeneous presymplectic Hamiltonian system on C with values in a line bundle L over C . The solutions of this last system are not curves on C , but curves of derivations on L .

Then, in the last part of the talk, we will see that there exists a one-to-one correspondence between the solutions of both systems. In the particular case when the principal $\mathbb{R}^\times$ -bundle is trivial and the presymplectic structure on $\tilde{C}$ is non-degenerate then the previous construction is just the reduction of homogeneous symplectic Hamiltonian systems to contact Hamiltonian systems and we recover an old construction due to Arnold.

The results in the talk are contained in a paper (in progress) in collaboration with J. Fernandez and S. Grillo (Instituto Balseiro, Argentina), and E. Padron (ULL, Spain).

VIBRACIONES EN ENTRAMADOS PLANOS, SOLUCIÓN CON SERIES DE POTENCIAS UTILIZANDO LA VIGA DE TIMOSHENKO - ANÁLISIS TEÓRICO.

Héctor Martín

Facultad Regional Reconquista de la Universidad Tecnológica Nacional, Argentina
hectordmartin@gmail.com

En el presente documento se realiza un análisis dinámico de los entramados planos por medio de la teoría que incluye el efecto de la inercia rotatoria y de la deformación transversal por corte.

Se utiliza un pórtico en el que se calculan las frecuencias naturales de vibración.

Las hipótesis de la teoría que se utiliza en este trabajo fueron desarrolladas en la década de 1920 por Stephen Timoshenko, se trata de un modelo matemático que describe la vibración transversal de las vigas teniendo en cuenta el efecto de la deformación por corte.

El material del elemento cumple la ley de elasticidad de Hooke, es homogéneo, isotrópico y lineal elástico.

Estas hipótesis se aplican en los casos en que la sección de la viga es suficientemente ancha, o si el material del que está hecha es deformable cuando se corta.

Es por ello que se debe tomar en consideración el efecto debido al corte.

Se propone una solución al problema diferencial aplicando series de potencias enteras logrando expresiones de recurrencia que permiten obtener absolutamente todos los coeficientes de las series en función de los primeros coeficientes, reduciendo sustantivamente la cantidad de incógnitas del problema.

Trabajo en conjunto con Sebastián Fantini (Facultad Regional Reconquista UTN -GRUDIM - Grupo de Diseño Mecánico), Anna De Rosa (School of Engineering, Potenza, Italy), Maria Lippiello (Department of Structures for Engineering and Architecture, Naples, Italy) y Ernesto Aguirre (UTN - Facultad Regional Córdoba - Centro de Investigaciones en Ciencias de la Tierra - CONICET/UNC, Córdoba, Argentina).

Referencias

- [1] De Rosa M. A., Lippiello M., Armenio G., Biase G. De and Savalli S. Dynamic analogy between Timoshenko and Euler-Bernoulli beams. *Acta Mechanica* 231 (2020), 4819–4834.
- [2] Li X.F. A unified approach for analyzing static and dynamic behaviors of functionally graded Timoshenko and Euler-Bernoulli beams. *Journal of Sound and Vibration* (4-5) 318 (2008), 1210–1229.
- [3] Saffari S., Hashemian M., Toghraie D. Dynamic stability of functionally graded nanobeam based on nonlocal Timoshenko theory considering surface effects. *Physica B: Condensed Matter* 520 (2017), 97–105.
- [4] Ghorbanpour Arani A., Niknejad Sh. Dynamic Stability Analysis of Euler-Bernoulli and Timoshenko Beams Composed of Bi-Directional Functionally Graded Materials. *AUT J. Mech. Eng.* (2) 4 (2020), 201–214.
- [5] Martín, H. D., Maggi, C., Piovan, M. T., De Rosa, M. A. and Gutbrod, N. M. Natural vibrations and instability of plane frames: Exact analytical solutions using power series. *Applied Mathematical Modelling* 107 (2022), 229–248.
- [6] Negi, Y. K., Balakrishnan, N. and Rao, S. M. Fast power series solution of large 3-D electrodynamic integral equations for PEC scatterers. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* (12) 69 (2021), 8585–8595.
- [7] Zhao, Y., Zhang, H. and Wang, Y. Reliability analysis of structural systems using series–parallel system theory and improved importance sampling. *Buildings* (3) 13 (2023), 796.
- [8] Martín, H. D., Maggi, C., Piovan, M. T., De Rosa, M. A. and Gutbrod, N. M. Exact analytical calculation of natural frequencies and buckling loads of plane frames using power series. *Engineering Structures* 262 (2022), 114349.
- [9] Lippiello M., De Rosa M. A., Ceraldi C., Martin H., Onorato A., Piovan M. T. The influence of mass on dynamic response of cracked Timoshenko beam with restrained end conditions: the truncated theory. *Applied Mechanics* (1) 6 (2025), 11.
- [10] Martín H. D., De Rosa M. A., Peresón M., Fantini S. “Método intuitivo para el cálculo de entramados planos con reducción en la cantidad de incógnitas”. XVI Congreso iberoamericano de ingeniería mecánica - CIBIM 24. Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Concepción, Chile, del 22 al 24 de octubre 2024.

MEAN-FIELD LIMITS OF NON-EXCHANGEABLE INTERACTING DIFFUSIONS ON CO-EVOLUTIONARY NETWORKS

David Poyato

Universidad de Granada , España
davidpoyato@ugr.es

Multi-agent systems are ubiquitous in Science, and they can be regarded as large systems of interacting particles with the ability to generate large-scale self-organized structures from simple local interactions rules between each agent and its neighbors. Since the size of the system is typically huge, an important question is to connect the microscopic and macroscopic scales in terms of mean-field limits, which is a fundamental problem in Physics and Mathematics closely related to Hilbert Sixth Problem. In most real-life applications, the communication between agents is not based on uniform all-to-all couplings, but on highly heterogeneous connections, and this makes agents distinguishable. However, the classical strategies based on mean-field limits are strongly based on the crucial assumption that agents are indistinguishable, and it therefore does not apply to our distinguishable setting, so that we need substantially new ideas.

In this talk I will present a recent work about the rigorous derivation of the mean-field limit for systems of interacting diffusions on co-evolutionary networks. While previous research has primarily addressed continuum limits or systems with linear weight dynamics, our work overcomes these restrictions. The main challenge arises from the coupling between the network weight dynamics and the agents' states, which results in a non-Markovian dynamics where the system's future depends on its entire history. Consequently, the mean-field limit is not described by a partial differential equation, but by a system of non-Markovian stochastic integrodifferential equations. A second difficulty stems from the non-linear weight dynamics, which requires a careful choice for the limiting network structure. Due to the limitations of the classical theory of dense graph limits (Lovász and Szegedy, 2006) in handling non-linearities, we employ K-graphons (Lovász and Szegedy, 2010), also termed probability-graphons (Abraham, Delmas, and Weibel, 2025). This framework provides a natural topology that is compatible with such non-linearities.

UN FORMALISMO HAMILTONIANO PARA PROBLEMAS VARIACIONALES GENERALES

Guadalupe Quijón

Universidad Nacional del Sur, Departamento de Matemática, Argentina
guadalupequijon@gmail.com

Se presentará una generalización de la construcción de la teoría de campo hamiltoniana (multisimpléctica) para una densidad Lagrangiana. Este enfoque permite formular teorías de campo asociadas a problemas variacionales de naturaleza más general que los derivados de un problema variacional clásico.

Uno de los principales obstáculos al intentar dicha generalización radica en que la formulación habitual de la teoría hamiltoniana de campos, obtenida a partir de la formulación lagrangiana, depende de construcciones geométricas específicas asociadas a las estructuras del fibrado de jets. En particular, la definición de la forma hamiltoniana, de la cual se derivan las ecuaciones de Hamilton, requiere de la noción de sección hamiltoniana, la cual no siempre está disponible en problemas variacionales generales.

Se expondrá, entonces, una construcción de la forma hamiltoniana habitual directamente desde el formalismo unificado, sin necesidad de recurrir a secciones hamiltonianas. De este modo, se obtiene una extensión natural del procedimiento a problemas variacionales generales, lo que permite establecer una versión hamiltoniana para ellos.

Finalmente, se ilustrará la aplicación de este formalismo para la descripción de la gravedad con bases.

Trabajo en conjunto con Santiago Capriotti (Instituto de Matemática (INMABB), Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur, CONICET, Bahía Blanca, Argentina).

Referencias

- [1] G. Quijón, S. Capriotti. A Hamiltonian formalism for general variational problems, with applications to first order gravity with basis. Preprint (2024). ArXiv:2407.03991.
- [2] S. Capriotti. Differential geometry, Palatini gravity and reduction. Journal of Mathematical Physics (1) 55 (20145), 012902.
- [3] A. Echeverría-Enríquez, C. López, J. Marín-Solano, M. C. Muñoz-Lecanda, and N. Román-Roy. Lagrangian-Hamiltonian unified formalism for field theory. Journal of Mathematical Physics 45 (2024).
- [4] Mark J. Gotay. An Exterior Differential Systems Approach to the Cartan Form, 1991.

APLICACIÓN DE TÉCNICAS DE DESCOMPOSICIÓN EN MODOS EN LA REGULARIZACIÓN DE FUENTES EN ECUACIONES DE TRANSPORTE

Diana Rubio

Universidad Nacional de San Martín, ITECA (Unsam-Conicet), ECyT, CEDEMA, Argentina
drubio@unsam.edu.ar

La estimación de fuentes en sistemas de transporte modelados por ecuaciones diferenciales parabólicas es un problema inverso mal planteado en el sentido de Hadamard [1], ya que la solución no depende de manera continua de los datos [2]. En esta presentación se propone estudiar la regularización de fuentes en problemas de transporte utilizando métodos de descomposición en modos, tales como la Descomposición Empírica en Modos Bidimensional (BEMD) [3,4,5], que como su nombre lo indica, es un método empírico, y la Descomposición Variacional en Modos Bidimensional (2D-VMD) [6], que tiene un fundamento matemático sólido. Ambas estrategias se adaptan localmente a las características de la función, captando su estructura en múltiples escalas. El desafío consiste en determinar cuántos modos deben descartarse, de forma tal que la suma de los modos remanentes proporcione una estimación regularizada de la fuente. La bondad del ajuste se evalúa aplicando los diferentes métodos a casos previamente estudiados, en los que se utilizaron operadores de regularización uniparamétricos bidimensionales [2,7]. Dichas técnicas de regularización demostraron ser eficaces para la estimación de fuentes a partir de datos ruidosos provenientes de procesos de transporte de calor, masa o información modelados mediante una ecuación diferencial lineal parabólica. Se comparan los resultados obtenidos mediante los métodos propuestos con los obtenidos en los enfoques previos, considerando ejemplos con fuentes diferenciables y no diferenciables. Se evalúan los errores de estimación tanto a nivel global, utilizando normas, como a nivel local.

Trabajo en conjunto con Marcela Morvidone (Universidad Nacional de San Martín, ITECA (Unsam-Conicet), ECyT, CEDEMA, Argentina), Guillermo F. Umbricht (CONICET, Univ. Austral, Fac. de Ingeniería, LIDTUA, Argentina) y Rosa Piotrkowski (Universidad Nacional de San Martín, ITECA (Unsam-Conicet), ECyT, CEDEMA, Universidad de Buenos Aires, Fac. de Ingeniería, Argentina).

Referencias

- [1] Hadamard J. Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations, volumen 171. The Mathematical Gazette, 1924.
- [2] Umbricht G.F. y Rubio D. Regularization techniques for estimating the space-dependent source in an n-dimensional linear parabolic equation using space-dependent noisy data. Computers & Mathematics with Applications 172 (2024), 47–69. ISSN 0898-1221.
- [3] Morvidone M.A., Masci I., Rubio A.D., Kurtz M.L.A., Tasat D.R., y Piotrkowski R. Particle size and morphological evaluation of airborne urban dust particles by scanning electron microscopy and bidimensional empirical mode analysis. WSEAS Transactions on Environment and Development 20 (2024), 504-0–513.
- [4] Rubio D., Sassano N., Morvidone M., y Piotrkowski R. Application of bidimensional empirical mode decomposition for particle identification and size determination. International Journal of Applied Mathematics, Computational Science and Systems Engineering 6 (2024), 186–192.
- [5] Rubio D., Umbricht G.F., Morvidone M. y Piotrkowski R., Un método para el suavizado de fuentes inestables basado en BEMD, MACI 10 (2025), 655–658. ISSN 2314-3282.
- [6] Dragomiretskiy K., Zosso D. Two-Dimensional Variational Mode Decomposition. In: Tai, X.C., Bae, E., Chan, T.F., Lysaker, M. (eds) Energy Minimization Methods in Computer Vision and Pattern Recognition. EMMCVPR 2015. Lecture Notes in Computer Science vol 8932. Springer, Cham, 2015.
- [7] Umbricht G.F. Identification of the source for full parabolic equations. Mathematical Modelling and Analysis (3) 26 (2021), 339–357. ISSN 1392-6292/1648-3510.

ESTUDIO DE LAS ÓRBITAS PERIÓDICAS DE UN PÉNDULO ROTANTE POR EL MÉTODO DE CONTINUACIÓN DE LERAY-SCHAUDER Y TEORÍA DE LA BIFURCACIÓN

Samir Safadi

Universidad Nacional de Río Cuarto, Argentina
samirsafadi4@gmail.com

El estudio de los sistemas dinámicos no lineales constituye un tema de gran interés en física teórica y matemática. En particular, la búsqueda de soluciones periódicas a los problemas de contorno que describen el comportamiento de estos sistemas es un objeto de estudio tradicional en estas áreas. En este trabajo se propone estudiar las soluciones periódicas del péndulo rotante, un problema que puede ser abordado con la teoría debida a Leray y Schauder [1] para la continuación global de los ceros de una función, así como la teoría de la bifurcación [2].

La teoría de continuaciones constituye una herramienta útil en este sentido porque, a menudo, el problema de hallar soluciones periódicas de un problema de contorno no lineal puede ser reformulado como el problema de estudiar el conjunto de ceros de cierta función. En el presente trabajo se demostró una tal equivalencia, reformulando nuestro problema original como el problema de hallar el conjunto de ceros $\mathcal{Z}$ de una $F(\xi, a)$, dependiente de los parámetros de amplitud de rotación $a \in \mathbb{R}^+$ y posición inicial $\xi \in [-\pi, \pi]$, siendo conocida la existencia de un conjunto solución para $a = 0$ (caso del péndulo simple, para el cual toda solución es periódica). La teoría mencionada afirma que, bajo ciertas hipótesis sobre este conjunto $\mathcal{Z}$, fuertemente ligadas a los índices de Brouwer de sus elementos, estos pueden ser continuados en un sentido preciso a valores no nulos de a . Se demostró que el conjunto de interés cumple las hipótesis del teorema. Esto permite continuar las soluciones conocidas del péndulo simple al caso más general del péndulo rotante sobre un cierto dominio en el plano $\xi - a$. También se estudió las posibles colisiones de estas familias de soluciones con el continuo trivial en $\xi = 0$.

En una segunda instancia, se estudió las bifurcaciones desde dicho continuo trivial en $\xi = 0$, que representa un equilibrio estable del sistema. Los puntos de bifurcación de la ecuación $F(\xi, a)$ resultan estar asociados a los autovalores de un problema de Sturm-Liouville y fueron calculados numéricamente con un método de shooting. La imparidad de F_N como función de ξ sugiere la presencia de bifurcaciones tipo Pitchfork en estos puntos, y en la búsqueda de las mismas se halló una posible falla de una de las condiciones de transversalidad que las define. Sin embargo se logró construir una variante más general de la bifurcación tipo Pitchfork y probar que la ecuación presenta bifurcaciones de este tipo. Por otra parte, se demostró que no bifurcan soluciones desde las rectas $\xi = \pm\pi$, que representan los equilibrios inestables.

Se obtuvo numéricamente el diagrama de bifurcación para distintos períodos, que constituye la familia de curvas que identificamos con las soluciones periódicas de interés. Estas no son sino las curvas de nivel cero de la función $F = F(\xi, a)$, y se graficaron usando un script de Python que permite la integración numérica en paralelo de la ecuación de movimiento sobre una malla de valores para los parámetros ξ y a . Los continuos que emanan del conjunto de ceros sobre la recta $a = 0$ evidencian la continuación predicha por el teorema de Leray-Schauder. También se observan las ramas no triviales que bifurcan del continuo $\xi = 0$ desde los puntos de bifurcación predichos, así como la ausencia de colisiones con los continuos $\xi = \pm\pi$.

Trabajo en conjunto con Fernando Mazzone (Universidad Nacional de Río Cuarto).

Referencias

- [1] Ambrosetti, A., Arcoya, D. An Introduction to Nonlinear Functional Analysis and Elliptic Problems. Birkhäuser, 2011.
- [2] Rivera Acevedo, A. M. et al. Bifurcación de soluciones periódicas en el problema de Sitnikov. Universidad de Granada, 2012.

ANÁLISIS TEÓRICO DE UN PROBLEMA BIDIMENSIONAL MULTICAPA DE CONVECCIÓN-DIFUSIÓN-REACCIÓN CON FUENTE

Guillermo Federico Umbricht

Universidad Austral, Argentina

guilleungs@yahoo.com.ar

Este trabajo presenta un estudio teórico y computacional exhaustivo sobre la transferencia de calor transitoria en un medio compuesto bidimensional multicapa. El modelo físico incorpora difusión, advección, generación o absorción interna de calor proporcional a la temperatura, y fuentes de calor impuestas externamente. Una característica distintiva de la formulación es la consideración explícita de la resistencia térmica interfacial, lo que permite discontinuidades en la temperatura a través de la interfaz entre dos capas consecutivas, un fenómeno que a menudo se omite en modelos simplificados de sistemas multicapa.

Se estableció un marco analítico mediante una reformulación adimensional del problema, seguida de la aplicación de técnicas clásicas de solución como separación de variables, expansiones en series de Fourier y principios de superposición. Las soluciones en forma cerrada obtenidas son válidas para casos generales de configuraciones multicapa con resistencia interfacial y términos fuente variables. A pesar de su complejidad matemática, estas soluciones representan una contribución significativa, ya que generalizan resultados previos y se reducen a expresiones conocidas cuando se omiten la resistencia interfacial y los términos fuente. Además, la disponibilidad de soluciones exactas proporciona una base rigurosa para la validación de métodos numéricos y para el diseño de aproximaciones adaptadas a configuraciones más específicas.

Los resultados analíticos ofrecen no solo una comprensión teórica, sino también una utilidad práctica. Debido a que las expresiones en forma cerrada incorporan explícitamente las propiedades del material, la resistencia interfacial y las condiciones de frontera externas, permiten realizar análisis paramétricos sistemáticos sin necesidad de simulaciones numéricas repetidas. Esto facilita la optimización de espesores de capas, combinaciones de materiales o características de la interfaz en aplicaciones como recubrimientos térmicos, empaquetado electrónico y sistemas de aislamiento multicapa, donde la gestión eficiente del calor es crucial.

Complementando el marco teórico, se desarrolló un método numérico de diferencias finitas de segundo orden de precisión para aproximar el problema transitorio. El método emplea un esquema progresivo en el tiempo y diferencias centradas o direccionales en el espacio, con adaptaciones específicas para capturar eficazmente las discontinuidades en la interfaz y las condiciones de frontera. La estabilidad y la convergencia se garantizaron mediante criterios establecidos en la literatura de análisis numérico. Los experimentos numéricos confirmaron que el método reproduce con éxito los principales fenómenos físicos, incluyendo la acumulación de temperatura debido a fuentes externas, la influencia de la heterogeneidad del material en la propagación del calor, y los gradientes pronunciados inducidos por la resistencia interfacial.

En conclusión, este estudio proporciona tanto un referente analítico como un enfoque numérico confiable para modelar problemas de transferencia de calor bidimensional en medios multicapa con resistencia interfacial y fuentes volumétricas. La metodología sirve como base para desarrollos más avanzados, incluyendo análisis inversos para la identificación de parámetros, implementaciones computacionales paralelas, y la extensión a materiales con propiedades dependientes de la temperatura.

Trabajo en conjunto con Diana Rubio (Instituto de Tecnologías Emergentes y Ciencias Aplicadas (ITECA), UNSAM-CONICET, Escuela de Ciencia y Tecnología, Centro de Matemática Aplicada (CEDEMA), Universidad Nacional de San Martín) y Domingo Tarzia (Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina - Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Empresariales, Universidad Austral, Rosario, Argentina).

APLICACIÓN DE UNA GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE INTEGRACIÓN RELATIVISTA DE VELOCIDADES A CASOS DE LESIONES POR SINIESTROS DE TRABAJO Y FERROVIALES DE LA EX FERROCARRILES ARGENTINOS

Eduardo Daniel Vázquez

Instituto de Investigaciones de Tecnología y Educación (IITE) Centro Asociado a la Comisión de Investigaciones Científicas de la provincia de Buenos Aires (CIC)
Facultad de Ingeniería - Universidad Nacional de Lomas de Zamora, Argentina
evazquez@amcisys.com.ar

Se trató de hallar una formulación más general del teorema de integración relativista de las velocidades, con el objetivo de lograr, en una sola ecuación matemática, la integración de más de dos parámetros, lo que el teorema relativista no obtiene sino a través de iteraciones. Las modificaciones introducidas en el algoritmo einsteniano se basaron en la reformulación del máximo, que en el original está constituido por la velocidad de la luz en el vacío, y en el modo de obtención del coeficiente del denominador, para lograr la integración de dos o más parámetros, de modo tal que, sin importar su número, sus resultados sean consistentes. Se sometió a la ecuación así reformulada, una serie de 13500 casos judicializados de sujetos con incapacidades físicas debidas a lesiones corporales, pertenecientes a la planta permanente de la ex Ferrocarriles Argentinos, comparando los resultados de nuestro cálculo matemático de incapacidades con los porcentajes que asignaran a cada caso los peritos médicos de lista del Poder Judicial, basados en el uso de baremos o tablas de valoración de incapacidades.

Los resultados mostraron una ecuación coherente aplicable al cálculo matemático de las incapacidades, en los campos de la medicina, del derecho, de la seguridad social y del seguro y, en el caso particular del estudio comparativo, demostraron la tendencia a la sobrevaloración de las incapacidades al utilizarse el procedimiento basado en baremos.

PALABRAS CLAVE: integración, relativista, incapacidad, lesiones, daños corporales.

Ecuaciones Diferenciales y aplicaciones

ESTUDIO DE MODELOS APLICADOS A DINÁMICAS DE CONFLICTO SOCIAL

Carlos Héctor Daniel Alliera

Universidad Nacional Arturo Jauretche - Universidad de Buenos Aires, Argentina
chdalliera@yahoo.com.ar

Los modelos de ecuaciones diferenciales son herramientas fundamentales en el análisis de procesos sociales complejos, ya que permiten describir cómo evolucionan las variables sociales en el tiempo a partir de relaciones cuantificables. En contextos como la difusión de ideas, conflictos sociales o la propagación de fenómenos colectivos, estas ecuaciones capturan dinámicas no lineales, puntos de equilibrio, fluctuaciones y posibles escenarios de cambio.

Oscar Varsavsky [1] fue uno de los primeros intelectuales que impulsó la elaboración de modelos matemáticos específicamente concebidos para las ciencias sociales. Fue pionero en Argentina y América Latina en articular fórmulas numéricas como medios para analizar políticas alternativas y proyectos nacionales. En este trabajo proponemos desarrollar algunas técnicas como por ejemplo Teoría de grado Topológico [2], o métodos de teoría de control [5] (para delinear políticas que cambien escenarios futuros) y considerar sistemas con retardo [6] a los efectos de analizar la estabilidad de soluciones.

Escenarios que comprenden conflictividad social, situaciones de shock económico, efecto de la dependencia externa (deuda externa, por caso) sobre salud y educación o incluso modelos que comprenden la dinámica criminal o de inseguridad han sido estudiadas (ver [3]). Además de mostrar ejemplos, proponemos mostrar un modelo del tipo

$$\begin{cases} \frac{dP_1}{dt} = P_1 f_1(P_1) - \beta P_1 P_2 + \gamma_1 P_1 E(t - \tau_0) - \mu_1 P_1^2, \\ \frac{dP_2}{dt} = P_2 f_2(P_2) - \omega P_1 P_2 + \gamma_2 P_2 E(t - \tau_1), \\ \frac{dE}{dt} = \alpha(E_0 - E(t)) + \phi \min\{P_2, P_1\} - \psi P_1 P_2 - \kappa E, \end{cases} \quad (1)$$

donde se aprecian las dinámicas de la población “acomodada” (P_1), la población vulnerable (P_2) y el peso de las medidas estatales mediadoras (E). Este estudio pretende observar el comportamiento de las soluciones (al estilo [4]) en un período determinado a los efectos de predecir un escenario futuro a tiempo T . Los retardos representan el tiempo que tardan las medidas gubernamentales en impactar sobre las poblaciones, las funciones f_k son decrecientes, acotadas, con un único cero en $[0, T]$.

Los parámetros del sistema representan γ_k : Beneficio de la mediación estatal retardada a cada población, β, ω : Interacción entre las poblaciones, μ_1 costo de mantenimiento del poder, ψ el desgaste por polarización y κ es el nivel de ineficiencia estatal (corrupción, burocracia, etc., ψ representa el grado de incentivo a mediar entre ambos sectores y $\alpha(E_0 - E(t))$ es la recuperación hacia capacidad institucional máxima (E_0).

Trabajo en conjunto con Andrés Rivera (Pontificia Universidad Javeriana, Departamento de Ciencias Naturales y Matemáticas - Facultad de Ingeniería y Ciencias).

Referencias

- [1] O. Varsavsky, Ciencia, política y cientificismo. Buenos Aires: Centro Editor de América Latina (1969).
- [2] P. Amster, C. Alliera, Delay equations: Analysis of a model with feedback using topological degree, *Matemática Aplicada, Computacional e Industrial*, Vol 5 (2015), 89–91.

- [3] A. Matsumoto, F. Szidarovszky, Delay Differential Nonlinear Economic Models, Nonlinear Dynamics in Economics, Finance and Social Sciences. Springer, Berlin, Heidelberg, (2010).
- [4] S. Ruan, J. Wei, On the zeros of trascendental functions with applications to stability of delay differential equations with two delays, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series A: Mathematical Analysis, 10 (2003), 863–874.
- [5] S.G. Johnson, Notes on Adjoint Methods 18366, J Introduction to Numerical Methods.
- [6] K. Gu, S.I. Niculescu, J. Chen, On stability crossing curves for general systems with two delays, J. Math. Anal. Appl. 311 (2005), 231—253.

SOLUCIONES ESTACIONARIAS Y DINÁMICAS DE EDP EN CRISTALES LÍQUIDOS NEMÁTICOS

Rocío Balderrama

Universidad de Buenos Aires - IMAS, Argentina
rbalde@dm.uba.ar

En este trabajo estudiamos un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales parciales que modela la propagación e interacción de haces láser en cristales líquidos nemáticos. Este modelo combina una ecuación tipo Schrödinger no lineal de dos dimensiones, que describe la evolución de cada haz, con una ecuación elíptica para la respuesta del material. Analizamos la formulación variacional del problema estacionario y establecemos resultados de existencia y unicidad de soluciones, así como la conservación de cantidades físicas relevantes (potencia y Hamiltoniano) en la dinámica evolutiva. En particular, probamos la existencia de un umbral que separa los regímenes de existencia y no-existencia de soluciones estacionarias, generalizando resultados previos al caso de múltiples haces. También caracterizamos la invariancia bajo simetrías radiales y de vórtice, y discutimos la estabilidad de las soluciones correspondientes. Finalmente, complementamos estos resultados con simulaciones numéricas que ilustran la dinámica y validan los escenarios analíticos considerados.

Trabajo en conjunto con Constanza Sánchez de la Vega y Diego Rial (Universidad de Buenos Aires, Argentina).

CONSTANTES PERIÓDICAS E ISOCRONÍA DE CENTROS: UN ENFOQUE FRECUENCIAL

Cinthya Anabel Bares

Instituto de Inv. en Ing. Eléctrica IIIE (UNS-CONICET)-Depto. de Matemática, UNS, Argentina
cinthyabareshuici@gmail.com

El comportamiento de sistemas dinámicos no lineales en las cercanías de una bifurcación de Hopf se puede caracterizar con expresiones explícitas para los coeficientes de estabilidad (también conocidos como constantes de Lyapunov) y las constantes periódicas. Existe una fuerte relación entre las constantes periódicas y los coeficientes frecuenciales [1], propiedad que se utiliza para determinar las condiciones de isocronía en centros ([2] y [3]).

En este trabajo se utiliza un método en frecuencia inspirado en la teoría de control, aplicando el algoritmo propuesto en [4] para obtener las expresiones explícitas de los coeficientes frecuenciales. Estos resultados constituyen el primer paso para identificar las condiciones bajo las cuales estos coeficientes se anulan, y a la vez anulan las constantes periódicas, lo que permite caracterizar a los centros como isocrónicos. Como ejemplo principal, se considera el sistema de Loud ([2] y [5]):

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + Bxy, \\ \dot{y} = x + Dx^2 + Fy^2, \end{cases}$$

el cual es un caso particular del sistema clásico de Bautin. En [2] se analiza cómo ciertos pares de parámetros o puntos (D, F) determinan centros isócronos, mientras que otros definen los denominados puntos de Loud (indicados como L_1 , L_2 y L_3 más adelante). La distinción entre estos puntos $L_1 = (-\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$, $L_2 = (-\frac{11+\sqrt{105}}{20}, \frac{15-\sqrt{105}}{20})$, $L_3 = (-\frac{11-\sqrt{105}}{20}, \frac{15+\sqrt{105}}{20})$ y los puntos $l_1 = (0, 1)$, $l_2 = (-\frac{1}{2}, 2)$, $l_3 = (0, \frac{1}{4})$, $l_4 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ radica en su papel en la estructura del sistema y su relación con las constantes periódicas. Por un lado, los puntos L_i , $1 \leq i \leq 3$, corresponden a casos donde solo se anulan las dos primeras constantes periódicas, dando lugar a centros débiles de orden dos. Por otra parte, los l_j , $1 \leq j \leq 4$, representan casos donde se anulan las tres primeras constantes periódicas, lo que caracteriza centros isócronos.

Resulta interesante observar que utilizando el método en frecuencia también se pueden obtener expresiones equivalentes que conducen a los mismos puntos mencionados, caracterizando de igual forma el comportamiento de la bifurcación. Estos resultados no solo reafirman la potencia del enfoque frecuencial para el estudio de centros y bifurcaciones de Hopf, sino que también revelan con notable claridad la estructura subyacente del sistema. La correspondencia entre los coeficientes frecuenciales y las constantes periódicas ofrece una vía precisa para explorar fenómenos sutiles como la isocronía, abriendo nuevas perspectivas en la comprensión cualitativa de la dinámica no lineal.

Trabajo en conjunto con Jorge L. Moiola y Guillermo L. Calandrini (Instituto de Inv. en Ing. Eléctrica IIIIE (UNS-CONICET)-Depto. de Ing. Eléctrica y de Computadoras, UNS).

Referencias

- [1] C. Bares, F. Gentile, J. Moiola, G. Calandrini, Period constants and Hopf bifurcation, *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, en imprenta, Julio 2025.
- [2] C. Chicone, M. Jacobs, Bifurcation of critical periods for plane vector fields, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 312 no. 2 (1989), 433–486.
- [3] A. Gasull, A. Guillamon, V. Mañosa, An explicit expression of the first Lyapunov and period constants with applications, *Journal of Math. Analysis and Appls.*, 211 (1997), 190–212.
- [4] A. Mees, L. Chua, The Hopf bifurcation theorem and its applications to nonlinear oscillations in circuits and systems, *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, 26, no. 4 (1979), 235–254.
- [5] P. Mardešić, D. Marín, J. Villadelprat, The period function of reversible quadratic centers, *J. Diff. Eq.*, 224 (2006), 120–171.

SUPERCONDUCTIVIDAD VS. NEMATICIDAD: LA ECUACIÓN NEMÁTICA DE GINZBURG-LANDAU.

Juan Pablo Borgna

ICIFI (CONICET-UNSAM), Centro de Matemática Aplicada (UNSAM), Argentina
jpborgna@unsam.edu.ar

Presentamos la obtención de un sistema de ecuaciones diferenciales, al que denominamos *Ecuación Nemática de Ginzburg Landau*, que modela la respuesta de un medio superconductor de cristales líquidos nemáticos ante la presencia de un campo magnético externo.

Basándonos en la expresión de la energía libre de Helmholtz, en un régimen de G-L como el descrito en [1], derivamos un sistema acoplado de ecuaciones del tipo G-L, cuyas variables son el parámetro de orden superconductor, el parámetro de orden nemático y el campo magnético resultante. Después de normalizar las variables y reducir sus expresiones, obtenemos el siguiente sistema acoplado de ecuaciones diferenciales del tipo G-L:

$$\begin{cases} A'' = f^2 A \\ \kappa_s^{-2} f'' = f (A^2 + f^2 - 1 + \nu \beta g^2) \\ \kappa_n^{-2} g'' = g \left(\frac{4\pi^2 \xi_n^2}{d^2} + g^2 - 1 + \frac{\nu}{\beta} f^2 \right). \end{cases} \quad (1)$$

Siendo $f(x)$ la densidad de pares de Cooper responsables de la superconductividad, $g(x)$ la densidad de moléculas nemáticas ordenadas y $A(x)$ la intensidad del potencial vector magnético del campo resultante. El sistema (1) extiende al caso nemático el sistema de G-L superconductor puro estudiado en [2].

En nuestro análisis, hacemos foco en la existencia de un umbral de Fréedericksz (en el sentido de lo hecho en [3]) para la densidad nemática $g(x)$ en relación con el ancho d del medio y a la longitud de coherencia nemática ξ_n . Por otro lado, analizamos numéricamente la interacción competitiva entre la densidad superconductora $f(x)$ y la densidad nemática $g(x)$ (ver [4] y [5]), lo que interpretamos en el sentido que la energía inicial del sistema se distribuye entre ordenar las moléculas nemáticas y generar los pares de Cooper, responsables de la respuesta superconductora del material.

Trabajo en conjunto con Mariano Fernando De Leo (INMABB CONICET-UNS, Bahía Blanca, Argentina), Cristian Huenchul (INMABB CONICET-UNS, Bahía Blanca, Argentina) y Diego Fernando García Ovalle (Université de Sherbrooke, Canada).

Referencias

- [1] D.G. Barci, R.V. Clarim, N.L. Silva Junior, Vortex and disclination structures in a nematic-superconductor state, *Phys. Rev. B* 94 (2016), 184507.
- [2] A. Aftalion, Bifurcation Problem to Ginzburg-Landau Equations and Applications to Bose-Einstein Condensates, chapter of H. Brezis, T. Li, Ginzburg-Landau Vortices, Series in Contemporary Applied Mathematics CAM 5, Word Scientifics (2005).
- [3] D. García Ovalle, J.P. Borgna, M.F. De Leo, Freédericksz transition on a phenomenological model for a nematic inhomogeneous superfluid in present of an electric field, *Physica D Nonlinear Phenomena*, 414 (2020), 132705.
- [4] M.F. De Leo, J.P. Borgna, D. García Ovalle, On the existence of nematic-superconducting states in the Grinzburg-Landau regime. *Chaos, Solitons and Fractals*, 179 (2024), 114439.
- [5] M.F. De Leo, J.P. Borgna, C. Huenchul, Non trivial solutions for a system of coupled Ginzburg-Landau equations. *Applied Numerical Mathematics*, 208 (2025), 271–289.

EFECTO REGULARIZANTE PARA ECUACIONES DEL CALOR NO LOCALES: HIPERCONTRACTIVIDAD Y DESIGUALDADES LOG-SOBOLEV

Arturo de Pablo

Universidad Carlos III de Madrid, España
arturop@math.uc3m.es

Una característica típica de los problemas parabólicos es que la solución es mejor que el dato inicial. En esta charla revisamos varios problemas no locales del tipo de la ecuación del calor, en los que esta propiedad adopta diferentes formas, dando lugar a los distintos conceptos de contractividad, ultracontractividad e hipercontractividad. A continuación presentamos un trabajo reciente en el que demostramos la equivalencia entre la hipercontractividad y una familia de desigualdades de Sobolev de tipo logarítmico. Nuestro interés radica en aplicar esta equivalencia para abordar operadores no locales no invariantes bajo traslaciones, para los que no es posible aplicar la transformada de Fourier.

Trabajo en conjunto con David Ch.W. Lee (University of Technology Sydney, Australia), Jorge Ruiz-Cases (Universidad Autónoma de Madrid, España) y Fernando Quirós (Universidad Autónoma de Madrid, España).

Referencias

- [1] D. Ch.W. Lee, A. de Pablo, F. Quirós, J. Ruiz-Cases, Strong hypercontractivity, logarithmic Sobolev inequalities and applications. Preprint.
- [2] C. Brändle, A. de Pablo, Nonlocal heat equations: regularizing effect, decay estimates and Nash inequalities, *Commun. Pure Appl. Anal.* 17, 3 (2018), 1161—1178.
- [3] E. Nelson, The free Markoff field, *J. Functional Analysis* 12 (1973), 211—227.

SINCRONIZACIÓN EN GRAFOS ALEATORIOS GEOMÉTRICOS

Cecilia De Vita

Universidad de Buenos Aires, Argentina
cdevita@dm.uba.ar

El modelo de Kuramoto es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que describe el comportamiento de osciladores acoplados. En nuestro trabajo, consideramos casos en los que el acoplamiento se da mediante un grafo aleatorio geométrico definido en un cierto dominio. Nos preguntamos si es posible garantizar la sincronización global (es decir, si para casi cualquier condición inicial el sistema converge a un estado en el que todas las fases coinciden) o si existen otros equilibrios estables. Cuando el dominio es la circunferencia unitaria, demostramos la existencia de al menos un mínimo local del funcional de energía de Kuramoto para cada 'winding number', con alta probabilidad ([1]). Estos estados están en correspondencia con los 'twisted states' explícitos encontrados en grafos ciclo, aunque en este caso sin una fórmula explícita. Por otro lado,

cuando el dominio es la esfera, mediante argumentos de proximidad con la ecuación del calor, probamos que el sistema se sincroniza globalmente con alta probabilidad para condiciones iniciales suaves ([2]).

Trabajo en conjunto con Julián Fernández Bonder, Pablo Groisman (Universidad de Buenos Aires, Argentina) y Ruojun Huang (Universität Münster, Alemania).

Referencias

- [1] C. De Vita, J. Fernández Bonder, P. Groisman, The energy landscape of the Kuramoto model in one-dimensional random geometric graphs in a circle, *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, Vol. 24, No. 1 (2025), 1—15.
- [2] C. De Vita, P. Groisman, R. Huang, Phase Synchronization in Random Geometric Graphs on the 2D Sphere, *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, to appear.

A SCHIFFER-TYPE PROBLEM FOR ANNULAR DOMAINS

Antonio J. Fernández

Universidad Autónoma de Madrid, España
antonioj.fernandez@uam.es

The so-called Schiffer conjecture can be stated as follows: *If a nonconstant Neumann eigenfunction of the Laplacian on a smooth bounded domain is constant on the boundary, then the domain is a ball.* In this talk we will consider two slightly relaxed versions of this conjecture, and provide suitable counterexamples to them. Specifically, we will consider annular type domains on the plane, and spherical cap type domains on the 2-sphere. The proofs rely on a local bifurcation argument. We combine the use of anisotropic Hölder spaces for the functional setting with computer-assisted techniques to check the bifurcation conditions. The talk is based on joint works with A. Enciso, D. Ruiz and P. Sicbaldi (planar case), and with G. Cao-Labora (2-sphere case).

UN RESULTADO DE NO EXISTENCIA PARA EL PROBLEMA DE LA MEMBRANA REFORZADA

Julián Fernández Bonder

Instituto de Cálculo, UBA-CONICET y Departamento de Matemática, FCEN-UBA., Argentina
jfbonder@dm.uba.ar

En esta charla presentaré el problema de optimización para la membrana reforzada que fuera introducido por J.L. Lions a fines de 1960 y consiste en resolver el problema

$$F(E) \mapsto \min, \quad E \subset \Omega, \quad |E| = \beta,$$

donde $F(E) = \int_{\Omega} f u_E \, dx$ es el trabajo realizado por la carga f y $u_E \in H_0^1(\Omega)$ es la solución de la ecuación de estado

$$-\Delta u_E + \chi_E u_E = f \quad \text{en } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{en } \partial\Omega.$$

Luego de mostrar algunos resultados de existencia debidos a Henrot y Maillot de principios de los 2000, exhibiré unos resultados de no existencia para este problema que obtuve conjuntamente con Zhiwei Cheng y Hayk Mikayelyan recientemente.

Trabajo en conjunto con Zhiwei Cheng (School of Data Science, Zhejiang University of Finance and Economics) y Hayk Mikayelyan (Mathematical Sciences, University of Nottingham Ningbo China).

COMPORTAMIENTOS SOCIALES EN AMBAS ESPECIES INTERACTUANTES Y EFECTO ALLEE. SU IMPACTO EN UN MODELO DE DEPREDACIÓN.

Virginia Belén Gallar

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Cuyo, Argentina
virgigallar@gmail.com

Al estudiar la interacción entre dos especies, se construyen distintos modelos matemáticos utilizando sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, admitiendo modificaciones al modelo de Lotka-Volterra. Se pueden variar las tasas de crecimiento de cada especie, considerar diferentes tasas de consumo o respuestas funcionales, o incorporar diferentes fenómenos ecológicos, lo que permite ajustar la descripción de la interacción. En este trabajo, se estudiará un modelo que incluye la competencia intraespecífica entre depredadores, el efecto Allee afectando el crecimiento de las presas y el uso de refugio por parte de las presas ante el miedo de ser capturadas, suponiendo que el número de presas que hace uso del refugio es directamente proporcional a la cantidad de depredadores presentes en el entorno. Se probará que el sistema está bien definido y es factible como modelo poblacional, mostrando la existencia de una región positivamente invariante y el acotamiento de las soluciones. Además, se estudiará la existencia y estabilidad local de los equilibrios del sistema sobre el eje x , y , bajo ciertas condiciones sobre los parámetros, del punto de equilibrio positivo.

Trabajo en conjunto con Marcelo Alberto (Universidad Nacional de Cuyo, Argentina), Alejandro Rojas-Palma (Universidad Católica del Maule, Chile) y Eduardo González-Olivares (Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile).

PATTERNS AND EQUILIBRIA IN INCOMPRESSIBLE FLUIDS

Claudia García

Universidad de Granada, España
claudiagarcia@ugr.es

The motion of a uniform incompressible fluid is described by the Navier-Stokes equations and, in its inviscid regime, via the Euler equations. In the two-dimensional case, the Euler equations in the vorticity formulation contain many interesting relative equilibria: stationary, rotating and translation solutions. Bifurcation theory arises naturally in the study of many PDE's, which can be characterized by an implicit equation of the form

$$F(\lambda, x) = 0, \quad (1)$$

where $\lambda \in \mathbb{R}$ and x belongs to some infinite-dimensional Banach space. In this talk, we will take advantage of this theory to review the existence of different kind of solutions: V-states, non uniform rotating vortices or Karman Vortex Street type of solutions, among others. All those simplified dynamics are governed by a nonlinear and nonlocal equation of type (1).

THE HEAT EQUATION IN THE HYPERBOLIC SPACE. ASYMPTOTIC BEHAVIOUR

Alejandro Garriz

Universidad de Granada, España
alejandro.garrizmolina@gmail.com

We will present some new results about the large-times behaviour of solutions of the heat equation posed in the hyperbolic space $\mathbb{H}^d$, paying special attention to the general case of integrable initial data, improving the results of J.L. Vázquez in [1] and answering the questions therein. For such initial data the asymptotic profiles were not even known. We will manage to provide not only the asymptotic profiles, with some unexpected results, but also the speed of convergence of the solutions thanks to the definition and the study of an Entropy natural to the problem. This is a joint work with J.A. Cañizo and D.A. Marín.

Trabajo en conjunto con José Alfredo Cañizo y Diego Alfonso Marín (Universidad de Granada).

Referencias

- [1] J.L. Vázquez, Asymptotic behaviour for the heat equation in hyperbolic space, Communications in Analysis and Geometry (2018).

ANÁLISIS DE UN PROBLEMA DE FRONTERA LIBRE EN RÉGIMEN CUASI-ESTÁTICO PARA UNA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN-REACCIÓN

Diego Ernesto Guevara

Universidad Nacional de Rosario, Argentina
guevaradiegodiego@gmail.com

Consideramos un problema de frontera libre unidimensional de infiltración a través de un medio poroso con reacción de hidratación en régimen cuasi-estático. En el presente modelo, $u \geq 0$ representa la presión del fluido adimensionalizada y $\Gamma \in [0, 1]$ denota el grado de avance de la reacción de hidratación ($\Gamma = 0$: sin reacción, $\Gamma = 1$: reacción completa). La función $s(t)$ representa la posición del frente de saturación, que separa la zona de roca saturada con fluido ($0 < x < s(t)$) de la zona seca ($x > s(t)$). La densidad de la reacción Γ influye fuertemente en el comportamiento de la interfaz $s(t)$. Nuestro objetivo es analizar la evolución de las variables $u(x, t)$, $s(t)$ y $\Gamma(x, t)$, las cuales están gobernadas por el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 - \Gamma) = 0, \quad t > 0, \quad x \in (0, s(t)),$$

$$-u_x(s(t), t) = \dot{s}(t), \quad t > 0, \quad x = s(t),$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = k(1 - \Gamma), \quad t > 0, \quad x \in (0, s(t)),$$

con condiciones iniciales

$$\Gamma(x, 0) = \Gamma_0(x) > 0, \quad s(0) = s_0 > 0, \quad u(s_0, 0) = 0,$$

y condiciones de borde

$$\Gamma(s(t), t) = 0, \quad u(0, t) = 1, \quad u(s(t), t) = 0.$$

Demostramos la existencia y la unicidad de soluciones mediante un argumento de punto fijo en un espacio de funciones continuas. Además, analizamos el comportamiento asintótico del frente de infiltración $s(t)$ y verificamos que tanto para tiempos cortos como para tiempos largos, la evolución sigue $s(t) \propto \sqrt{t}$.

Trabajo en conjunto con Piotr Rybka (Warsaw University, Warsaw, Poland) y Sabrina Roscani (Universidad Austral, Rosario, Argentina).

EXTENSIÓN DE LA FÓRMULA BBM A ESPACIOS DE SOBOLEV MAGNÉTICOS FRACCIONARIOS CON EXPONENTE VARIABLE

Rosa Alejandra Lorenzo

Departamento de Matemática-Instituto de Matemática Aplicada San Luis (IMASL)-Universidad Nacional de San Luis, Argentina
rlorenzo77@gmail.com

El estudio de los espacios de Sobolev y su comportamiento asintótico ha sido central en el análisis de ecuaciones diferenciales y el cálculo de variaciones. Un resultado fundamental es la fórmula de Bourgain-Brezis-Mironescu (BBM), que describe el paso de las normas fraccionarias a la norma clásica de Sobolev cuando el orden fraccionario tiende a uno.

En los últimos años, han recibido gran importancia en el ámbito de las ecuaciones diferenciales los espacios de Sobolev fraccionarios $W^{s,p}(\Omega)$. Estos espacios están definidos como

$$W^{s,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) : \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{\frac{n}{p} + s}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \right\},$$

donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un dominio arbitrario y $0 < s < 1 \leq p < \infty$. Estos espacios están fuertemente asociados al operador p -Laplaciano fraccionario.

En el artículo de Bourgain-Brezis-Mironescu se estudió el comportamiento asintótico cuando $s \rightarrow 1$ de la seminorma de Gagliardo y se obtuvo el siguiente resultado:

$$\lim_{s \rightarrow 1} s(1 - s) \iint_{\Omega \times \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dy dx = K_{n,p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx,$$

donde la constante $K_{n,p}$ esta dada por

$$K_{n,p} = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |w \cdot h|^p dH^{n-1}(h),$$

y $\mathbb{S}^{n-1}$ denota la esfera unitaria y w es un vector unitario en $\mathbb{R}^n$.

En esta charla abordaremos la extensión de la fórmula BBM al contexto de espacios de Sobolev magnéticos fraccionarios con exponente variable.

Trabajo en conjunto con Pablo Ochoa (Universidad Nacional de Cuyo-CONICET) y Analía Silva (Universidad Nacional de San Luis-IMASL-CONICET).

TRAVELING MOTILITY OF ACTIN LAMELLAR FRAGMENTS UNDER SPONTANEOUS SYMMETRY BREAKING

Martina Magliocca

Universidad de Sevilla, España
mmagliocca@us.es

Cell motility is connected to the spontaneous symmetry breaking of a circular shape. In [1] Blanch-Mercader and Casademunt performed a nonlinear analysis of the minimal model proposed by Callan and Jones [2] and numerically conjectured the existence of traveling solutions once that symmetry is broken. In this talk, we prove analytically that conjecture by means of nonlinear bifurcation techniques.

Trabajo en conjunto con Claudia García (Departamento de Matemática Aplicada & Research Unit "Modeling Nature" (MNA), Facultad de Ciencias, Universidad de Granada, Granada, España) y Nicolas Meunier (LaMME, UMR 8071 CNRS, Université Evry Val d'Essonne, France).

Referencias

- [1] C. Blanch-Mercader, J. Casademunt, Spontaneous motility of actin lamellar fragments. Physical review letters, 110, no. 17, (2013), 078102.
- [2] A.C. Callan-Jones, J.F. Joanny, J. Prost, Viscous-fingering-like instability of cell fragments, Physical review letters, 100, no. 25, (2008), 258106.

ROUCHÉ–FROBENIUS COMO LENTE DE MULTIPLICIDAD EN EDP NO LINEALES Y SISTEMAS DE PUNTO DE SILLA: EL CASO PROTOTIPO DE LA VIGA DE TIMOSHENKO

Héctor Martín

Facultad Regional Reconquista de la Universidad Tecnológica Nacional, Argentina
hectordmartin@gmail.com

Presentamos el Teorema de Rouché-Frobenius como una lente lineal para anticipar multiplicidad y posible pérdida de unicidad en EDP no lineales y en sistemas de punto de silla. La idea central es que la deficiencia de rango en la linealización y en matrices mixtas discretas conduce a familias de soluciones en el problema lineal consistente. Usamos la viga de Timoshenko como prototipo estrictamente lineal: en vibraciones y pando, la matriz efectiva se vuelve singular en parámetros críticos y aparece un núcleo no trivial. Sobre esa base, proponemos un enunciado verificable en el caso lineal, discutimos indicadores numéricos (por ejemplo, la menor singular) y consecuencias computacionales: mal condicionamiento, sensibilidad a la inicialización y necesidad de precondicionamiento. El marco se formula para EDP generales; Navier-Stokes se incluye como caso paradigmático. El objetivo no es probar no unicidad en el continuo, sino ofrecer una guía conceptual y computacional para identificar escenarios plausibles de multiplicidad.

Trabajo en conjunto con Ernesto D. Aguirre (Universidad Tecnológica Nacional – Facultad Regional Córdoba; CICTERRA – CONICET/UNC, Córdoba, Argentina).

Referencias

- [1] M.A. De Rosa, M. Lippiello, G. Armenio, G. De Biase, S. Savalli, Dynamic analogy between Timoshenko and Euler-Bernoulli beams, Acta Mechanica, 231 (2020), 4819–4834.
- [2] X.F. Li, A unified approach for analyzing static and dynamic behaviors of functionally graded Timoshenko and Euler-Bernoulli beams, Journal of Sound and Vibration, 318(4-5) (2008), 1210–1229.
- [3] S. Saffari, M. Hashemian, D. Toghraie, Dynamic stability of functionally graded nanobeam based on nonlocal Timoshenko theory considering surface effects, Physica B: Condensed Matter, 520 (2017), 97–105.

- [4] H.D. Martín, C. Maggi, M.T. Piovan, M.A. De Rosa, N.M. Gutbrod, Natural vibrations and instability of plane frames: Exact analytical solutions using power series, *Applied Mathematical Modelling*, 107 (2022), 229—248.
- [5] G. Iooss, D.D. Joseph, *Elementary Stability and Bifurcation Theory*, Springer (1990).
- [6] R. Peyret, T.D. Taylor, *Computational Methods for Fluid Flow*, Springer (1990).

EL MÉTODO SHOOTING PARA SOLUCIONES PERIÓDICAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES CON MEDIDAS

Fernando Mazzone

UNRC, CONICET, UNLPam, Argentina
fmazzone@exa.unrc.edu.ar

El objetivo de este trabajo es encontrar soluciones periódicas para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con Medidas (EDOM) del siguiente tipo

$$\begin{cases} d\varphi = f(t, \varphi(t)) d\mu & t \in (0, T), \\ \varphi(0) - \varphi(T) = 0. \end{cases} \quad (P)$$

Aquí $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ es una función con valores matriciales, μ es una medida vectorial con valores en $\mathbb{R}^m$, con $\mu(\{0\}) = \mu(\{T\}) = 0$. Por una solución de este problema entenderemos una función $\varphi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de variación acotada y continua a izquierda tal que

$$\mu_\varphi(A) = \int_A f(t, \varphi(t)) d\mu,$$

para todo conjunto de Borel $A \subset [0, T]$, donde μ_φ es la medida vectorial de Lebesgue-Stieltjes asociada a φ .

La formulación de nuestro problema contiene los casos más importantes de EDOM y problemas impulsivos (ver [2,3]) que han sido considerados en la literatura.

En el método shooting se considera el mapeo de Poincaré $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, esto es la función definida por $P(x) = \varphi(T)$, donde φ es la solución al problema de valores iniciales

$$\begin{cases} d\varphi = f(t, \varphi(t)) d\mu & t \in (0, T) \\ \varphi(0) = x. \end{cases} \quad (1)$$

Entonces los puntos fijos del mapeo de Poincaré P son soluciones del problema (P) . Para hallar tales puntos fijos, se utiliza el Teorema de Brouwer, para lo cual necesitamos verificar que P es continuo y $P(\overline{B(0, R)}) \subset B(0, R)$, para algún $R > 0$.

Invocando el Teorema de Radon–Nikodym podemos reducir el problema (P) al caso donde μ es una medida positiva y f es un campo con valores en $\mathbb{R}^n$ posiblemente discontinuo.

Para la continuidad de P fue clave la siguiente generalización de la desigualdad de Gronwall.

Teorema (Desigualdad de Gronwall para medidas) Sea μ una medida finita y positiva sobre $[0, T]$. Si $u \in L^1(\mu)$ satisface que

$$u(t) \leq c + \int_{[0, t)} u(s) d\mu(s),$$

entonces

$$u(t) \leq ce^{K(t)\mu([0, t))},$$

donde $K(t) = \prod_{\tau \in D \cap [0, t)} (1 + \mu(\{\tau\}))$ y $D = \{\tau \mid \mu(\{\tau\}) > 0\}$.

Sobre el campo f se asume:

(P₁) Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $f(t, x)$ es medible Borel en la variable t . Además, $f(t, x)$ es continua para x fijo en los valores de t donde $\mu(\{t\}) = 0$.

(P₂) Para todo $t \in [0, T]$, $f(t, x)$ es continua en la variable x .

(P₃) Existen a, b positivos tal que

$$|f(t, x)| \leq a|x| + b.$$

(P₄) Existe $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|.$$

Bajo estas condiciones se prueba, usando la Desigualdad de Gronwall mencionada antes, que el operador de Poincaré es continuo. El otro ingrediente clave en el método shooting, es encontrar un número $R > 0$

tal que $P(\overline{B(0, R)}) \subset \overline{B(0, R)}$. Para ello hay que garantizar que una solución de (1) con $x \in \overline{B(0, R)}$ quede confinada a $\overline{B(0, R)}$ para todo valor t . De manera similar que para el caso de EDO, en las EDOM es necesario impedir que haya un flujo en dirección saliente por $\partial B(0, R)$. Pero, como las soluciones de EDOM pueden ser discontinuas, también hay que evitar que un impulso expulse a una solución al exterior de la bola desde su interior. En el siguiente teorema exponemos el resultado obtenido.

Teorema. Supongamos que f es una función que satisface las condiciones (P_1) a (P_4) y que existe $R > 0$ tal que:

(P_5) $f(t, u) \cdot u < 0$ para todo par (t, u) , con $|u| = R$ y $\mu(\{t\}) = 0$.

(P_6) $x + f(t, x)\mu(\{t\}) \in \overline{B(0, R)}$, para todo $x \in \overline{B(0, R)}$.

Entonces, el operador de Poincaré cumple que $P(\overline{B(0, R)}) \subset \overline{B(0, R)}$.

Finalmente, aplicando el Teorema de Punto Fijo de Brouwer obtenemos la existencia de soluciones periódicas.

Es sabido que el método shooting permite resolver numéricamente problemas de contorno en el ámbito de EDO. En esta dirección, exploramos esta estrategia con EDOM obteniéndose algunos resultados y conclusiones.

La gran mayoría de los métodos numéricos computan la solución en pasos sucesivos de t . En cada paso es posible evaluar $f(t, x)$ en momentos futuros y pasados de t respecto al correspondiente paso. Hemos observado que las EDOM presentan una dificultad adicional, a saber, que los métodos numéricos que utilizan momentos futuros en la evaluación de un paso no convergen a nuestra definición de solución. Por este motivo, se han empleado otros algoritmos. Uno de ellos se basa en las muy conocidas iteraciones de Picard. Ha sido probado que estas iteraciones convergen (ver [1]) a la solución para el caso de EDOM. Otro es utilizar procedimientos que solo requieren evaluar f en momentos anteriores, como por ejemplo con un método de Adams explícito. Estos métodos combinados con el método shooting nos permiten resolver numéricamente problemas de contorno periódicos. A fin de ejemplificar, consideramos la ecuación correspondiente a un péndulo, donde sobre la masa actúa una fuerza externa impulsiva.

Trabajo en conjunto con Sonia Acinas y Lorenzo Sierra (UNLPam).

Referencias

- [1] G. Beltritti, S. Demaria, G. Giubergia, F. Mazzone, The Picard-Lindelöf theorem and continuation of solutions for measure differential equations, Czechoslovak Mathematical Journal, 75, no. 1 (2025), 47–68.
- [2] B. Brogliato, Nonsmooth Mechanics: Models, Dynamics and Control, Springer, 2016.
- [3] S. Zavalishchin, A. Seseikin, Dynamic Impulse Systems: Theory and Applications, Springer, 1997.

ECUACIÓN DE HAMILTON-JACOBI-BELLMAN EN LA OPTIMIZACIÓN DE DIVIDENDOS BAJO RIESGO DE CATÁSTROFES NATURALES

Nora Muler

Universidad Torcuato Di Tella, Argentina
nmuler@utdt.edu

En esta comunicación se analiza un problema de optimización estocástica que conduce al estudio de soluciones viscosas de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) correspondiente. La motivación proviene de un modelo para la maximización del pago de dividendos en una compañía de seguros expuesta al riesgo de catástrofes naturales. En ausencia de pagos de dividendos, la dinámica de la reserva de la compañía se modela mediante un proceso con pendiente positiva y con saltos descendentes de tamaño aleatorio que corresponden a los reclamos de los clientes. A diferencia del enfoque clásico -que no incorpora el riesgo de catástrofes naturales y asume una intensidad de reclamos constante en la llegada de saltos, modelada mediante un proceso de Poisson homogéneo-, en este trabajo se considera una intensidad aleatoria, que aumenta con la llegada de una catástrofe, modelada por un proceso shot-noise, como el estudiado en [2]. Este enfoque da lugar a un proceso de Poisson no homogéneo, que captura de manera más realista la influencia de los eventos catastróficos, así como la forma en que su impacto disminuye gradualmente con el tiempo.

La función objetivo busca maximizar el valor esperado de los dividendos descontados hasta la ruina (criterio de De Finetti). Las variables de estado relevantes son dos: el nivel de la reserva y la intensidad de llegada de los saltos, ambos evaluados en el tiempo t . Se demuestra que la función de valor óptima de este problema de control estocástico bidimensional es la menor super-solución viscosa de la ecuación de HJB correspondiente. Esta ecuación incluye un mínimo entre un operador integro-diferencial y un operador lineal, lo

cual conduce a un problema de frontera libre. Finalmente, se demuestra que la función de valor óptima puede aproximarse uniformemente mediante un esquema numérico construido a partir de estrategias admisibles definidas sobre una malla. El enfoque se ilustra mediante ejemplos que consideran distintas distribuciones del tamaño de los saltos. En estos casos, se observa que la frontera libre entre las regiones puede estar compuesta por una o varias curvas, dependiendo de la forma de la distribución de los saltos considerada.

Asimismo, se considera la posibilidad de cambios de régimen motivados por escenarios de cambio climático que alcanzan puntos críticos. Esto significa que ciertas perturbaciones puede desencadenar un cambio abrupto irreversible en el sistema climático global. Para estudiar este problema, se resuelve un problema de control por cada régimen, siguiendo un esquema iterativo hacia atrás, partiendo del régimen final. Este trabajo es una continuación de [1].

Trabajo en conjunto con Hansjoerg Albrecher (University of Lausanne) y Pablo Azcue (Universidad Torcuato Di Tella).

Referencias

- [1] H. Albrecher, P. Azcue, N. Muler, Optimal dividend strategies for a catastrophe insurer, *Frontiers of Mathematical Finance*, 3, no. 2 (2024), 304–344.
- [2] A. Dassios, J.W. Jang, Pricing of catastrophe reinsurance and derivatives using the Cox process with shot noise intensity, *Finance Stochastics* 7 (2003), 73–95.

ÓRBITAS PERIÓDICAS DE SISTEMAS LAGRANGIANOS CONVEXOS

Juan Nario

Universidad de la República, Facultad de Ciencias Económicas y de Administración, Uruguay
 juan.nario@fcea.edu.uy

Dada una variedad cerrada M , un Lagrangiano $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ suave, convexo y cuadrático en el infinito permite definir la funcional de acción en $W^{1,2}(\mathbb{S}, M) \times \mathbb{R}^+$. Más específicamente, dado un nivel de energía k y una curva x de periodo T , la acción de x es

$$\mathcal{A}_k(x, T) = \int_0^T (L(x(t), \dot{x}(t)) + k) dt.$$

Bajo estas hipótesis, los puntos críticos de este funcional corresponden a soluciones periódicas de la ecuación de Euler-Lagrange de L con energía k .

El comportamiento de este funcional varía según el nivel de energía, siendo el valor crítico de Mañé un nivel importante. Cuando k está por encima de este valor, es conocida la existencia de órbitas periódicas no contractibles (si la variedad no es simplemente conexa), siendo el uso de minimax la herramienta principal para probar esto. El objetivo de esta presentación es hacer una revisión de este y otros resultados obtenidos por G. Contreras y A. Abbondandolo, en este contexto.

Referencias

- [1] G. Contreras, The Palais-Smale condition on contact type energy levels for convex Lagrangian systems, *Calc. Var.* 27 (2006), 321–395.
- [2] A. Abbondandolo, Lectures on the free period Lagrangian action functional, *J. Fixed Point Theory Appl.* 13 (2013), 397–430.

UN PROBLEMA INVERSO DE CAUCHY PARA UNA ECUACIÓN PARABÓLICA COMO UN PROBLEMA GENERALIZADO DE MOMENTOS

Maria Beatriz Pintarelli

Dep.de Matemática, Fac. de Ciencias Exactas, UNLP- Dep. Ciencias Basicas, Fac. Ingeniería, UNLP,
Argentina
mariabea@mate.unlp.edu.ar

El problema consiste en encontrar $h(t)$ y $w(x, t)$ en la ecuación

$$w_t(x, t) - h(t)w_{xx}(x, t) = 0$$

sobre el dominio $E = \{(x, t); a_1 \leq x \leq b_1; 0 < t \leq b_2\}$ bajo condiciones de Cauchy usando las técnicas de problema generalizado de momentos.

El espacio subyacente es $L^2(0, b_2)$. Donde $w(x, t)$ es dos veces diferenciable con respecto a x y diferenciable con respecto a t .

Es posible resolver numéricamente el problema usando las técnicas de problema inverso de momentos generalizados, esto es el método de expansión truncada.

Veremos que se puede encontrar una aproximación numérica para $h(t)$ y $w(x, t)$ en tres pasos. En los pasos uno y dos encontramos una aproximación para $w(x, t)$. En un tercer paso se encuentra una aproximación para la función $(1 - h(t))w_{xx}(x, t)$. De aquí una aproximación para $h(t)$.

En cada paso se transforma una determinada ecuación en derivadas parciales en una ecuación integral. Esta ecuación integral tiene como incógnita una función para la cual se encuentra una aproximación numérica utilizando el método de expansión truncada. Para esto operamos sobre la ecuación integral para llegar a un problema de momentos generalizados.

Se obtienen cotas para el error de aproximación y se ilustra el método con ejemplos.

LA DENSIDAD CRÍTICA EN ECUACIONES ELÍPTICAS

Marco Sanchez

Centro de Matemática de La Plata, Argentina
marcoads95@gmail.com

El lema de densidad crítica es una pieza fundamental para la teoría de regularidad en ecuaciones elípticas. Dice lo siguiente: Si

$$\begin{aligned} Lu &\leq C \text{ en } B_1; \\ u &> 0 \text{ en } \partial B_1; \\ u(0) &\leq -1; \end{aligned}$$

entonces $|\{u < 0\}| \geq \delta$, donde δ depende solo de la dimensión y elipticidad.

Su demostración está basada en el principio del máximo de Aleksandrov, donde la convexidad juega un rol preponderante y no es adaptable a ecuaciones elípticas degeneradas.

Veremos ideas para demostrar la densidad crítica usando solo el principio de comparación. Construiremos ejemplos en casos particulares.

Referencias

- [1] L.A Caffarelli, X. Cabre, Fully Nonlinear Elliptic Equations, AMS Colloquium Publications, Vol. 43.
- [2] L.A Caffarelli, L. Silvestre, Regularity theory for fully nonlinear integro-differential equations, Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences 62, no. 5 (2009), 597–638.
- [3] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer, (2001).
- [4] C. E. Gutiérrez, The Monge-Ampère Equation, Birkhäuser.
- [5] C. Gutiérrez, F. Tournier, Harnack Inequality for a Degenerate Elliptic Equation, Communications in Partial Differential Equations 36, no. 12 (2011), 2103–2116.

EIGENVALUE CURVES FOR DIRAC OPERATORS: A STRATEGY FOR SHAPE OPTIMIZATION

Tomás Sanz-Perela

Universitat de Barcelona, España
tomas.sanz.perela@ub.edu

In this talk, I will present a shape optimization problem for a Dirac operator and a strategy to approach it, both in the 2D and 3D settings. It consists of considering a specific operator within a family of Dirac operators whose boundary conditions depend on a parameter. I will explain how to describe the spectrum of these operators using eigenvalue curves, and how properties of these curves can be used to obtain positive results in shape optimization. In particular, I will describe the connections between this problem and related shape optimization questions for the Dirichlet Laplacian, a complex version of the Robin Laplacian, and the embedding of a Hardy space into a Bergman space.

The talk is based on joint work with A. Arrizabalaga, A. Mas, and L. Vega (2023), as well as two recent works: one by J. Duran (2025), and another in collaboration with J. Duran and A. Mas (2025).

RADIAL SPECTRA OF THE 1-LAPLACIAN IN THE ANNULUS

Sergio Segura de León

Universidad de Valencia, España
sergio.segura@uv.es

This paper is concerned with the behaviour, as p goes to 1, of eigenvalues of the p -Laplace operator associated to radial eigenfunctions. The Dirichlet, Neumann and Robin conditions are analyzed in an annulus. In each case we prove that there exist the limits of both eigenvalues and eigenfunctions and the limits define an eigenpair of the 1-Laplacian.

Trabajo en conjunto con José C. Sabina de Lis (Universidad de La Laguna, España).

REGULARIDAD DE UN PROBLEMA DE FRONTERA LIBRE DE TIPO ELÍPTICO-PARABÓLICO

María Soria Carro

Universidad Autónoma de Madrid, España
maria.soriacarro@uam.es

En esta charla presentaremos un problema de frontera libre que modela el flujo de un fluido a través de un medio poroso parcialmente saturado. En la región saturada, este fenómeno está gobernado por una ecuación elíptica, mientras que en la región no saturada, por una ecuación parabólica. La frontera libre surge como la interfaz que separa estas dos regiones, las cuales son desconocidas a priori. La teoría general de existencia, unicidad y regularidad de soluciones para este tipo de problemas fue desarrollada en la década de 1980. Algunos de los trabajos más influyentes en el área son: Alt–Luckhaus [1], van Duyn–Peletier [3], Hulshof–Peletier [4], DiBenedetto–Gariepy [2] y Hulshof–Wolanski [5].

Una de las preguntas más interesantes es entender el comportamiento de la frontera libre, que está influenciado por la regularidad del dato de borde, debido al carácter no local del problema. Cuando el dato es suficientemente regular, se sabe que la frontera libre es continua, o incluso diferenciable, bajo ciertas condiciones iniciales. Sin embargo, si el dato presenta discontinuidades, estas pueden propagarse hacia el interior, afectando la regularidad tanto de la solución como de la interfaz. En [6], demostramos que, cuando el dato está simplemente acotado, la frontera libre es de clase $C^{1/2}$ y esta regularidad es óptima.

Trabajo en conjunto con Dennis Kriventsov (Rutgers University).

Referencias

- [1] H.W. Alt, S. Luckhaus, Quasilinear elliptic-parabolic differential equations, Math. Z. 183, no.3 (1983), 311–341.
- [2] E. Di Benedetto, R. Gariepy, Local behavior of solutions of an elliptic-parabolic equation. Arch. Rational Mech. Anal. 97, no. 1 (1987), 1–17.
- [3] C.J. van Duyn, L.A. Peletier, Nonstationary filtration in partially saturated porous media, Arch. Rational Mech. Anal. 78, no. 2 (1982), 173–198.

- [4] J. Hulshof, L.A. Peletier, An elliptic-parabolic free boundary problem. *Nonlinear Anal.* 10, no. 12 (1986), 1327–1346.
- [5] J. Hulshof, N. Wolanski, Monotone flows in N-dimensional partially saturated porous media: Lipschitz-continuity of the interface, *Arch. Rational Mech. Anal.* 102, no. 4 (1988), 287–305.
- [6] D. Kriventsov, M. Soria-Carro, An elliptic-parabolic free boundary problem with discontinuous data, *arXiv:2508.13299* (2025).

ESTUDIO ANALÍTICO DE LA TRANSFERENCIA DE CALOR EN RÉGIMEN ESTACIONARIO DE TRES SÓLIDOS EN CONTACTO CON FLUJO CONTINUO Y SALTO TÉRMICO EN CADA INTERFAZ

Guillermo Federico Umbricht

Universidad Austral, Argentina
guilleungs@yahoo.com.ar

Este trabajo presenta un estudio analítico de la conducción de calor en estado estacionario en un sistema compuesto por tres sólidos en contacto, considerando la continuidad del flujo de calor y los saltos de temperatura en las interfaces. La metodología es aplicable a configuraciones geométricas arbitrarias y a la presencia de fuentes de calor internas dentro de cada sólido. Se emplean métodos variacionales combinados con el teorema del punto fijo para establecer rigurosamente condiciones suficientes para la existencia y unicidad de la solución. Se demuestra que los parámetros de resistencia interfacial desempeñan un papel clave en la determinación de la distribución de temperatura y en el mantenimiento de la continuidad del flujo de calor a través de las interfaces.

Se aprecia también la dependencia continua de la solución con respecto a las fuentes de calor internas en los tres sólidos, lo que proporciona un marco matemático sólido para el análisis de sistemas multicapa complejos. Se presentan varios ejemplos ilustrativos con diferentes características físicas, que confirman el comportamiento esperado del sistema y resaltan la influencia de las propiedades de las interfaces y de las fuentes internas sobre el campo de temperatura global.

El estudio se centra en la conducción lineal en estado estacionario con efectos interfaciales lineales, lo que permite un tratamiento analítico riguroso. Si bien los efectos transitorios, los fenómenos interfaciales no lineales o condiciones de frontera más complejas están fuera del alcance de este trabajo, la formulación propuesta proporciona una base para su futura investigación.

En conjunto, este enfoque ofrece una herramienta general, rigurosa y práctica para el análisis de la transferencia de calor en sistemas compuestos con múltiples interfaces, tales como materiales en capas y dispositivos microestructurados, donde la resistencia térmica interfacial desempeña un papel significativo. Los resultados contribuyen a una comprensión más profunda de la transferencia de calor en interfaces y proporcionan un marco versátil para aplicaciones en ingeniería.

Trabajo en conjunto con Domingo Alberto Tarzia y Mara Rossani (CONICET & Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Empresariales, Universidad Austral, Rosario, Santa Fe, Argentina).

EXISTENCIA DE SOLUCIONES POSITIVAS DE PROBLEMAS DE SEMIPOSITÓN PARA $p(\cdot)$ -LAPLACIANOS VARIABLES

Raúl Emilio Vidal

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación. Universidad Nacional de Córdoba. CIEM, Argentina
raul.vidal@unc.edu.ar

En esta charla, presentamos los resultados obtenidos en colaboración con Lucas A. Vallejos de la Universidad Nacional de Córdoba (véase [1]). Estos resultados son los únicos que conocemos en la literatura que abordan un problema de semipositón para el $p(\cdot)$ -Laplaciano de exponente variable. Establecemos la existencia de una solución débil positiva para el siguiente problema,

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta_{p(\cdot)} u = f(u) - \lambda & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases},$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$ es un dominio acotado suave, f es una función continua con crecimiento subcrítico, $\lambda > 0$ y $\Delta_{p(\cdot)} u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(\cdot)-2} \nabla u)$. Asumiendo una condición de tipo Ambrosetti–Rabinowitz y empleando

argumentos de paso de montaña, principios de comparación y resultados de regularidad, demostramos la existencia de una solución débil positiva para λ suficientemente pequeños.

Además, contaremos los avances obtenidos con Diana Sánchez y Emer Lopera de la Universidad Nacional de Colombia donde en lugar de $f(u) - \lambda$ consideramos el caso $\lambda f(u)$, con $f(0) < 0$.

Trabajo en conjunto con Lucas A. Vallejos (Universidad Nacional de Córdoba), Diana Sánchez y Emer Lopera (Universidad Nacional de Colombia).

Referencias

- [1] L.A. Vallejos, R.E. Vidal, Existence of positive solutions for a semipositone $p(\cdot)$ -Laplacian problem, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 547, no. 2 (2025), 129333.

TWO-PARAMETER LOCAL OPERATORS: A NEW TOOL FOR DIFFERENTIAL ANALYSIS

Miguel Vivas-Cortez

Pontificia Universidad Católica del Ecuador, Ecuador
mjvivas@puce.edu.ec

This work introduces a new local differential operator called the biparametric V-derivative, which generalizes the previously proposed deformable derivative. It is defined for parameters $\varphi \geq 0$ and $\psi > 0$ by

$$V^{\varphi, \psi}(g(t)) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\psi + h(\psi - \varphi)) g\left(t + h \frac{\varphi}{\psi}\right) - \psi g(t)}{\psi \cdot h}$$

whenever the limit exists.

Fundamental properties of this new derivative are established, including generalized versions of Rolle's Theorem and the Mean Value Theorem. An integral operator associated with the V-derivative is introduced, which enables the formulation of a version of the Fundamental Theorem of Calculus.

A generalized Laplace transform is also defined using this new integral operator. Moreover, biparametric fractional differential equations are solved to illustrate the applicability of the proposed framework.

Unlike the deformable derivative, the biparametric V-derivative does not require the restriction $\varphi + \psi = 1$, offering greater flexibility in applications. It is also shown that classical and deformable derivatives are recovered for specific parameter values.

This framework opens new directions for research, such as defining partial derivatives of order (φ, ψ) , exploring new integral transforms, and extending the V-derivative to complex domains.

Referencias

- [1] M. Vivas-Cortez, J. Velasco, H. Jarrin, A New Generalized Local Derivative of Two Parameters, *Applied Mathematics & Information Sciences*, 19, no. 3 (2025), 713–723. doi:10.18576/amis/190319.
- [2] A. Priyanka, F. Zulfeqarr, A. Ujlayan, Deformable fractional derivative and its applications, *AIP Conference Proceedings*, 1897, no. 1 (2017), 020008.
- [3] M. Vivas-Cortez, J.E.N. Valdés, On the generalized Laplace transform, *Applied Mathematics and Information Sciences*, 15, no. 5 (2021), 667–675.
- [4] M. Vivas-Cortez, M.P. Árciga, J.C. Najera, J.E. Hernández, On some conformable boundary value problems in the setting of a new generalized conformable fractional derivative, *Demonstration Mathematica*, 56, no. 1 (2023), 0212.
- [5] M. Vivas-Cortez, L.M. Lugo, J.E.N. Valdés, M.E. Samei, A Multi-Index Generalized Derivative; Some Introductory Notes, *Applied Mathematics and Information Sciences*, 16, no. 6 (2022), 883–890.

Estadística, Probabilidad y Ciencias de Datos

ESTIMADORES POR EXTENSIONES ARMÓNICAS PARA EL PROBLEMA DE DETECCIÓN DE COMUNIDADES SEMI-SUPERVISADO EN MODELOS ESTOCÁSTICOS DE BLOQUES

Nicolás Agote

Universidad de Buenos Aires y Université de Toulouse, Argentina
agonico99@gmail.com

En esta comunicación vamos a estudiar el problema de detección de comunidades en modelos estocásticos de bloques (SBM por sus siglas en inglés) en el caso semi-supervisado.

Los modelos estocásticos de bloques son generalizaciones de los grafos de Erdős-Renyi que tienen una estructura de comunidades, en que distintos subconjuntos de nodos (llamados comunidades) tienen un comportamiento parecido a nivel de sus conexiones; en el caso asortativo, de nuestro interés, los nodos de una misma comunidad tienen más probabilidades de conectarse entre sí que con el resto de los nodos.

El problema de detección de comunidades consiste en dar estimadores que encuentren la partición subyacente de uno de estos grafos (por ejemplo, partiendo de su matriz de adyacencia). Podemos encontrar en la literatura muchos trabajos que estudian el problema en el caso no-supervisado; ver [1] para un resumen. En el caso semi-supervisado, se tiene acceso también a la comunidad de algunos pocos nodos en el grafo que podemos usar para hacer la estimación. En este paradigma encontramos artículos que estudian el problema en el caso en que la cantidad de nodos revelados es lineal en el tamaño de nodos en el grafo, por ejemplo: minimizando una energía [2], métodos espectrales [3, 4] y usando autofunciones del p -Laplaciano [5].

En nuestro trabajo, usamos paseos al azar para determinar para cada nodo qué comunidad tiene los nodos revelados más cercanos a él, y de esta manera estimamos la partición inducida. Damos resultados de consistencia (precisión asintótica para nuestros estimadores) y garantías de eficiencia al calcularlos. Como contribuciones principales a la literatura, nuestros métodos admiten una cantidad sub-lineal de nodos revelados para realizar la estimación, y adicionalmente permiten implementaciones eficientes para calcular las comunidades de pequeños subconjuntos de nodos.

Trabajo en conjunto con Inés Armendáriz, Pablo Ferrari (Universidad de Buenos Aires) y Florencia Leonardi (Universidade de São Paulo).

Referencias

- [1] E. Abbe, Community detection and stochastic block models: Recent developments, *Journal of Machine Learning Research* 18, 177 (2018), 1–86.
- [2] K. Avrachenkov, M. Dreveton, Almost Exact Recovery in Label Spreading. In *WAW 2019 - 16th Workshop on Algorithms and Models for the Web Graph* (Brisbane, Australia, July 2019).
- [3] N. Fraiman, M. Nisenzon, Semi-supervised community detection via quasi-stationary distributions, *arXiv preprint* (2024) arXiv:2412.09793.
- [4] J. Gaudio, N. Joshi, Exact community recovery (under side information): Optimality of spectral algorithms, *The Thirteenth International Conference on Learning Representations* (2024).
- [5] J. Calder, J., N. Drenska, Consistency of semi-supervised learning, stochastic tug-of-war games, and the p -laplacian, *Active Particles, Volume 4: Theory, Models, Applications*, (2024) 1–53.

MODELADO Y PREDICCIÓN DEL CAUDAL DEL RÍO SAN JUAN MEDIANTE SERIES TEMPORALES

Ignacio Benemérito

Universidad Nacional de San Juan, Argentina
ignacio.benemerito@gmail.com

En el presente trabajo se aplica el análisis de series temporales con el fin de obtener un modelo capaz de predecir el comportamiento del río San Juan y que, a su vez, los expertos de su campo (hidrólogos, geólogos y geofísicos) puedan interpretar para así comprender mejor la naturaleza del mismo con la garantía de que el modelo que estudian es compatible con la realidad. El análisis de series temporales multivariadas resulta especialmente útil en este caso. Por un lado, se trata con datos que varían a través del tiempo, en otras palabras, se está trabajando con un espacio de probabilidades $X : T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ donde T es un conjunto de índices y para cada $t \in T$, $X(t) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una variable aleatoria llamada $X(t)$ donde cada una de estas variables posee una distribución que no es independiente de los valores previos en la serie temporal. Por otro lado, se trata con un elemento (el río San Juan) cuyo comportamiento depende de muchos factores externos (precipitaciones, superficie nívea y manchas solares), haciendo necesario un análisis multivariado que considere los mismos a fin de mejorar las predicciones y establecer cómo es la relación, si es que existe, entre dichos factores y el caudal del río.

Trabajo en conjunto con Myriam Herrera (Universidad Nacional de San Juan, Argentina).

Referencias

- [1] R. Hyndman, G. Athanasopoulos, Forecasting: Principles and Practice. (3ª ed.). Monash University (2021). <https://otexts.com/fpp3/>
- [2] R. Shumway, Time Series Analysis and Its Applications With R Examples. (5a ed.). Springer (2025).
- [3] R. Tsay, Multivariate Time Series Analysis With R and Financial Applications. Wiley (2014).
- [4] E. Roobeek, Forecasting multivariate time series: using Vector ARMA models. (2013). <https://research.tue.nl/en/studentTheses/forecasting-multivariate-time-series>.

PREDICCIÓN INVARIANTE AL ENTORNO VÍA INDEPENDENCIA CONDICIONAL Y TRANSPORTE ÓPTIMO

Ian Bounos

Universidad de Buenos Aires - Instituto de Investigaciones Matemáticas Luis A. Santaló, Argentina
bounosian@gmail.com

Estudiamos la predicción de resultados Y a partir de predictores X en presencia de efectos de confusión inducidos por una variable ambiental E , de modo que la relación entre Y y el entorno E puede diferir entre los conjuntos de entrenamiento y prueba.

Proponemos aprender una representación $W = f(X)$ que sea lo más predictiva posible de Y , mientras satisface la independencia condicional $W \perp\!\!\!\perp E \mid Y$. En un entorno lineal y gaussiano, este criterio es equivalente a la ortogonalidad entre los residuos de la regresión de E respecto de Y , que llamaremos $T(E, Y)$ y W , lo que produce un problema espectral tratable con solución en forma cerrada.

Para el caso no lineal, generalizamos T al baricentro de Wasserstein para definir una función de pérdida que garantice la invariancia frente a cambios de entorno.

Proporcionamos resultados de identificación en el caso gaussiano, aclaramos cuándo la independencia de residuos caracteriza $W \perp\!\!\!\perp E \mid Y$, y conectamos el objetivo con identidades de covarianza. Experimentos sintéticos con desplazamientos controlables en el acoplamiento Y - E muestran que el estimador propuesto mantiene un error estable fuera del entorno de entrenamiento y supera a mínimos cuadrados ordinarios en este contexto.

En conjunto, el marco ofrece una vía fundamentada para la extracción de características estables al entorno al relacionar independencia condicional con transporte óptimo.

Trabajo en conjunto con Pablo Groisman (Universidad de Buenos Aires, Argentina), Mariela Sued (Universidad de San Andrés, Argentina) y Esteban Tabak (Universidad de Nueva York, Estados Unidos).

UNA APLICACIÓN DEL MODELO BIVARIADO DE REGRESIÓN SIMBÓLICA PARA DATOS DE INTERVALO

Jorgelina Carrizo

Universidad Nacional de San Juan, Argentina
jorgelinav_carrizo@yahoo.com.ar

El Análisis de Datos Simbólicos (ADS) es un campo relativamente nuevo de la estadística que amplía el análisis estadístico convencional de datos, al considerar la variabilidad y la estructura intrínsecas de los datos. A diferencia del análisis clásico de datos, en ADS, las variables que caracterizan los datos pueden ser multivaluadas, como intervalos o histogramas. El objetivo del presente trabajo es mostrar las variables con valores de intervalo como vectores aleatorios bivariados e introducir el modelo bivariado de regresión simbólica, basado en la teoría de modelos lineales generalizados. El mismo proporciona aspectos inferenciales al introducir herramientas de diagnóstico como deviance, residuos simbólicos y medidas de influencia, adaptadas a datos de intervalo. El método propuesto se aplica a un conjunto de datos reales en el marco de la economía, obteniendo las estimaciones de los parámetros del modelo, como coeficientes de regresión, el parámetro de dispersión, que mide la variabilidad residual del modelo, y el coeficiente de correlación utilizando un enfoque iterativo de estimación por máxima verosimilitud. Su desempeño se compara con el del método del Centro, introducido por Billard y Diday (2000), y del método de Centro y Rango propuesto por Lima Neto y Carvalho (2008). Para esta evaluación se utiliza el error cuadrático medio. Se concluye que, para el ejemplo utilizado, el método bivariado de regresión simbólica muestra una mejor performance respecto de los métodos citados, con la ventaja de ser un método inferencial.

Palabras Claves: Análisis de datos simbólicos, variables simbólicas de intervalo, método bivariado de regresión lineal simbólica, modelo lineal generalizado, análisis de residuos.

Referencias

- [1] L. Billard, E. Diday, Regression analysis for interval-valued data, Data analysis, classification, and related methods (2000), 369–374.
- [2] E. Lima Neto, F. De Carvalho, Centre and Range method for fitting a linear regression model to symbolic interval data, Computational Statistics and Data Analysis, 52, no. 3 (2008), 15001515.
- [3] E. Lima Neto, G.M. Cordeiro, F. De Carvalho, Bivariate symbolic regression models for interval-valued variables, Journal of Statistical Computation and Simulation, 81, no. 11 (2008), 1727–1744.

COMPARACIÓN DE DESCOMPOSICIONES ESPECTRALES EN SERIES DE LOCOMOCIÓN

Giuliana Castiglioni

CIEM, CONICET Universidad Nacional de Córdoba , Argentina
giuliana.castiglioni@mi.unc.edu.ar

Este trabajo se centra en comparación de tres métodos de detección y extracción de la descomposición aditiva de ritmos en señales de locomoción de codornices, no estacionarias, con ruido y con características cercanas a la correlación de largo alcance. Dos de estos métodos se basan en descomposición de tiempo frecuencia usando la transformada wavelet continua, (CWT y SST), óptimos para el caso no estacionario, y el tercero es un método algebraico (SSA) definido para señales débilmente estacionarias que descompone en valores singulares la matriz de trayectorias trasladadas por un paso fijo. El análisis comparativo reveló un ritmo circadiano robusto detectado por los tres métodos con tres ventanas distintas de suavizado. Sin embargo, la detección de ciclos ultradianos fue menos consistente, mostrando algunas diferencias entre los métodos, relativo al problema de definición del modelo del ruido asociado.

Trabajo en conjunto con Ana Georgina Flesia y Jackelyn Kembro (Universidad Nacional de Córdoba, Argentina).

CARACTERIZACIÓN DE CIRCUITOS DE FÓRMULA 1 MEDIANTE PCA Y CLUSTERING PARA APOYO EN LA TOMA DE DECISIONES ESTRATÉGICAS

Ezequiel Francisco Chocobar

Facultad de Ciencias Exactas - Universidad Nacional de Salta , Argentina
ezequiel.chocobar@exa.unsa.edu.ar

En este trabajo se realiza un análisis cuantitativo y caracterización matemática de los circuitos que conforman el calendario de la temporada 2024 de Fórmula 1, aplicando técnicas de análisis de datos, aprendizaje automático y estadística multivariada. A partir de datos de telemetría obtenidos con la librería FastF1, se analizan variables como velocidad, aceleración y posiciones normalizadas para clasificar los tramos del circuito en rectas, curvas lentas, medias y rápidas. Estos datos permiten describir la proporción de cada tipo de tramo en los diferentes circuitos, generando un perfil característico de cada pista. Para detectar curvas se aplica un proceso de suavizado de la trayectoria, se calculan diferencias de posición, se determinan los ángulos de dirección y sus variaciones, identificando aquellas zonas que superan un umbral angular específico y clasificando así las curvas del trazado.

Posteriormente, se construye un conjunto de variables representativas para cada circuito, incluyendo los porcentajes de curvas por tipo detectadas anteriormente, longitud total del circuito, número de curvas, tiempos de vuelta rápida, velocidades máximas y mínimas, y porcentaje de acelerador a fondo. Estos datos se normalizan y se someten a un proceso de reducción dimensional mediante Análisis de Componentes Principales (PCA), lo que permite facilitar la visualización y comparación entre pistas en un espacio reducido de dimensiones con mínima pérdida de información. Sobre este espacio reducido, se aplica un método de clustering (K-Means), con el objetivo de agrupar los circuitos según sus características geométricas y dinámicas. Para determinar la cantidad óptima de clústeres, se emplean criterios como el método del codo (Elbow Method) y el coeficiente de silueta (Silhouette Score), lo que permite identificar configuraciones de agrupamiento estables y coherentes. Además, se complementa el análisis con un enfoque jerárquico utilizando dendrogramas, lo que brinda una visión más detallada de las relaciones de similitud entre los distintos trazados.

Este enfoque integral permite no solo una mejor comprensión de la diversidad y características estructurales de los circuitos de Fórmula 1, sino también sugiere posibles impactos estratégicos en la dinámica de carrera. La información derivada puede emplearse para decisiones relacionadas con la configuración del monoplaza, como la carga aerodinámica, la gestión del rendimiento del motor y el desgaste de neumáticos. A su vez, esta caracterización ofrece una herramienta valiosa tanto para ingenieros y estrategas como para analistas y aficionados, proporcionando una forma accesible de interpretar por qué ciertas elecciones técnicas y estratégicas se toman en función del tipo de circuito.

Referencias

- [1] S. Raschka, V. Mirjalili, Python machine learning: Machine learning and deep learning with Python, scikit-learn, and TensorFlow (2nd ed.), Packt Publishing (2017).
- [2] C. Chatfield, The analysis of time series: An introduction (6th ed.), CRC Press (2003).
- [3] D. Morán Montero, Análisis de datos de telemetría de Fórmula 1 con técnicas de Deep Learning, Universidad de Extremadura (2022).
- [4] G. Strang, Linear algebra and learning from data, Massachusetts Institute of Technology (2019).
- [5] J.L. Devore, Probabilidad y Estadísticas para Ingeniería y Ciencias, Cengage Learning, (2008).
- [6] <https://docs.fastf1.dev/>, Biblioteca con datos de F1

UTILIZACIÓN DE TÉCNICAS DE MACHINE LEARNING PARA LA DETECCIÓN DE RANSOMWARE EN RED DE BITCOIN

Yanina Ditz

Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Pampa, Argentina
yaninaditz@ing.unlpam.edu.ar

La acelerada transformación digital a nivel global ha convertido la seguridad de la información en una prioridad fundamental, frente al incremento en la complejidad y frecuencia de los ciberataques, en particular los de tipo ransomware. Esta clase de amenazas puede ocasionar pérdidas de datos críticos e interrumpir seriamente las

operaciones. En este contexto, las blockchains de Bitcoin se han transformado en objetivos atractivos para los ciberdelincuentes debido a su carácter descentralizado y pseudoanónimo, lo que dificulta la recuperación de activos comprometidos. Ante esta necesidad, nuestra investigación se enfoca en desarrollar técnicas eficaces de detección temprana de ransomware en blockchains de Bitcoin, con el fin de mitigar estas amenazas de gran impacto. Se adaptan y comparan tres algoritmos de aprendizaje automático: regresión logística (RL), eXtreme Gradient Boosting (XGBoost) y una red neuronal Long Short Term Memory (LSTM), evaluando su eficiencia en la clasificación de transacciones como legítimas o asociadas a ransomware. En este trabajo se utiliza un conjunto de datos reales de transacciones de Bitcoin y se destaca la importancia de técnicas como el balanceo de datos para mejorar el rendimiento del modelo. El modelo LSTM alcanzó un rendimiento destacado tanto en el desbalanceo como con los datos balanceados, registrando un 99,9 % en exactitud, precisión, sensibilidad y F1-score, con una tasa de error mínima de $8,7 \cdot 10^{-6}$. Por su parte, el modelo XGBoost obtuvo métricas cercanas al 97 %. En este caso, la aplicación de técnicas de balanceo resultó determinante para optimizar la sensibilidad y el F1-score, corrigiendo las deficiencias presentes en el dataset original. La matriz de confusión asociada mostró una tasa de error de 3 %. En contraste, RL presentó mejoras moderadas, alcanzando una exactitud del 61 %, una precisión del 60 %, una sensibilidad del 68 % y un F1-score del 63 %, aproximadamente. Si bien el balanceo contribuyó a una mejora en el desempeño, este último modelo continuó siendo el de menor rendimiento relativo, con una tasa de error de 39 %. En síntesis, los resultados demuestran que los modelos más complejos, como LSTM y XGBoost, exhiben una capacidad superior en la detección de ransomware, lo que subraya su potencial para fortalecer la seguridad digital.

Trabajo en conjunto con Gabriela Minetti (Universidad Nacional de La Pampa, Argentina).

ACCM: CLUSTERS BASADOS EN ARQUETIPOS Y PROFUNDIDADES

Lucas Fernández Piana

Universidad de San Andrés - Departamento de Matemática y Ciencias, Argentina
lucasfernandezpiana@gmail.com

Comprender cómo las masas de viento transportan microorganismos hacia la Antártida es clave para estudiar procesos de dispersión biológica en regiones polares. Este trabajo aborda el problema de agrupar miles de retrotrayectorias atmosféricas, simuladas con el sistema HYSPLIT que llegan a la Península de Byers. Estas trayectorias modelan el transporte de microorganismos aeronavegantes, pero su comparación mediante el uso de distancias implica un alto costo computacional, particularmente la distancia de Fréchet. Nuestra propuesta para superar las limitaciones computacionales es un método de core cluster ACCM (Archetypes Core Clustering Method). El algoritmo combina una profundidad integrada adaptada para este tipo de trayectorias con representaciones arquetípicas con el fin de reducir drásticamente la cantidad de comparaciones requeridas.

Trabajo en conjunto con Fernando Ornat, (Universidad de San Andrés, Argentina) y Marcela Svarc (Universidad de San Andrés y CONICET, Argentina).

ROBUSTEZ EN EL SIMPLEX

Marina Fragalá

Instituto de Ciencias, Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina
mfragala@campus.ungs.edu.ar

Los datos composicionales son vectores de coordenadas positivas con suma fija (sin pérdida de generalidad se puede suponer 1). Tienen su representación geométrica en el Simplex. En 1897 Pearson K. [1] puso de manifiesto en su artículo "On a form of spurious correlation", la inadecuación de los métodos estadísticos clásicos para el estudio de estos datos. En 1982 Aitchison J. [2] definió en el Simplex una geometría que le otorga las propiedades de un espacio de Hilbert. Existen isomorfismos que transforman las composiciones del Simplex de d partes en $\mathbb{R}^{d-1}$ (con la geometría euclídea usual) y de esta manera es posible hacer ajustes clásicos. Una de las primeras y más conocidas distribuciones en el Simplex es la Dirichlet. Una generalización de esta distribución se debe a Graf M. [3] y la llamó Beta Generalizada Simplicial (SGB) que permite una gama más amplia de ajustes. La misma autora desarrolló, a partir de una muestra de covariables $x_1, \dots, x_n$, un modelo lineal generalizado para estimar por máxima verosimilitud los parámetros de dicha distribución. En nuestro trabajo proponemos un método robusto y eficiente para resolver el problema de la estimación de los parámetros de la SGB. Para esta propuesta utilizamos la estimación robusta τ de Ben M. y Yohai V. [4] y adaptamos el método de detección de outliers de Gervini D. y Yohai V. [5]. A partir de estos procedimientos construimos un estimador robusto inicial. Luego entre el estimador robusto inicial y el de máxima verosimilitud

de Graf M., planteamos una combinación convexa parecida a la propuesta por Marazzi A. [6]. El parámetro de ajuste lineal de la combinación convexa se busca de tal modo que haya un balanceo entre robustez y eficiencia. Si no hay outliers, la combinación convexa devuelve el estimador de máxima verosimilitud. Si hay outliers, prevalece el robusto. Mediante estudios de simulación de Monte Carlo, nuestro estimador demostró ser suficientemente robusto para muestras contaminadas y al mismo tiempo altamente eficiente en muestras limpias. Mostraremos sus propiedades asintóticas y lo compararemos con otros estimadores en un ejemplo con datos reales.

Trabajo en conjunto con Alfio Marazzi (Université de Lausanne, Suiza) y Marina Valdora (Instituto de Ciencias, Universidad de Buenos Aires y CONICET, Argentina).

Referencias

- [1] K. Pearson, On a form of spurious correlation, Proc. Roy. Soc., 60 (1897), 489–498.
- [2] J. Aitchison, The statistical analysis of compositional data, Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 44 (1982), 139–160.
- [3] M. Graf, Regression for compositions based on a generalization of the Dirichlet distribution, Statistical Methods and Applications (2020), 913–936.
- [4] M. Ben, E. Martínez, V. Yohai, Robust estimation for the multivariate linear model based on a Tau-scale, Journal of Multivariate Analysis, 97, no. 7 (2006), 166–1622.
- [5] D. Gervini, V. Yohai, A class of robust and fully efficient regression estimators, The Annals of Statistics, 30, no. 2 (2002), 583–616.
- [6] A. Marazzi, Improving the efficiency of robust estimators for the generalized linear model, Stats, MDP, 4, no. 1 (2021), 88–107.

K-MEDIAS CON DISTANCIAS APRENDIDAS

Pablo Groisman

Universidad de Buenos Aires e IMAS-CONICET, Argentina
pgroisma@dm.uba.ar

Consideraremos la consistencia de las k -medias (de Fréchet) en espacios métricos cuando las distancias son desconocidas y deben estimarse a partir de los datos. Mostraremos que las k -medias empíricas son consistentes si los espacios métricos empíricos convergen al poblacional en el sentido medido de Gromov-Hausdorff (mGH). Como consecuencia, obtenemos (a) consistencia de las k -medias calculadas con distancias de Fermat, (b) consistencia de las k -medias calculadas con el estimador de distancia geodésica de Isomap y (c) consistencia del k -baricentro empírico de Wasserstein calculado con estimadores basados en muestras de las medidas involucradas. Para (a) y (b), estos resultados son nuevos incluso para el caso $k = 1$, hasta donde sabemos. Para (c), son bien conocidos para $k = 1$, pero no para $k > 1$, hasta donde sabemos. No asumimos la unicidad del baricentro, pero cuando éste es único, los resultados son más fuertes.

Trabajo en conjunto con Matthieu Jonckhere (LAAS, CNRS), Jordan Serres (Sorbonne) y Mariela Sued (Universidad de San Andrés).

DISTRIBUCIÓN ASINTÓTICA DEL ESTIMADOR PLS EN ALTA DIMENSIÓN

Miguel Andrés Marcos

FIQ, CONICET - UNL, Argentina
mmarcos@santafe-conicet.gov.ar

El método de PLS fue introducido en 1983 [7] como un método de estimación en un modelo lineal en el caso de que el número de predictores es más grande que el tamaño de muestra, sin una contraparte poblacional correspondiente. Es uno de los métodos de predicción más importantes de regresión lineal en el área de la quimiometría, sin embargo su naturaleza algorítmica dificultó el estudio de sus propiedades estadísticas, con la consecuencia de que PLS fue considerada durante mucho tiempo como una técnica que es útil, pero cuyas propiedades estadísticas son elusivas.

En 1990 Helland [6] mostró que en un contexto de regresión lineal, el algoritmo PLS en realidad obtiene una expresión cerrada para la estimación de parámetros, obteniendo también una correspondiente fórmula

para la versión poblacional. Finalmente en un trabajo de Cook, Helland y Su [5] se describe un modelo de reducción conocido como envelope regression y se prueba una conexión entre este y PLS.

En 2010, Chun y Keles [2] probaron que el estimador PLS era consistente cuando $p/n \rightarrow 0$ pero inconsistente en otros casos, bajo ciertas condiciones (“sparsity”). Por esta razón se limitó la discusión al estudio de propiedades del estimador muestral para el caso $n > p$ con p fijo y $n \rightarrow \infty$, mientras que el caso $p > n$ quedó abierto. Más adelante, Cook y Forzani [3,4] estudiaron este modelo en un contexto de alta dimensión y obtuvieron resultados sobre la consistencia n, p -asintótica bajo condiciones distintas de las de Chun y Keles (“abundance”).

Basándose en los trabajos [5,3], en [1] se estudiaron condiciones para obtener la distribución n, p -asintótica del estimador para el caso PLS de una componente. En esta charla presentaremos la distribución n, p -asintótica del estimador PLS en el caso general, a partir de los resultados de consistencia de [4].

Trabajo en conjunto con R. Dennis Cook (University of Minnesota) y Liliana Forzani (FIQ, CONICET - UNL, Argentina).

Referencias

- [1] J. Basa, D. Cook, L. Forzani, M. Marcos, Asymptotic distribution of one-component partial least squares regression estimators in high dimensions, *Canadian Journal of Statistics*, 52 (2024), 118–130.
- [2] H. Chun, S. Keles, Sparse partial least squares regression for simultaneous dimension reduction and variable selection, *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, 72, no. 1 (2010), 3–25.
- [3] R.D. Cook, L. Forzani, Big data and partial least-squares prediction, *Canadian Journal of Statistics*, 46, no. 1 (2018), 62–78.
- [4] R.D. Cook, L. Forzani, Partial least squares prediction in high-dimensional regression, *Ann. Statist.* 47, no. 2 (2019), 884–908.
- [5] R.D. Cook, I.S. Helland, Z. Su, Envelopes and partial least squares regression, *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, 75 (2013), 851–877.
- [6] I.S. Helland, Partial least squares regression and statistical models, *Scandinavian Journal of Statistics*, 17, no. 2 (1990), 97–114.
- [7] S. Wold, H. Martens, H. Wold, The multivariate calibration problem in chemistry solved by the pls method, In Kågström, B. and Ruhe, A., editors, *Matrix Pencils*, 286–293.

THREE-GROWTH-CURVE MODEL: UNA PROPUESTA DE ESTIMACIÓN BASADA EN I – Y B –SPLINES

Alejandra Mercedes Martínez

Universidad Nacional de Luján y CONICET, Argentina

ale_m_martinez@hotmail.com

En este trabajo presentaremos una familia de estimadores basada en mínimos cuadrados que utiliza aproximaciones por I –splines y B –splines para modelos de crecimiento multivariados donde las estimaciones de las variables respuesta son censuradas.

Supongamos que se tienen vectores independientes e idénticamente distribuidos $(\mathbf{Y}_i^t, X_i)^t$, $1 \leq i \leq n$, cada uno con la misma distribución que $(\mathbf{Y}^t, X)^t$, con $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)^t \in \mathbb{R}^3$ y X con soporte en el intervalo $[a, b]$. Proponemos el modelo 3GCM (Three-Growth-Curve Model) en el que la relación entre las respuestas y la covariable está dada por $(Y_1, Y_2, Y_3)^t = (f_1(X) + \varepsilon_1, f_2(X) + \varepsilon_2, f_3(X) + \varepsilon_3)^t$, donde los errores ε_1 , ε_2 y ε_3 son independientes entre sí e independientes de la covariable X . Además, las funciones f_1 , f_2 y f_3 satisfacen las siguientes condiciones: (1) f_1, f_2 y $f_3 : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ son suficientemente suaves; (2) f_1, f_2 y f_3 son funciones no decrecientes; y (3) $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x) \leq 1$, $\forall x \in [a, b]$.

Ilustraremos el comportamiento de la propuesta de estimaciones censuradas mediante un estudio de simulación, además de presentar una motivación real de la industria minera en la cuantificación del proceso de separación de granulometría de partículas vía hidrociclón, siendo $\mathbf{Y} = (Y_1 = \text{'Alimentación'}, Y_2 = \text{'Rebose'}, Y_3 = \text{'Descarga'})^t$.

Trabajo en conjunto con Diego Nascimento (NEOMA Business School, Francia).

MEDIDAS DE PROFUNDIDAD LOCAL EN LA ESFERA

Verónica Moreno

Universidad de San Andrés, Argentina
vmoreno@udesa.edu.ar

Las medidas de profundidad local son herramientas importantes en estadística no paramétrica. Permiten identificar puntos centrales y detectar posibles valores atípicos en datos multivariados de forma robusta y flexible.

Motivadas por estudios recientes en biogeografía de microorganismos aerotransportados [1], los autores definen una medida de profundidad local sobre el círculo S^1 , donde la centralidad puede evaluarse mediante

$$LD^{\beta}(\theta, P) = \frac{\pi^2}{\pi^2 + \lambda_{\beta, \theta}^+ \lambda_{\beta, \theta}^-},$$

donde

$$\lambda_{\beta, \theta}^+ = \inf\{\lambda > 0 : P(\theta \leq \Theta \leq \theta + \lambda) \geq \frac{\beta}{2}\},$$

$$\lambda_{\beta, \theta}^- = \inf\{\lambda > 0 : P(\theta - \lambda \leq \Theta \leq \theta) \geq \frac{\beta}{2}\}.$$

Cuando los datos tienen una naturaleza direccional o están en superficies como la esfera S^2 , extender estas ideas se vuelve más complejo.

En esta charla presentamos propuestas para extender esta noción y medir profundidad local en S^2 . La idea central es capturar la distribución local alrededor de un punto en la esfera, usando construcciones como ecuadores, hemisferios y divisiones en gajos. Presentamos resultados en datos sintéticos. Muchas de estas medidas se generalizan a S^p .

Trabajo en conjunto con Lucas Fernández Piana (Universidad de San Andrés, Argentina) y Marcela Svarc (Universidad de San Andrés y CONICET, Argentina).

Referencias

- [1] L. Fernandez-Piana, A. Justel, M. Svarc, Integrated Depth for Trajectories of Airborne Microorganisms to Antarctica. Será publicado en Annals of Applied Statistics.

METHODS FOR COMPARING ROC CURVES UNDER THE PRESENCE OF COVARIATES

Juan Carlos Pardo-Fernández

Universidade de Vigo, España
juancp@uvigo.gal

The Receiver Operating Characteristic (ROC) curve is a widely used statistical tool for assessing the performance of a binary classification procedure based on a continuous marker. It is particularly relevant in medical research, where the objective is to distinguish healthy and diseased individuals. The ROC curve is constructed by combining, for each potential threshold in the support of the marker, the rate of diseased subjects correctly classified as diseased, or sensitivity, against the rate of healthy subjects incorrectly classified as diseased, that is, 1 - specificity (see, for example, [1]).

In many practical applications, covariates related to the marker are available. In such cases, it becomes important to evaluate the influence that those covariates might have in the performance of the marker in terms of classification ability. Two extensions of the ROC curve have been proposed in the literature: the covariate-specific ROC curve, which is defined in terms of conditional distributions, and the covariate-adjusted ROC curve, which can be seen as a sort of average of the covariate-specific curves. See [2] for a review on the topic.

In this talk, we will present two methods to compare ROC curves in the presence of covariates. First, a test to compare covariate-specific ROC curves will be discussed. In practice, this test would allow to decide if, for a given value of the covariate, the classification capabilities of several markers differ. Second, a method for testing the equality between the ordinary ROC curve and the covariate-adjusted ROC curve will be introduced. This test can be employed to evaluate the convenience of incorporating the covariate to the ROC analysis. The proposed methodologies rely on nonparametric estimation of the involved ROC curves and bootstrap resampling plans to approximate the null distribution of the test statistics. The talk is based on [3], [4] and [5].

Trabajo en conjunto con Arís Fanjul-Hevia (Universidad de Oviedo, España) y Wenceslao González Manteiga (Universidade de Santiago de Compostela, España).

Referencias

- [1] C. Nakas, L. Bantis, C. Gatsonis, ROC analysis for classification and prediction in practice, Chapman and Hall/CRC (2023).
- [2] J.C. Pardo-Fernández, M.X. Rodríguez-Álvarez, I. Van Keilegom, A review on ROC curves in the presence of covariates, REVSTAT Statistical Journal, 12 (2014), 21–41.
- [3] A. Fanjul-Hevia, W. González-Manteiga, J.C. Pardo-Fernández, A non-parametric test for comparing conditional ROC curves, Computational Statistics & Data Analysis, 157 (2021), 107146.
- [4] A. Fanjul-Hevia, J.C. Pardo-Fernández, I. Van Keilegom, W. González-Manteiga, A test for comparing conditional ROC curves with multidimensional covariates, Journal of Applied Statistics, 51 (2024), 87–113.
- [5] A. Fanjul-Hevia, J.C. Pardo-Fernández, W. González-Manteiga, A new test for assessing the covariate effect in ROC curves, Statistics in Medicine, 44 (2025), e70284.

TIGHTNESS OF THE COVER TIME OF WIRED PLANAR DOMAINS

Santiago Saglietti

Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile
sasaglietti@mat.uc.cl

We consider a continuous time simple random walk (CTSRW) on a finite subset of the square lattice with wired boundary conditions. This CTSRW transitions at edge rate 1 on the graph obtained from the (lattice) closure of this subset by contracting its boundary into one vertex. We study the cover time of such a walk, namely the time it takes for the walk to visit all vertices in the graph. Taking a sequence of subsets obtained as scaled lattice versions of a nice planar domain, we show that the square root of the cover time, when normalized by the size of the corresponding subset, is tight around an explicit function $f(N)$, where N denotes the scale parameter. Our proof is based on a delicate comparison of the local time field of the walk with the extremal landscape of the discrete Gaussian Free Field on the same subset combined with sharp asymptotics for the coupon collector problem. .

Joint work with Oren Louidor (Technion Israel Institute of Technology).

REDUCCIÓN DE DIMENSIÓN EN “DIFERENTES SABORES”

Mariela Sued

Universidad de San Andrés - CONICET, Argentina
 marielasued@gmail.com

Es bien sabido que, en estadística, la reducción de dimensión ocupa un lugar central. En esta charla exploraremos distintos enfoques para reducir la dimensión, cada uno pensado para abordar un problema en particular. En algunos casos, la elección de la reducción adecuada se plantea como un problema de selección de modelo, donde la penalización ayuda a identificar el modelo correcto. En otros, reducimos la dimensión para mejorar la predicción, combinando ideas de reducción suficiente con la flexibilidad de los métodos no paramétricos. Finalmente, discutiremos la reducción en contextos de causalidad y transfer learning, donde los datos pueden ser abundantes, pero son los modelos los que nos permiten predecir más allá de lo que observamos.

ESTRUCTURA Y SEGMENTACIÓN DE LOS HOGARES RESIDENTES EN DEPARTAMENTOS EN CAPITAL (SAN JUAN - ARGENTINA)

Ernesto Torres

Facultad de Filosofía, Humanidades y Artes, Departamento de Geografía, Universidad Nacional de San Juan, Argentina
 leoneltganga@gmail.com

El presente trabajo tiene como objetivo general analizar la estructura y segmentación de los hogares que residen en departamentos en el departamento Capital de la provincia de San Juan (Argentina), con el fin de identificar si estos presentan condiciones de vida adecuadas. La elección del tema se fundamenta en el creciente proceso de verticalización urbana en las ciudades, asociado a transformaciones en el mercado inmobiliario, el uso del suelo, las políticas de vivienda de los gobiernos y los modos de habitar. En este contexto, resulta pertinente indagar si los hogares que habitan en departamentos —una tipología habitacional cada vez más presente en el tejido urbano de Capital— acceden a condiciones de vida que garanticen bienestar y habitabilidad, considerando variables como el tamaño del hogar, calidad de los materiales, condiciones sanitarias, hacinamiento y otros indicadores socioeconómicos relevantes. La metodología se basa en el análisis de datos secundarios provenientes del Censo Nacional de Población, Hogares y Viviendas 2022, aplicando técnicas de análisis estadístico multivariado, que permiten identificar perfiles diferenciados de hogares y sus respectivas condiciones habitacionales. Los resultados esperados contribuirán a una comprensión más precisa de la heterogeneidad residencial en la ciudad y podrán servir de insumo para el diseño de políticas urbanas y habitacionales más equitativas.

Trabajo en conjunto con Adriana Mallea (Universidad Nacional de San Juan, FFHA, Departamento de Matemática, Argentina); Leonel Ganga (Universidad Nacional de San Juan, FCFN, Dpto. de Matemática y Química, Argentina).

Referencias

- [1] S. Aneas, S. Cattapan, La población de San Juan. Su estructura y su dinámica. San Juan: EFU, (2008).
- [2] J.P. Celemín, G.A. Velázquez, Calidad de vida y pobreza en la Argentina (2010). Aproximación a escala provincial, Journal de Ciencias Sociales, (4) (2015).
- [3] G.A. Velázquez, Calidad de vida y fragmentación en la Argentina. La herencia de los noventa, Revista CESLA, Universidad de Varsovia, (2001).
- [4] J. Torres, J. Carrizo, Las viviendas en el Aglomerado del Gran San Juan según ingresos de los hogares. Aplicaciones desde el análisis simbólico de datos, Revista Posición, INIGEO, Universidad Nacional de Luján, No. 4, (2020).
- [5] J. Aldás, E. Uriel, Análisis multivariante aplicado con R. Ediciones Paraninfo, (2017).

TIEMPO DE COBERTURA DEL ÁRBOL DE GALTON-WATSON SUPERCRÍTICO

Joaquin Ezequiel Viera

Universidad de Buenos Aires, Argentina
joaquine.viera@gmail.com

En esta charla exploraremos la sorprendente conexión entre dos objetos de estudio en principio dispares: el tiempo de cobertura de un paseo aleatorio sobre un grafo y el Gaussian Free Field (GFF) definido sobre el mismo. A través de resultados recientes, veremos cómo es posible estimar la esperanza del tiempo de cobertura a partir del análisis de los valores extremos del GFF.

Con el objetivo de estudiar este fenómeno en el contexto de árboles aleatorios, nos enfocaremos en el caso del árbol de Galton–Watson. Introduciremos tres conceptos clave: el propio árbol de Galton–Watson, que será el soporte de nuestro paseo aleatorio; el tiempo de cobertura, que mide cuánto tarda dicho paseo en visitar todos los vértices; y el GFF, un campo gaussiano definido sobre el grafo. Finalmente, discutiremos cómo se relacionan estos objetos y cómo el estudio del GFF nos permite obtener información precisa sobre el comportamiento del tiempo de cobertura.

Trabajo en conjunto con Inés Armendáriz (Universidad de Buenos Aires) y Santiago Saglietti (Pontificia Universidad Católica de Chile).

Referencias

- [1] J. Ding, Asymptotics of cover times via Gaussian free fields: bounded-degree graphs and general trees, *Ann. Probab.* 42.2 (2014), 464–496.
- [2] L. Addario-Berry, B. Reed, Minima in branching random walks, *The Annals of Probability* 37.3 (2009), 1044–1079.
- [3] N. Eisenbaum, H. Kaspri, M.B. Marcus, J. Rosen, Z. Shi. A Ray-Knight theorem for symmetric Markov processes, *Ann. Probab.* 28.4 (2000), 1781–1796.
- [4] H. Kesten, B.P. Stigum, A limit theorem for multidimensional Galton-Watson processes, *Ann. Math. Stat.* 37 (1966), 1211–1223.

UNIFYING WILD TYPE AND MUTANT PROTEOMIC PROFILES THROUGH CLUSTERING

Nelson Villagra

Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco (UNPSJB), Argentina
ntvillagra@ing.unp.edu.ar

Rhodococcus jostii RHA1 is an oleaginous bacterium that accumulates triacylglycerols (TAGs) under nitrogen deprivation. The nitrogen lipid regulator (protein NlpR) controls genes related to nitrogen and lipid metabolism and is expressed only under these conditions. To investigate its role in TAG accumulation, we analyzed proteomic datasets from wild-type and *nlpR* mutant strains. Clustering analysis identified protein groups associated with NlpR, revealing potential regulatory interactions. These findings could help elucidate the mechanisms of TAG biosynthesis in oleaginous bacteria.

Trabajo en conjunto con Héctor Álvarez, Roxana Silva, Martín Hernández (Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco - CONICET, Argentina) y Gabriel Soto (Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco, Argentina).

MÉTODOS DE CLASIFICACIÓN DE IMÁGENES SATELITALES PARA LA DETECCIÓN DE CAMBIOS EN LA URBANIZACIÓN DE LA CIUDAD DE SANTA ROSA, LA PAMPA, ARGENTINA.

Laura Beatriz Wagner

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Universidad Nacional de La Pampa, Argentina
lalywagner@gmail.com

En los últimos años, la ciudad de Santa Rosa, ubicada en La Pampa, Argentina, ha experimentado un crecimiento urbano acelerado que ha generado importantes transformaciones en su estructura territorial. Estos cambios, que incluyen la expansión de la urbanización y la reducción de espacios verdes, han contribuido al aumento de la contaminación y de las temperaturas locales.

A partir de imágenes satelitales ópticas provistas por la misión Landsat, es posible analizar la cobertura del suelo en distintas regiones, incluyendo categorías como urbanización, cuerpos de agua y vegetación. Estas imágenes permiten aplicar técnicas de Teledetección y análisis estadístico para identificar, clasificar y cuantificar las transformaciones en el uso del suelo a lo largo del tiempo.

Para el mapeo de coberturas en la ciudad se utilizan técnicas de clasificación supervisadas y no supervisadas. Entre las técnicas supervisadas más empleadas se encuentra el análisis discriminante cuadrático, que clasifica cada píxel de forma individual sin considerar su contexto espacial. Por otro lado, las Modas Condicionadas Iteradas, derivadas de modelos de Markov, constituyen un enfoque contextual que incorpora la información de los píxeles vecinos. Comparando los coeficientes de clasificación obtenidos por cada método, es posible evaluar cuál de ellos ofrece mejores resultados para representar la dinámica territorial de Santa Rosa.

Finalmente, los cambios ocurridos entre 2013 y 2023 pueden detectarse a través de dos enfoques principales: mediante la comparación directa de imágenes satelitales (diferencia de píxeles) o a partir de la comparación entre los mapas generados por los distintos clasificadores.

DOS DÉCADAS DE CIENCIA DE DATOS: ACIERTOS, ERRORES Y APRENDIZAJE

Guillermo Watson

Lovelytics, Argentina

guillermo.watson@lovelytics.com

En los últimos veinte años, la ciencia de datos y la IA pasaron de ser promesas a convertirse en el corazón de la toma de decisiones empresariales. En esta charla revisaremos qué aprendimos en ese recorrido: los aciertos que impulsaron proyectos exitosos, los errores más comunes que frenaron iniciativas y las lecciones prácticas que hoy permiten generar verdadero valor a partir de los datos. A partir de experiencias reales en distintos sectores, exploraremos cómo evolucionó la aplicación de modelos analíticos, qué desafíos persisten al llevarlos a producción y cómo las organizaciones pueden prepararse para la próxima década de innovación en datos e IA.

LA DESCOMPOSICION POR SLOTS DE UN MOVIMIENTO BROWNIANO

Facundo Zanola

Universidad de Buenos Aires, Argentina

facuzanola@gmail.com

I. Armendáriz, P. Blanc, P. Ferrari y D. Gabrielli mostraron que en el ball-box system espacio-continuo, la dinámica coincide con aplicar la transformación de Pitman a la representación mediante funciones zig-zag del modelo. Además, cuando se consideran distribuciones iniciales invariantes por la dinámica, la descomposición por slots de la estructura de solitones produce un proceso de Poisson en el cual la evolución se da por una traslación jerárquica de puntos.

En este trabajo extendemos la descomposición por slots de la estructura solitónica para el movimiento browniano. Mostramos que la representación por slots también produce un proceso de Poisson en el plano, del cual es posible recuperar la trayectoria original casi seguramente. En particular, la transformación de Pitman aplicada a la trayectoria resulta invariante en la representación por slots, recuperando un resultado previo de J. Pitman de 1975.

Trabajo en conjunto con Inés Armendáriz, Pablo Blanc, Pablo A. Ferrari (Universidad de Buenos Aires, Argentina) y Davide Gabrielli (Universidad de L'Aquila, Italia).

Geometría y Teoría de Lie

CHARACTERIZATION OF CONTACT LIE SUPERALGEBRAS

María Alejandra Alvarez
Universidad de Antofagasta, Chile
maalvarez3@gmail.com

We present the concept of finite-dimensional complex homogeneous contact Lie superalgebra. The $\mathbb{Z}_2$ -graded homogeneous cases are studied in detail producing some relevant examples. We characterize homogeneous contact Lie superalgebras in terms of their Berezinian and their structure matrix. These Lie superalgebras are also characterized by means of deformation theory, and as an application we obtain the complete classification of low dimensional Lie superalgebras of this type.

Trabajo en conjunto con María del Carmen Rodríguez-Vallarte y Gil Salgado (Universidad Autónoma de San Luis Potosí).

Referencias

- [1] M. A. Alvarez, M. C. Rodríguez-Vallarte, G. Salgado. Characterization of contact Lie superalgebras, Journal of Geometry and Physics 196, (2024), 105058. <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2023.105058>

NILVARIEDADES COMPLEJAS CASI ABELIANAS

Romina Melisa Arroyo
Universidad Nacional de Córdoba & CONICET, Argentina
romina.arroyo@gmail.com

En esta charla estudiaremos nilvariedades compactas con estructuras complejas invariantes, es decir, cocientes compactos de grupos de Lie reales simplemente conexos nilpotentes por subgrupos discretos equipados con estructuras complejas que provienen de estructuras complejas invariantes a izquierda en los grupos de Lie. Probaremos que en el caso de grupos de Lie nilpotentes casi abelianos, la estructura compleja es única (salvo equivalencia) y discutiremos algunas consecuencias de la cohomología.

Trabajo en conjunto con Adrián Andrada, María Laura Barberis (Universidad Nacional de Córdoba y CONICET, Argentina), Sönke Rollenske y Konstantin Wehler (Universidad de Marburg, Alemania).

CLASIFICACIÓN DE ÁLGEBRAS DE LIE NILPOTENTES

Giovanni Bazzoni
Università degli Studi dell'Insubria, Italia
giovanni.bazzoni@uninsubria.it

La clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes es un problema wild: no hay esperanza de resolverlo en general. Sin embargo, en dimensión baja sí es posible clasificarlas. Por ejemplo, la clasificación sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ en dimensión ≤ 6 es clásica, y en los últimos años se ha obtenido una clasificación en dimensión 7. Un discurso aparte merece la clasificación sobre $\mathbb{Q}$, relevante desde el punto de vista de obtener cocientes compactos de los grupos de Lie correspondientes. En esta charla presentamos dichos resultados y extendemos ciertas técnicas para obtener una clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes en el paso 2 en dimensión 8 sobre cuerpos algebraicamente cerrados de característica cero.

Trabajo en conjunto con Juan Rojo (Universidad Politécnica de Madrid).

ISOSPECTRALIDAD ENTRE FORMAS ESPACIALES ESFÉRICAS CON GRUPO FUNDAMENTAL NO CÍCLICO.

Mauro Colantonio

Instituto de Matemática (INMABB), Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur (UNS)-CONICET, Bahía Blanca, Argentina, Argentina
maucolantonio@hotmail.com

En la primera parte de la charla definiremos formas espaciales esféricas y cuándo dos de estas se dicen isospectrales, para luego probar algunos invariantes espectrales nuevos. Luego se probará que dos formas espaciales esféricas isospectrales con grupo fundamental no cíclico no necesariamente tienen grupo fundamental isomorfo.

MÉTRICAS BTP HERMITIANAS G-INVARIANTES EN VARIEDADES BANDERA

Martiniano Faure

Universidad Nacional de Córdoba, FAMAF, Argentina
martiniano.faure@mi.unc.edu.ar

Se sabe que en una variedad Hermitiana (M, J, g) existe una única conexión ∇^b tal que la métrica g y la estructura compleja J son paralelas con respecto a ∇^b , y cuya torsión T^b está dada por $g(T^b(X, Y), Z) = d\omega(JX, JY, JZ)$, donde $\omega(X, Y) = g(JX, Y)$. Esta recibe el nombre de conexión de Bismut.

En el contexto de los espacios homogéneos compactos $(G/K, J, g)$ con estructura Hermitiana G -invariante, aún no se han clasificado las métricas con torsión de Bismut paralela ($\nabla^b T^b = 0$). El objetivo de esta charla es abordar el problema para las variedades banderas, donde $K = T$ es un toro maximal de G .

Trabajo en conjunto con Jorge Lauret (Universidad Nacional de Córdoba, Argentina; CIEM).

HOMOGENEIDAD EN EL PROBLEMA DE INTEGRACIÓN DE CONEXIONES PRINCIPALES

Javier Fernández

Instituto Balseiro, Argentina
jfernand@ib.edu.ar

Las conexiones discretas asociadas a un G -fibrado principal son objetos geométricos que, en algún sentido, "discretizan" la noción de conexión principal. Toda conexión discreta puede ser "derivada", dando lugar a una conexión principal. El Problema de Integración consiste en describir la preimagen de una conexión principal dada (o sea, sus "integrales").

En [1] mostramos que el Problema de Integración siempre puede ser resuelto y que, salvo en casos especiales, la solución no es única.

En esta charla recordaremos estas ideas y veremos que el espacio de conexiones discretas -con un dominio fijo dado- en un fibrado principal es un H -torsor para un cierto grupo H . Esta estructura es análoga a la que se tiene en el espacio de conexiones principales sobre el mismo fibrado principal, cuando se las ve como un espacio afín. Más aún, el proceso de derivación aludido previamente resulta ser un morfismo de torsores (correspondiente a distintos grupos).

Referencias

- [1] J. Fernández y F. Kordon, "The Integration Problem for principal connections", J. Geom. Phys. 216 (2025), p. 105566. doi: 10.1016/j.geomphys.2025.105566.
-

LA CONDICIÓN LEFSCHETZ EN SOLVARIEDADES CASI ABELIANAS.

Agustín Garrone

CIEM - UNC - CONICET, Argentina

agustin.garrone@unc.edu.ar

Informalmente hablando, se dice que una variedad simpléctica compacta (M, ω) satisface la condición Lefschetz si, para cierta noción de armonicidad de formas diferenciales en M definida únicamente a partir de ω , toda clase de cohomología de de Rham en M admite un representante ω -armónico. Son, por lo tanto, variedades simpléticas en las que se puede desarrollar una teoría de Hodge análoga a la que existe en el caso de variedades Kähler compactas. Dado que se trata de una propiedad muy restrictiva, los ejemplos explícitos son escasos, y más aún los criterios algebraicos sencillos para determinar cuándo una variedad simpléctica compacta la satisface.

En esta charla se discute la condición Lefschetz en el contexto de solvariedades compactas; es decir, cocientes de la forma G/Γ , donde G es un grupo de Lie soluble simplemente conexo y $\Gamma \subset G$ es un subgrupo discreto y co-compacto. Se presta especial atención al caso en que G es isomorfo a un producto semidirecto $\mathbb{R} \ltimes_{\phi} \mathbb{R}^{2n-1}$, en cuyo caso se lo denomina grupo casi abeliano. En esta situación, la estructura de G queda esencialmente determinada por la matriz A que corresponde con la diferencial de la acción ϕ en $t = 0$.

Combinando resultados conocidos con aportes originales, se obtienen las siguientes dos caracterizaciones (enunciadas de forma aproximada): bajo condiciones no muy restrictivas sobre G y Γ , la variedad G/Γ satisface la condición Lefschetz si y sólo si la matriz A es semisimple, sin importar qué forma simpléctica se considere; en el caso general, pero restringiéndose al estudio de formas simpléticas invariantes, la condición Lefschetz se cumple si y sólo si A es semisimple.

Si el tiempo lo permite, se mencionarán también algunas conjeturas y preguntas abiertas.

Trabajo en conjunto con Adrián Andrada (Universidad Nacional de Córdoba - CONICET, Argentina).

TORSIÓN ANALÍTICA Y DE REIDEMEISTER EN EL CONTEXTO DE ACCIONES DE GRUPOS

Gerson Gutierrez

Universidad Nacional de Córdoba, Argentina

gersonhdd@gmail.com

Sea M una variedad diferenciable compacta y orientable. La torsión de Reidemeister (o R-torsión) es un invariante topológico definido de manera combinatoria a partir de una triangulación de la variedad y de una representación de su grupo fundamental. Por otro lado, la torsión analítica fue introducida por Ray y Singer como un análogo definido en términos del espectro del operador de Laplace [1], y se preguntaron y llegaron a conjeturar que estos dos invariantes coinciden. De manera independiente, Cheeger y Müller demostraron esto, estableciendo la igualdad entre ambos invariantes, ver por ejemplo [2].

Existen algunas generalizaciones del Teorema de Cheeger-Müller. Una de ellas consiste en considerar, en lugar de la variedad M , la acción de un grupo sobre una variedad diferenciable. En este contexto, Lott y Rothenberg estudiaron el caso de acciones finitas [3]. En el mismo trabajo, abordan también el caso de acciones continuas, siendo éste mucho más complicado, y no logran avances en el mismo. Sin embargo, dejan indicada una fórmula que serviría para definir la torsión analítica en este caso.

En esta charla presentaremos algunos ejemplos de acciones continuas en las que calculamos la torsión analítica equivariante, como parte de estudiar si hay alguna validez del Teorema de Cheeger-Müller en este contexto, analizando torsiones tanto desde el punto de vista analítico como topológico.

Trabajo en conjunto con Juan P. Rossetti (Universidad Nacional de Córdoba), Pablo Ramacher (Marburg University) y Leandro Cagliero (Universidad Nacional de Córdoba).

Referencias

- [1] D.B. Ray and I.M. Singer. R-torsion and the Laplacian on Riemannian manifolds.
- [2] W. Müller. Analytic torsion and R-torsion of Riemannian manifolds.
- [3] J. Lott and M. Rothenberg. Analytic torsion for group actions.

NONCOMMUTATIVE SPACETIMES AND SPACES OF GEODESICS FROM POINCARÉ AND (A)dS POISSON-LIE GROUPS

Iván Gutiérrez Sagredo

Universidad de Burgos, España
igsagredo@ubu.es

The theory of Poisson–Lie groups and Poisson homogeneous spaces [1,2] has applications in a wide range of different fields. In particular, in recent years, it has been applied to the construction of phenomenological models in quantum gravity [3]. Those models arise as the semiclassical approximation of fully noncommutative spacetimes covariant under quantum group symmetries.

In this talk, after motivating the physical interest of those models, I will present their systematic construction and how they allow to greatly extend their analysis. In particular, I will describe two important results based on coisotropic Poisson homogeneous spaces: firstly, the construction of noncommutative spaces of geodesics of maximally symmetric spacetimes of constant curvature [4,5,6,7]; secondly the extension of noncommutative spacetimes and noncommutative spaces of geodesics to the case of a non-vanishing cosmological constant [8,9]. In order to do this, I will describe Poisson–Lie structures on the Poincaré and (A)dS groups and the classical construction as coset spaces of the corresponding spacetimes and spaces of geodesics. Time permitting I will show how certain Poisson–Lie structures allow for the construction of all these spaces (including the spaces of time-, light- and space-like geodesics) while for others only some of them are possible [10].

Referencias

- [1] V G Drinfel'd. 1987 Quantum groups Proc. Int. Congr. Math. (Berkeley 1986) 798–820.
- [2] J Lu. Multiplicative and affine Poisson structures on Lie groups. PhD Thesis (1990).
- [3] A Addazi et al. Quantum gravity phenomenology at the dawn of the multi-messenger era-a review. Progress in Particle and Nuclear Physics 125 (2022) 103948.
- [4] A Ballesteros, I Gutierrez-Sagredo, FJ Herranz. Noncommutative spaces of worldlines. Physics Letters B 792 (2019) 175–181.
- [5] A Ballesteros, G Gubitosi, I Gutierrez-Sagredo, F Mercati. Fuzzy worldlines with k -Poincaré symmetries. Journal of High Energy Physics 2021 (2021) 1–30.
- [6] A Ballesteros, I Gutierrez-Sagredo, FJ Herranz. The noncommutative space of light-like worldlines. Physics Letters B 829 (2022) 137120.
- [7] A Ballesteros, G Gubitosi, I Gutierrez-Sagredo, FJ Herranz. κ -Galilean and k -Carrollian noncommutative spaces of worldlines. Physics Letters B 838 (2023) 137735.
- [8] A Ballesteros, I Gutierrez-Sagredo, FJ Herranz. The k -(A) dS noncommutative spacetime. Physics Letters B 796 (2019) 93–101.
- [9] A Ballesteros, I Gutierrez-Sagredo, FJ Herranz. Noncommutative (A) dS and Minkowski spacetimes from quantum Lorentz subgroups. Classical and Quantum Gravity 39 (2021) 015018.
- [10] A Ballesteros, I Gutierrez-Sagredo, FJ Herranz. All noncommutative spaces of k -Poincaré geodesics. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 55 (2022) 435205.

FLUJO DE RICCI CON SIMETRÍAS

Ramiro Lafuente

The University of Queensland, Australia
r.lafuente@uq.edu.au

En esta charla, voy a presentar resultados nuevos y no tan nuevos sobre soluciones al flujo de Ricci cuyo grupo de isometrías es “grande”. La definición de grande puede variar desde ser homogénea hasta simplemente tener algún campo de Killing no trivial. También hablaré de problemas abiertos. Muchos de los resultados en esta charla son de varios trabajos en conjunto con Christoph Böhm, Francesco Pediconi y Adam Thompson.

SOBRE LA ν -ESTABILIDAD DE VARIEDADES DE EINSTEIN HOMOGÉNEAS ESTÁNDAR

Emilio Lauret

Instituto de Matemática (INMABB), Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur (UNS)-CONICET, Bahía Blanca, Argentina, Argentina
emilio.lauret@uns.edu.ar

En 2022, Schwahn, Semmelmann y Weingart construyeron la primera variedad de Einstein compacta no simétrica que resulta estable con respecto al funcional de la curvatura escalar total restringido a métricas de volumen fijo en M . Más recientemente, Schwahn identificó 111 ejemplos adicionales utilizando cálculos computacionales.

En esta charla mostraremos que todos estos ejemplos son también linealmente estables con respecto a la ν -entropía de Perelman. Esto se deduce de comprobar que $\lambda_1 > 2E$ para todas, excepto siete, variedades de Einstein estándar $(G/H, g_{st})$ simplemente conexas y no simétricas, con G un grupo de Lie compacto simple. Aquí λ_1 denota el menor autovalor positivo del operador de Laplace–Beltrami y E el factor de Einstein. Dichas variedades fueron clasificadas por Wang y Ziller en 1985.

Trabajo en conjunto con Alejandro Tolcachier (Università degli Studi dell’Insubria, Como, Italia).

Referencias

- [1] E.A. Lauret, A. Tolcachier. Linear stability of Perelman’s ν -entropy of standard Einstein manifolds. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2506.12435>.
- [2] P. Schwahn. The Lichnerowicz Laplacian on normal homogeneous spaces. J. Reine Angew. Math. 2024:814 (2024), 91–115. <https://doi.org/10.1515/crelle-2024-0038>.
- [3] P. Schwahn, U. Semmelmann, G. Weingart. Stability of the non-symmetric space $E_7/PSO(8)$. Adv. Math. 432 (2023), Id/No 109268. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.aim.2023.109268>.

DISTRIBUCIÓN DE SIMETRÍA DE UN GRUPO DE LIE 2-PASOS NILPOTENTE NATURALMENTE REDUCTIVO LORENTZIANO

Brian Luporini

Universidad Nacional de Rosario, Argentina
luporini@fceia.unr.edu.ar

Daremos condiciones para que un grupo de Lie N 2-pasos nilpotente con una métrica lorentziana invariante a izquierda sea naturalmente reductivo respecto del grupo $N \rtimes H^{\text{aut}}$ donde H^{aut} es el subgrupo de automorfismos isométricos. Bajo estas condiciones, caracterizaremos la acción del álgebra de Lie $\mathfrak{h}^{\text{aut}}$ en $\mathfrak{n}$ y probaremos que su distribución de simetría coincide con la distribución definida por los puntos fijos de la representación isotrópica (conexa).

Trabajo en conjunto con Silvio Reggiani y Francisco Vittone (Universidad Nacional de Rosario, Argentina).

RETRACCIONES EN GRUPOIDES DE LIE Y SUS APLICACIONES

David Martin de Diego

ICMAT-CSIC, España
david.martin@icmat.es

El uso de levantamientos de retracciones y aplicaciones de discretización se ha mostrado como un método para obtener métodos numéricos preservando la geometría inherente del sistema continuo (integradores geométricos). En esta conferencia mostraremos cómo derivar de manera sistemática integradores numéricos que preservan estructuras geométricas (como la simplecticidad o la estructura de Lie–Poisson), así como métodos que preservan la simetría y la correspondiente aplicación momento. Introduciremos una extensión de la noción de retracción y discretización del algebroid de Lie de un grupoide de Lie, de modo que se discretiza la variedad de configuración en lugar de las ecuaciones de movimiento. Como consecuencia, se obtienen integradores geométricos que preservan la estructura de Lie–Poisson del sistema reducido correspondiente. Además se mostrarán otras potenciales aplicaciones de esta nueva técnica.

Trabajo en conjunto con María Barbero-Liñán (UPM, Spain) y Juan Carlos Marrero (Universidad de La Laguna, Spain).

Referencias

- [1] M. Barbero-Liñán, J.C. Marrero and D. Martín de Diego: Retraction maps: A seed of geometric integrators. Part II: Symmetry and reduction. arXiv:2502.14152v1
- [2] M. Barbero-Liñán and D. Martín de Diego. Retraction maps: a seed of geometric integrators. Foundations of Computational Mathematics, Volume 23, Issue 4, 1335-1380

METRICAS PLURICLOSED EN GRUPOS DE LIE COMPACTOS SEMISIMPLES

Facundo Agustín Montedoro

FAMAF-UNC, Argentina

facundo.montedoro@mi.unc.edu.ar

Dado un grupo de Lie compacto semisimple G y un toro maximal T en G , damos una descripción explícita de todas las estructuras hermitianas pluriclosed invariantes a izquierda y $Ad(T)$ -invariantes en G en términos del sistema de raíces correspondiente. Dependen de $2d + 1$ parámetros en el caso irreducible, donde $\dim T = 2d$. Como aplicaciones, obtenemos que las únicas métricas pluriclosed invariantes a izquierda y $Ad(T)$ -invariantes que también son CYT son métricas biinvariantes (es decir, Bismut planas) y estudiamos el flujo pluriclosed como un sistema de EDO preciso.

Trabajo en conjunto con Jorge Lauret (Universidad Nacional de Córdoba).

POISSON-LIE GROUPS AND INVARIANT VOLUME FORMS FOR HAMILTONIANS DYNAMICS

Edith Padrón Fernández

Universidad de La Laguna, España

mepadron@ull.edu.es

A Poisson-Lie group is a Lie group endowed with a Poisson structure such that the multiplication is a Poisson map. Hamiltonian systems on Poisson-Lie groups appear in the differential equation approach to the singular value decomposition (SVD) of a bidiagonal matrix. On the other hand, an approach to the integrability of a dynamical system on a manifold of dimension n , following Euler and Jacobi, is to look for $n - 2$ functionally independent first integrals and an invariant volume form. Under these conditions, the system can be integrated by quadratures (by means of a finite number of algebraic operations and quadratures of some functions). In this talk, we discuss the relation between the existence of invariant volume forms for Hamiltonian systems on Poisson-Lie groups and the unimodularity of the Poisson-Lie structure.

Referencias

- [1] Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, Vol. 56, Núm. 1

VARIEDADES DE EINSTEIN EN EL CONTEXTO DE PRODUCTOS MULTIPLE WARPED Y TIPO KASNER GENERALIZADO

Carolina Rey

Universidad Federico Santa María, Departamento de Matemática, Chile

carolina.reyr@usm.cl

Los warped products juegan un rol fundamental en geometría diferencial, proporcionando ejemplos de variedades con propiedades de curvatura especiales. En este trabajo estudiamos condiciones de existencia y no existencia de variedades *multiply warped products* (mwp) que sean variedades de Einstein, con especial atención al caso de las variedades tipo *Kasner generalizadas* (gK).

En su libro Einstein Manifolds [1], Besse planteó la pregunta acerca de la existencia de warped products compactos de Einstein cuya función de deformación no sea constante. A partir de expresiones explícitas para el tensor de Ricci y la curvatura escalar de un mwp, caracterizamos los sistemas de ecuaciones que determinan cuándo estas variedades son de Einstein. En esta charla presentaremos resultados previos, ejemplos ilustrativos y nuevos teoremas que contribuyen a acercarnos a una respuesta a la conjetura de Besse.

Trabajo en conjunto con Fernando Dobarro (Instituto de Ciencias Polares, Ambiente y Recursos Naturales, Universidad Nacional de Tierra del Fuego, Antártida e Islas del Atlántico Sur, Ushuaia, Argentina).

Referencias

- [1] A. L. Besse, *Einstein Manifolds*, Springer-Verlag, Heidelberg, 2008.

SUBVARIEDADES TOTALMENTE GEODÉSICAS EN PRESENCIA DE SIMETRÍA

Alberto Rodríguez Vázquez

Université Libre de Bruxelles, Bélgica

alberto.rodriguez.vazquez@ulb.be

Las subvariedades totalmente geodésicas desempeñan un papel fundamental en la geometría riemanniana y están estrechamente relacionadas con la simetría. Por esta razón, su estudio es especialmente interesante en espacios con abundante simetría, como los espacios homogéneos [1,2] y los espacios simétricos [3]. Asimismo, estas subvariedades proporcionan una comprensión profunda de las estructuras y propiedades geométricas de los espacios ambiente subyacentes. En esta charla, presentaré una panorámica general de los desarrollos recientes en la clasificación, construcción y aplicaciones de las subvariedades totalmente geodésicas en espacios homogéneos y en espacios simétricos. Por otra parte, haré hincapié tanto en resultados clásicos como en avances recientes, discutiré sus conexiones con la teoría de grupos de Lie y ciertos fenómenos de rigidez en otras áreas de la geometría, además de destacar cuestiones abiertas y posibles direcciones para futura investigación.

Trabajo en conjunto con Carlos Olmos (Universidad Nacional de Córdoba, Argentina), Juan Manuel Lorenzo-Naveiro (Universidade de Santiago de Compostela, Galicia, España), y Andreas Kollros (Universität Stuttgart, Alemania).

Referencias

- [1] C. Olmos, A. Rodríguez-Vázquez, Hopf fibrations and totally geodesic submanifolds. *J. Eur. Math. Soc.* (2025), published online first.
- [2] J. M. Lorenzo-Naveiro, A. Rodríguez-Vázquez, Totally geodesic submanifolds of the homogeneous nearly Kähler 6-manifolds and their G2-cones. *arXiv*: 2411.11261
- [3] A. Kollross, A. Rodríguez-Vázquez, Totally geodesic submanifolds in exceptional symmetric spaces. *Adv. in Math.* 418 (2023), 108949. 37pp.

COHOMOLOGÍA DE DOLBEAULT DE UNA CLASE DE SOLVARIEDADES CON ESTRUCTURA COMPLEJA INVARIANTE.

Agustina Ruiz

Universidad Nacional de Córdoba, Argentina

agustinaruiz@mi.unc.edu.ar

En este trabajo presentamos una nueva clase de solvariedades con estructura compleja invariante de la forma $\mathbb{C} \ltimes_{\phi} N$ donde N es un grupo de Lie nilpotente (no abeliano) de dimensión 4. Calculamos su cohomología de Dolbeault, analizamos propiedades topológicas, mostrando en particular que estas solvariedades no admiten métrica Kähler. Finalmente, clasificamos la familia salvo homeomorfismo, difeomorfismo y biholomorfismo según los parámetros.

Trabajo en conjunto con María Laura Barberis (Universidad Nacional de Córdoba).

LA GEOMETRÍA SUBRIEMANIANA DE LOS MOVIMIENTOS DE TIRABUZÓN DE PASO CONSTANTE

Marcos Salvai

FAMAF (Universidad Nacional de Córdoba) y CIEM (CONICET), Argentina
marcos.salvai@unc.edu.ar

Consideramos una familia de variedades riemannianas M tales que para cada geodésica de rapidez unitaria γ de M existe una correspondencia biyectiva distinguida L entre las traslaciones infinitesimales a lo largo de γ y las rotaciones infinitesimales alrededor de ella. Los ejemplos más simples son $\mathbb{R}^3$, S^3 y el espacio hiperbólico de dimensión 3, con L definida en términos del producto cruz. Más generalmente, M es un grupo de Lie semisimple compacto conexo, o su dual no compacto, o un espacio euclídeo donde actúa transitivamente cierto grupo contenido propiamente en el grupo de transformaciones rígidas.

Sea G la componente conexa de la identidad del grupo de isometrías de M . Una curva en G puede pensarse como un movimiento de un cuerpo en M . Dado un número real λ , definimos una distribución invariante a izquierda en G que representa los movimientos de tirabuzón infinitesimales en M de paso λ . Damos condiciones para la controlabilidad del sistema de control asociado en G y encontramos de manera explícita todas las geodésicas de la estructura subriemanniana natural.

Trabajo en conjunto con Eduardo Hulett (Universidad Nacional de Córdoba, Argentina) y Ruth Paola Moas (Universidad Nacional de Río Cuarto, Argentina).

Referencias

- [1] E. Hulett, R.P. Moas, M. Salvai, The sub-Riemannian geometry of screw motions with constant pitch. *Journal of Geometric Analysis* 33, 373 (2023).

(No) EXISTENCIA DE ESTRUCTURAS HIPERCOMPLEJAS EN GRUPOS LINEALES ESPECIALES

Alejandro Tolcachier

Universidad Nacional de Córdoba, CIEM-CONICET, Argentina
aletolcachier@gmail.com

Las variedades hipercomplejas pueden pensarse como la versión análoga de las variedades complejas en el mundo cuaterniónico: son variedades diferenciables munidas de una estructura hipercompleja (EHC), esto es, una terna de estructuras complejas $\{J_1, J_2, J_3\}$ que satisfacen la multiplicación de los cuaterniones: $J_1 J_2 = -J_2 J_1 = J_3$. Una tal variedad debe ser necesariamente $4n$ -dimensional, para algún $n \in \mathbb{N}$.

M. Obata demostró en 1955 que toda variedad hipercompleja admite una única conexión libre de torsión ∇^{Ob} tal que $\nabla^{\text{Ob}} J_\alpha = 0$ para $\alpha = 1, 2, 3$. En consecuencia, esta conexión es llamada *conexión de Obata* y además satisface que su grupo de holonomía es un subgrupo de $\text{GL}(n, \mathbb{H})$.

Una fuente importante de ejemplos de variedades hipercomplejas está dada por los grupos de Lie compactos. En efecto, Joyce probó en 1992 que para todo grupo de Lie compacto G existe un número entero k con $0 \leq k \leq \text{rango}(G)$ tal que $G \times \mathbb{T}^k$ admite una estructura hipercompleja invariante a izquierda. En el caso no compacto, existen muchos resultados sobre EHCs en grupos de Lie solubles y nilpotentes.

En esta charla estudiaremos la existencia de estructuras hipercomplejas cuando $G = \text{SL}(2n+1, \mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. En particular, mostraremos que $\text{SL}(3, \mathbb{R})$ no admite ninguna EHC invariante a izquierda, usando la clasificación de estructuras complejas invariantes a izquierda en $\text{SL}(3, \mathbb{R})$ dada por T. Sasaki en 1982. Por otro lado, veremos que $\text{SL}(2n+1, \mathbb{C})$ sí admite una EHC invariante a izquierda para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, determinaremos explícitamente su grupo de holonomía con respecto a la conexión de Obata, el cual provee un nuevo ejemplo de un tal grupo, puesto que satisface ser un subgrupo propio de $\text{GL}(m, \mathbb{H})$ que no está contenido en $\text{SL}(m, \mathbb{H})$, donde $4m = \dim_{\mathbb{R}} \text{SL}(2n+1, \mathbb{C})$.

Trabajo en conjunto con Adrián Andrada y Agustín Garrone (Universidad Nacional de Córdoba, CIEM-CONICET).

Lógica y Computabilidad

TRANSFERENCIA DE SUBOBJETOS NORMALES PARA UN FUNCTOR ADJUNTO A DERECHA ENTRE VARIEDADES

Valentín Andrada

Departamento de Matemática - UNLP, Argentina
vandrada@mate.unlp.edu.ar

Sean X e Y variedades algebraicas en lenguajes $\mathcal{L}_X$ y $\mathcal{L}_Y$, respectivamente. En [1] se muestra que todo adjunto a derecha (no trivial) $G : Y \rightarrow X$ se descompone naturalmente como una composición de dos tipos particulares de funtores:

$$G \cong \theta_{\mathcal{L}} \circ (-)^{[\kappa]},$$

donde $(-)^{[\kappa]}$, para κ un cardinal regular, es el functor potencia y $\theta_{\mathcal{L}}$ una restricción de dominio, siendo $\theta \subseteq \text{Eq}(\mathcal{L}_X^{\kappa}, 1)$. El lenguaje $\mathcal{L}_Y$ puede verse como un sublenguaje $\mathcal{L}$ de $\mathcal{L}_X^{\kappa}$, con θ y $\mathcal{L}$ satisfaciendo cierta condición de compatibilidad.

Supongamos ahora que tanto X como Y son categorías ideal determinadas [3]. Es decir, para cada objeto A de la categoría, existe una correspondencia biyectiva $\Gamma_A : \text{Con}(A) \rightarrow \mathcal{N}(A)$, donde $\mathcal{N}(A)$ es el retículo de subobjetos normales de A .

El presente trabajo explora la relación entre la estructura de subobjetos normales de un álgebra $A \in Y$ y la de $G(A) \in X$. Usando la descomposición de G , definimos un homomorfismo de retículos de $\mathcal{N}(A)$ en $\mathcal{N}(G(A))$, y caracterizamos la inyectividad y suryectividad del mismo.

Finalmente, presentamos ejemplos donde las condiciones propuestas se cumplen, como el functor de subreductos (olvido) $U : Y \rightarrow X$ y el functor de Kalman $K : DL_{01} \rightarrow \text{Kleene}$ [2].

Trabajo en conjunto con el Dr. José Luis Castiglioni (Universidad Nacional de La Plata, Argentina).

Referencias

- [1] T. Moraschini. A logical and algebraic characterization of adjunctions between generalized quasi-varieties, 2018.
- [2] R. Cignoli. The class of Kleene algebras satisfying an interpolation property and Nelson algebras. *Algebra Universalis* 23, 262–292, 1986.
- [3] A. Ursini. Normal Subalgebras I. *Applied Categorical Structures* 21, 209–236, 2013.

EL TEOREMA DE HERBRAND: UN ENUNCIADO AUTOCONTENIDO Y UNA PRUEBA MODELOTEÓRICA

Mariana Badano

UNC Famaf, Argentina
marianabadano@unc.edu.ar

El Teorema de Herbrand fue enunciado por primera vez por Herbrand en su tesis de 1930 [1] y constituye un resultado fundamental en lógica matemática que sirve como base teórica para muchos procedimientos de prueba.

El teorema al que comúnmente se hace referencia como “el Teorema de Herbrand” en los cursos modernos de lógica suele ser una versión más débil, restringida a fórmulas que, en forma prenexa, contienen únicamente cuantificadores existenciales. En cambio, la versión completa del Teorema de Herbrand se aplica a todas las fórmulas de primer orden. La versión más simple, restringida a fórmulas existenciales, tiene una demostración modelo-teórica bien conocida, mientras que la demostración del teorema general es una demostración sintáctica compleja. Además, no existe una formulación simple del Teorema de Herbrand.

En este trabajo se presenta una formulación autónoma del teorema, junto con una demostración modelo-teórica de su versión general. Se espera que esta nueva formulación simplifique la aplicabilidad del Teorema de Herbrand, en particular en la teoría de modelos y el álgebra universal. Como ejemplo de ello, se ofrece un corolario que aplica el teorema a variedades y fórmulas positivas.

Referencias

- [1] Jacques Herbrand. Recherches sur la théorie de la démonstration. PhD thesis, Institut de Mathématique de l'Université de Paris, Paris, 1930.

ÁLGEBRAS DE SECUENTES: UNA GENERALIZACIÓN DE LAS ÁLGEBRAS DE CONTACTO

Sergio Celani

Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires y CONICET, Argentina
scelani@exa.unicen.edu.ar

En [3] Vakarelov introduce las Álgebras de Secuentes (SA) como una generalización de las álgebras de contacto (BCA), reemplazando las relaciones binarias de contacto por relaciones de clausura finitaria sobre álgebras de Boole, que satisfacen ciertas propiedades formales de las relaciones de consecuencia tarskianas. En esta comunicación vamos a dar una definición alternativa de estas álgebras como pares (A, C) donde A es un álgebra de Boole y C es un operador de clausura finitario cumpliendo ciertas condicionales especiales [1]. Asimismo, presentamos una dualidad topológica basada en espacios T_0 dotados de una base especial, la cual generaliza algunas de las ideas de la dualidad topológica desarrollada por Goldblatt y Grice [2].

Trabajo en conjunto con Rafał Gruszczyński (Department of Logic, Nicolaus Copernicus University in Toruń, Polonia), M. Paula Menchón (Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires) y William Zuluaga (Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires y CONICET).

Referencias

- [1] Brown D. J. and Suszko R., Abstract logics, Dissertationes Mathematicae (Rozprawy Mat.), vol. 102, pp. 9–42.
[2] Goldblatt R. and Grice M., Mereocompactness and duality for mereotopological spaces. Katalin Bimbo (ED) J. Michael Dunn on Information based Logics, Outstanding Contributions in Logic, vol 8, 2016.
[3] Vakarelov D., A mereotopology based on sequent algebras, Journal of Applied Non-Classical Logics, DOI: 10.1080/11663081.2017.1420590, 2018.

UNA AXIOMÁTICA GENERAL PARA LAS LÓGICAS PARACONSISTENTES DE LA FAMILIA FiC^n

Gabriela Eisenberg

Instituto de Ciencias Básicas (Área Matemática), Universidad Nacional de San Juan, Argentina
geisenberg@ffha.unsj.edu.ar

La familia de lógicas FiC^n es una adaptación de las lógicas dadas por J. Ciuciura en [1]. Cada lógica de esta familia se define mediante una semántica bivaluada, es decir mediante funciones no homomórficas, de la siguiente manera. Sea $n \in \omega$, fijo, una FiC^n -bivaluación es cualquier función $v : L(C) \rightarrow \{0, 1\}$ que verifica las siguientes condiciones para cada $\varphi, \psi \in L(C)$:

- (1) Si $v(\neg\varphi) = 0$, entonces $v(\varphi) = 1$.
- (2.n) Si $v(\neg^{n+1}\varphi) = 1$, entonces $v(\neg^n\varphi) = 0$.
- (3.n) Si $v(\neg^{k+1}(\varphi \supset \psi)) = 1$, entonces $v(\neg^k(\varphi \supset \psi)) = 0$, para todo $0 \leq k \leq n$.
- (4) $v(\varphi \supset \psi) = 1$ si y sólo si $v(\varphi) = 0$ o $v(\psi) = 1$.

En [2] se caracterizó a cada una de éstas lógicas mediante semánticas matriciales. Más aún, se demostró que la cantidad de valores de cada matriz está estrechamente relacionada con la expansión binaria de Fibonacci (ver [3]).

En esta comunicación daremos una axiomática para todas las lógicas de la familia FiC^n . En particular demostraremos corrección y completitud para FiC^2 y FiC^3 mediante la técnica de L. Kalmár (ver [4]) y adaptaremos dichas demostraciones para todo $n \in \omega$.

Trabajo en conjunto con Víctor Fernández (Instituto de Ciencias Básicas, Área Matemática, Universidad Nacional de San Juan).

Referencias

- [1] Ciuciura, J. Sette's Calculus P^1 and some Hierarchies of Paraconsistent Systems. *Journal of Logic and Computation*, 30: 1109–1124, 2020.
- [2] Fernández, V; Eisenberg, G. Matrix Characterisation of the Hierarchy FiC^n of bivaluated logics. *Journal of Applied Non-classical Logics*, 35 (1): 46–67, 2025.
- [3] Lothaire, M. *Algebraic Combinatorics on Words*. Cambridge University Press, 2002.
- [4] Mendelson, E. *Introduction to Mathematical Logic*. Chapman & Hall, 1997.

ESPACIOS $M_K(T)$ DETERMINADOS POR LÓGICAS ABSTRACTAS CLÁSICAS Y PARACONSISTENTES

Víctor Fernández

Instituto de Ciencias Básicas (Área Matemática), Universidad Nacional de San Juan, Argentina
vlferran@ffha.unsj.edu.ar

Se ha estudiado en [2] la preservación de ciertas propiedades de un espacio de clausura arbitrario (X, K) , una vez que se define un nuevo espacio (con el mismo soporte), el cual es llamado $M_K(T)$ y es definido de la siguiente forma:

$$M_K(T) := \{A \subseteq X : A \cap T \in K\}$$

Así, se ha estudiado por ejemplo la preservación de las diferentes propiedades que caracterizan a las lógicas (abstractas) distributivas, ampliamente estudiadas por J. M. Font y V. Verdú (ver [3]), las cuales pueden entenderse como espacios de clausura definidos en álgebras de la forma $(A, \vee, \wedge)$ con ciertas propiedades específicas.

Con este mismo enfoque, en esta comunicación se analizará la preservación de diferentes propiedades (estructuralidad, finitariedad, estructura de orden subyacente, etc.) en las siguientes lógicas abstractas:

- Lógicas Abstractas Clásicas, dadas en [1]
- Lógicas Abstractas Paraconsistentes de Sette, dadas en [4].

Además, se realizará un análisis comparado de los resultados obtenidos para cada una de las familias de lógicas mencionadas.

Referencias

- [1] S. Bloom; D. Brown. Classical Abstract Logics. *Dissertationes Mathematicae* 102, 43–52, 1973.
- [2] C. Brunetta; V. Fernández. $M_K(T)$ -spaces: some order-theoretical properties and applications to distributive logics. *Armenian Journal of Mathematics* 16 (13), 1–21, 2024.
- [3] J.M. Font; V. Verdú. The lattice of Distributive Closure Operators over an algebra. *Studia Logica* 52 (1), 1–13, 1993.
- [4] A. Pynko. Algebraic Study of Sette's Maximal Paraconsistent Logic. *Studia Logica* 54 (1), 89–128, 1995.

LÓGICAS MODALES COALGEBRAICAS DE RANGO FINITO PARA SISTEMAS DINÁMICOS

Andrés Gallardo

INMABB (CONICET), Argentina
andres.gallardo@uns.edu.ar

Sea la categoría Unc de espacios de incertidumbre [1], y la clase de endofuntores que es cerrada bajo productos, coproductos, y composiciones con los funtores Δ , Δ^* , Δ_{PI} , Δ_{PS} , que representan distintas medidas de incertidumbre (probabilidad, probabilidad superior, plausibilidad y posibilidad respectivamente). Un functor de esta clase se denomina polinomial. En un trabajo previo [3], y siguiendo a [2], definimos lógicas modales coalgebraicas para funtores polinomiales en Unc , y demostramos la completitud de las mismas con respecto a una clase de sistemas deductivos que cumplen la propiedad de Lindenbaum.

Estas lógicas sirven para modelar diversos sistemas dinámicos, como marcos de Kripke, marcos probabilísticos, autómatas y sistemas de transición etiquetados. Sin embargo, son infinitarias, no compactas, y la propiedad de Lindenbaum debe añadirse como hipótesis. Para una subclase de funtores que solo sean cerradas bajo productos, coproductos, Δ y Δ^* , hemos comunicado resultados de completitud en la UMA de 2022. Siguiendo este trabajo, en esta comunicación presentamos una versión de estas lógicas usando los funtores Δ_m y Δ_m^* . Por ejemplo, partiendo de un espacio de incertidumbre (X, Σ) , obtenemos el espacio $(\Delta_m^* X, \Delta_m^* \Sigma)$ de medidas de probabilidad superiores definidas sobre X que toman valores en un conjunto finito $I_m = \{0, \frac{1}{m}, \dots, \frac{m-1}{m}, 1\}$. Se obtienen así lógicas con reglas de deducción finitarias, y compactas. Definimos una clase de sistemas deductivos estilo Hilbert, y probamos que tienen la propiedad de Lindenbaum. Construimos la cólgebra canónica, y damos una demostración de completitud.

Referencias

- [1] S. Baratella. An infinitary propositional probability logic. Archive for Mathematical Logic, 2022.
- [2] R. Goldblatt. Deduction systems for coalgebras over measurable spaces. J. Logic Comput., 20(5):1069–1100, 2010.
- [3] A. Gallardo and I. Viglizzo. Coalgebraic modal logic for dynamic systems with uncertainty. 2024.

$NS_{3 \times 3}$ -ALGEBRAS AND SYMMETRICAL HEYTING ALGEBRAS

Carlos Gallardo

Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Argentina
gallardoss@gmail.com

The notion of $n \times m$ -valued Łukasiewicz algebras with negation (or $NS_{n \times m}$ -algebras) was introduced by C. Sanza in [4]. In this note, we focus on $NS_{3 \times 3}$ -algebras. We prove that they are Heyting algebras and in case that they are centered we describe the Heyting implication in terms of their centers. We also establish a relationship between centered $NS_{3 \times 3}$ -algebras and a class of symmetrical Heyting algebras with operators.

Referencias

- [1] Gallardo, C. and Ziliani, A.: Symmetrical Heyting algebras of order 3×3 . Soft Computing., 25, 2, 8839—8847 (2021).
- [2] Iturrioz, L.: Łukasiewicz and symmetrical Heyting algebras. Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math. 23, 131—136 (1977).
- [3] Iturrioz, L.: Modal operators on symmetrical Heyting algebras. Banach Center Publications 9, Universal algebra and applications, 289—303 (1982).
- [4] Sanza, C.: Notes on $n \times m$ -valued Łukasiewicz Algebras with Negation. Logic J. of the IGPL 6, 12, 499—507 (2004).

ADJUNTOS PARA FUNTORES OLVIDADIZOS ENTRE VARIEDADES Y ESTRUCTURAS RELACIONALES DEFINIDAS POR IDENTIDADES

Joel Kuperman

CIEM - FaMAF, Argentina
kupermanjoel@gmail.com

En esta charla presentaremos un resultado que permite construir adjuntos a izquierda para una amplia familia de funtores olvidadizos. Dada una variedad y una relación R definida por una conjunción finita de identidades, es posible construir una adjunción entre dicha variedad y la categoría de estructuras relacionales que incorporan R .

Como aplicación concreta, analizaremos el caso de una adjunción entre las categorías de bandas regulares a derecha (RRBs) y la categoría formada por ciertos conjuntos parcialmente ordenados, conocidos como posets asociativos. La motivación inicial proviene del estudio de cómo dotar a un poset asociativo dado de una estructura de banda, una cuestión que no puede resolverse en general sin recurrir al Axioma de Elección [K et al, “Definability of Band Structures on Posets”]. Este ejemplo sirvió de punto de partida para el desarrollo del resultado general que presentaremos.

Trabajo en conjunto con Pedro Sánchez Terraf (Universidad Nacional de Córdoba, Argentina).

UNA DUALIDAD PARA LAS ÁLGEBRAS DE HILBERT–STONE

Daniela Montangie

Universidad Nacional del Comahue, Argentina
dmontang@gmail.com

Un álgebra de Hilbert–Stone es un álgebra de Hilbert acotada con supremo que satisface la identidad de Stone, esto es,

$$\neg x \vee \neg \neg x = 1,$$

donde $\neg x := x \rightarrow 0$. En [2], se obtuvo una dualidad topológica para la categoría de las álgebras de Hilbert con supremo con $\vee$ -semi-homomorfismos, y también para la categoría de las álgebras de Hilbert con supremo con $\vee$ -homomorfismos, a través de ciertos espacios topológicos sober llamados $H_0^\vee$ -espacios con adecuadas relaciones binarias. Recientemente, en [4], el autor extiende la dualidad desarrollada en [2] a la clase de las álgebras de Hilbert–Stone.

El objetivo de este trabajo es proponer una dualidad alternativa a la presentada en [4]. Para ello, introducimos la noción de $\neg$ -morfismos, los cual resultan ser $\vee$ -semi-homomorfismos de Hilbert que preservan el 0 y la negación. Se prueba que son morfismos distintos a los $\vee$ -semi-homomorfismos y $\vee$ -homomorfismos que preservan el 0 usados en [4], y que, a nuestro entender, son más adecuados para caracterizar a las álgebras de Hilbert–Stone. Luego, probamos una dualidad categórica para las álgebras de Hilbert–Stone y $\neg$ -morfismos considerando $H_0^\vee$ -espacios que verifican una condición especial y ciertos morfismos espectrales. Para obtener tales resultados, utilizamos una caracterización de las álgebras de Hilbert–Stone en función de sus elementos regulares ([1],[3]).

Trabajo en conjunto con Ismael Calomino (Universidad Católica de Ávila, España).

Referencias

- [1] Busneag D., Ghita M.: Some latticial properties of Hilbert algebras. Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roum., Nouv. Sér. 53, No. 2, 87–107 (2010).
- [2] Celani S.A., Montangie D.: Hilbert algebras with supremum. Algebra Universalis 67, No. 3, 237–255 (2012).
- [3] Celani S.A.: Notes on bounded Hilbert algebras with supremum. Acta Sci. Math. 80, No. 1-2, 3–19 (2014).
- [4] Gaitán H.: Duality for Stonean Hilbert algebras. Discuss. Math., Gen. Algebra Appl. 45, No. 1, 159–176 (2025).

ÁLGEBRAS DE EFECTOS VECTORIALES

Diego Morcelle Gullo

CMaLP, Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, UNLP, Argentina
dmorcelle@gmail.com

En décadas recientes han surgido diversas alternativas para la formalización de la lógica cuántica [4, 5, 6], incluyendo la noción de álgebra de efectos (EA) [2]. Sin embargo, dado que en un sistema cuántico no siempre es posible asignar valores de verdad a dos proposiciones en simultáneo, este modelo en general no admite una implicación natural $\rightarrow$ bien definida. Aunque en ciertos casos particulares lo anterior es asequible [3], otra posible vía de investigación es “sumergir” la estructura parcial de una EA en una estructura total. De esto se trata el presente trabajo.

Consideremos el $\mathbb{C}$ -espacio vectorial de operadores acotados sobre un espacio de Hilbert, $L(\mathcal{H})$, equipado con la noción habitual de conjugación y el orden inducido por el cono de operadores semidefinidos positivos. Los elementos de $L(\mathcal{H})$ pertenecientes al intervalo $[0, I]$ se denominan efectos. Denotamos a este conjunto $E(\mathcal{H})$ y definimos dos operaciones parciales, $\oplus$ y $*$, que coinciden con la suma y el producto por escalar de $L(\mathcal{H})$ cuando están definidas. Diremos que $X \oplus Y$ (respectivamente, $r * X$) está definida, si $X + Y \leq I$ (respectivamente, si $r * X \leq I$ y $r \in \mathbb{R}^+$). El reducto $(E(\mathcal{H}), \oplus, 0, I)$ es el ejemplo prototípico de EA.

Resulta natural preguntarse si es posible recuperar $L(\mathcal{H})$ a partir de $E(\mathcal{H})$. La respuesta es afirmativa: $L(\mathcal{H})$ es isomorfo a un cierto cociente del $\mathbb{C}$ -espacio vectorial libre sobre $E(\mathcal{H})$.

Análogamente, podemos partir de cualquier $\mathbb{C}$ -espacio vectorial ordenado V con un elemento positivo u y proceder de forma similar para obtener un “álgebra de efectos” $E(V)$. Esta asignación se extiende fácilmente a un funtor E desde la categoría de $\star$ -espacios vectoriales ordenados con unidad [1] hacia una categoría de

álgebras parciales adecuadamente definidas. Más concretamente, un álgebra de efectos vectorial (VEA) es, a grandes rasgos, un álgebra de efectos dotada de un producto por escalar parcial, el cual satisface axiomas similares al de un espacio vectorial. Veremos que, emulando la construcción del caso particular de operadores, podemos asociar a toda VEA un $\mathbb{C}$ -espacio vectorial ordenado con unidad, y que esta construcción define un adjunto a izquierda del funtor E . La restricción de E a una subcategoría apropiada resulta en una equivalencia.

Trabajo en conjunto con José Luis Castiglioni (CMaLP, Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, UNLP, Argentina).

Referencias

- [1] Paulsen, V.I., and Tomforde, M. Vector spaces with an order unit. *Indiana University Mathematics Journal*, (2009), 1319–1359.
- [2] Foulis, D.J., and Bennett, M.K. Effect algebras and unsharp quantum logics. *Foundations of physics*, 24(10) (1994), 1331–1352.
- [3] Chajda, I., Halaš, R., and Länger, H. The logic induced by effect algebras. *Soft Computing*, 24(19) (2020), 14275–14286.
- [4] Foulis, D. J., Greechie, R. J., and Rüttimann, G. T. Filters and supports in orthoalgebras. *International Journal of Theoretical Physics*, 31(5) (1992), 789–807.
- [5] Kôpka, F., and Chovanec, F. D-posets. *Mathematica Slovaca*, 44(1) (1994), 21–34.
- [6] Kalmbach, G. *Orthomodular Lattices*, (1983).

UN ESTUDIO DE SUBVARIEDADES DE LAS ÁLGEBRAS DE GÖDEL MONÁDICAS SIMÉTRICAS

Marcela Paola Muñoz Santis

Universidad Nacional del Comahue, Argentina
santis.marcela@gmail.com

En trabajos anteriores determinamos la semántica algebraica equivalente al fragmento monádico en una variable del cálculo de predicados de la lógica de Gödel con una negación involutiva independiente ($\mathcal{GV}_{\sim}$) definida por F. Esteva, L. Godo, P. Hájek y M. Navara en [4]. Esta semántica está dada por las álgebras $\langle \mathbf{A}, \forall, \exists, \sim \rangle$, donde $\langle \mathbf{A}, \forall, \exists \rangle$ es un álgebra de Gödel monádica (ver [1]), $\langle \mathbf{A}, \sim \rangle$ es un álgebra de Gödel simétrica (ver [6]), que satisfacen las condiciones: $(N) \neg x \leq \sim x$, $(\Delta) \forall x \approx \sim \exists \sim x$ y $(C) \exists(x \wedge \sim x) \leq \forall(x \vee \sim x)$. Esta clase de álgebras forma una variedad y es denominada $\mathbf{CMG}_{\sim}$.

En este trabajo nos abocamos al estudio de la subvariedad de $\mathbf{CMG}_{\sim}$ generada por cadenas, la cual resulta determinada por la ecuación $\forall(x \vee y) \leq \forall x \vee \forall y$, llamándola $\mathbf{CW}_1$. En orden de describir el reticulado de subvariedades $\Lambda(\mathbf{CW}_1)$ de esta variedad, determinamos todas las subvariedades supremo irreducibles de $\Lambda(\mathbf{CW}_1)$, tanto las de rango finito como infinito obteniendo una descripción del conjunto ordenado de aquellas subvariedades supremo irreducibles de rango finito.

Por otra parte, valiéndonos de que la variedad $\mathbf{CW}_1$ es una variedad localmente finita con término discriminador obtenemos una descripción del álgebra libre con una cantidad finita de generadores libres.

Trabajo en conjunto con Valeria Marcela Castaño (Universidad Nacional del Comahue, Argentina).

Referencias

- [1] D. Castaño, C. Cimadamore, J. P Díaz Varela, L. Rueda, Monadic BL-algebras: The equivalent algebraic semantics of Hájek's monadic fuzzy logic, *Fuzzy Sets and Systems*, 320 (2017), 40–59.
- [2] D. Castaño, C. Cimadamore, J. P Díaz Varela, L. Rueda, Completeness for monadic fuzzy logics via functional algebras, *Fuzzy Sets and Systems*, doi.org/10.1016/j.fss.2020.02.002.
- [3] D. Castaño, C. Cimadamore, J. P Díaz Varela, L. Rueda, An algebraic study of S5-modal Gödel logic, *Studia Logica* 109 (2021) 937–967.
- [4] F. Esteva, L. Godo, P. Hájek, M. Navara, Residuated fuzzy logics with an involutive negation, *Archive for Mathematical Logic* 39 (2000), 103–124.

- [5] P. Hájek, Metamathematics of fuzzy logic, Trends in Logic - Studia Logica Library, 4, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.
- [6] H. P. Sankappanavar, Heyting algebras with dual lattice endomorphisms, Zeitschr. F. Math. Logik und Grundlagen d. Math., Bd. 33 (1987), 565–573.

A CATEGORIAL EQUIVALENCE FOR TENSE SEMI-IMPLICATIVE LATTICE

María Isabel Pelegrina

Universidad Nacional de San Juan, Instituto de Ciencias Básicas, Facultad de Filosofía Humanidades y Artes, Argentina
ipelegrina73@gmail.com

Implicative semilattices are the algebraic models of the implication conjunction fragment of Intuitionistic Propositional Logic [1]. In [4], Liang and Lin study tense operators G , H , F , and P on implicative semilattices and define the variety of tense implicative semilattices, denoted by tIS . These structures serve as the algebraic models of the disjunction-free fragment of Ewald's intuitionistic tense logic [2, 3].

In this paper, we introduce the varieties of tense bounded implicative semilattices, denoted by tIS_0 and of tense bounded implicative semilattices which satisfy the additional condition $G(0) = 0 = H(0)$, denoted by tIS_0^+ and investigate some of their fundamental properties. We then extend Kalman's functor to this tense setting, establishing a categorical equivalence between the variety tIS_0^+ and a subcategory of centered tense KIS_0 -algebras. Finally, we analyze tense congruences in these algebras, introduce a class of well-behaved congruences, and characterize them via tense filters, thus providing a lattice-theoretic perspective on the congruence structure of tIS_0^+ -algebras.

Trabajo en conjunto con Gustavo Pelaitay (CONICET and Universidad Nacional de San Juan, Instituto de Ciencias Básicas, Facultad de Filosofía Humanidades y Artes, Argentina) y Maria Isabel Galoviche (Universidad Nacional de San Juan, Instituto de Ciencias Básicas, Facultad de Filosofía Humanidades y Artes, Argentina).

Referencias

- [1] Curry, H. B. Foundations of Mathematical Logic. McGraw-Hill, 1963.
- [2] Ewald, W. B. Intuitionistic tense and modal logic. The Journal of Symbolic Logic, 51 (1), 166–179 (1986).
- [3] Figallo, A. V. and Pelaitay, G. An algebraic axiomatization of the Ewald's intuitionistic tense logic. Soft Computing, 18 (10), 1873–1883 (2014).
- [4] Liang, F. and Lin, Z. On the Decidability of Intuitionistic Tense Logic without Disjunction. Proc. 29th Int. Joint Conf. on Artificial Intelligence (IJCAI-20), 1805–1811 (2020).

UNA LÓGICA DIFUSA DE PRIMER ORDEN

Gabriel Savoy

Universidad Nacional del Sur, Argentina
gabriel.savoy@uns.edu.ar

El objetivo es contar algunos resultados recientes pertenecientes a la lógica de primer orden de las t -normas continuas. Contribuye al campo de las lógicas difusas, una rama de las lógicas no clásicas, que permite deducciones lógicas con un grado de vaguedad o imprecisión. Investigadores como Hájek han propuesto el uso de t -normas, operaciones definidas en el intervalo real $[0, 1]$, para lograr esto. En la lógica difusa estándar, las t -normas modelan conjunciones fuertes, mientras que otros conectivos se interpretan a través de operaciones derivadas del orden y/o la t -norma.

Nos concentramos en las t -normas continuas, que poseen una rica estructura algebraica, a saber, la estructura de las BL -álgebras, una variedad de retículos residuados generados por t -normas continuas. La lógica básica, o lógica BL , sirve como la contraparte sintáctica de las lógicas con semántica en BL -álgebras.

El estudio de las lógicas de primer orden basadas en t -normas continuas, o lógicas de predicados difusos, es crucial en la lógica difusa. Una característica de estas lógicas es su naturaleza infinitaria, lo que nos lleva a introducir $BL\forall_\infty$, una extensión que incorpora una regla y un axioma infinitarios. Demostramos que $BL\forall_\infty$ es

fuertemente completa con respecto a las t -normas continuas, y sus extensiones a la lógica de primer orden producto y la lógica de Łukasiewicz también son fuertemente completas.

Trabajo en conjunto con Diego Castaño y Jose Patricio Diaz Varela (Universidad Nacional del Sur, Argentina).

ORDENES REGRESIVOS PARA EL IDEAL NO ESTACIONARIO SOBRE UN CARDINAL REGULAR.

Vicente Rafael Schkolnik Rivas

Universidad Nacional de Córdoba, FAMAFA., Argentina
vicente.schkolnik@mi.unc.edu.ar

Dado un cardinal regular κ de cofinalidad incontable, es de vasta importancia para la Teoría de Conjuntos el filtro generado por los subconjuntos cerrados y no acotados, $\text{Club}(\kappa)$, los conjuntos $\text{Club}(\kappa)$ -positivos (conjuntos estacionarios), y el ideal $NS(\kappa)$ dual al filtro. Estos objetos forman la base para entender principios combinatorios infinitos y técnicas de la teoría de modelos de ZFC ligadas, entre otras cosas, a grandes cardinales.

En esta comunicación se resumirán conceptos y propiedades de los órdenes regresivos, definidos por los autores para jerarquizar al ideal no estacionario $NS(\kappa)$ (en especial, cuando $\kappa = \aleph_1$) en términos de la compresibilidad de sus elementos. Más específicamente, para $X, Y \in NS(\kappa)$ y $\beta \leq \kappa$, definimos la relación $X <^\beta Y$ cuando exista una función $f : X \rightarrow Y$ tal que $f(\alpha) < \alpha$, y que $\text{type} f^{-1}(\delta) < \beta$ para todo $\delta \in Y$. Recorreremos la intuición detrás de esta definición, propiedades acerca de las composiciones de la relación y su transitividad, la cual sabemos que ocurre si y solamente si β es un cardinal regular o es igual a 2, y propiedades del poset $(NS(\kappa), <^\beta)$ para $\beta = 2$ o regular. Finalmente, expondremos caracterizaciones de la situación $X <^\beta Y$ en términos de la existencia de ciertos clubs (conjuntos cerrados y no acotados) en κ , y algunos atisbos sobre aplicaciones de estas ideas.

Trabajo en conjunto con Pedro Sánchez Terraf (Universidad Nacional de Córdoba, Argentina).

Referencias

- [1] K. Kunen. Set Theory, Studies in Logic, Volume 34 (2013).
- [2] T. Jech. Set Theory, 3rd Millennium edition, Springer Monographs in Mathematics (2002).

T-ROUGH SYMMETRIC HEYTING ALGEBRAS WITH TENSE OPERATORS

Cecilia Segura Gallardo

Instituto de Ciencias Básicas - Universidad Nacional de San Juan, Argentina
ceciliasegura5@gmail.com

T -rough Heyting algebras were introduced by Eric SanJuan in 2008 as an algebraic formalism for reasoning on finite increasing sequences over Boolean algebras in general and on generalizations of rough set concepts in particular. In this paper, we introduce the variety of algebras, which we call T -rough symmetric Heyting algebras. These algebras constitute an extension of T -rough Heyting algebras and a generalization of symmetric Heyting algebras of order n . Our main interest is the representation theory of tense operators on T -rough symmetric Heyting algebras. In order to do this, a discrete-style duality for these algebras is developed.

Trabajo en conjunto con Carlos Gallardo (Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur) y Gustavo Pelaitay (Instituto de Ciencias Básicas, Universidad Nacional de San Juan).

Referencias

- [1] Ewa Orłowska, Ingrid Rewitzky, Discrete dualities for Heyting algebras with operators, Fundam. Inform. 81(1–3) (2007), 275–295.
- [2] Aldo V. Figallo, Gustavo Pelaitay, Tense operators on De Morgan algebras, Log. J. IGPL 22(2) (2014), 255–267.
- [3] Luisa Iturrioz, Sur une classe particuliere d'algebres de Moisil, C. R. Acad. Sci. Paris Sér., A-B 267 (1968), 585–588 (French).

- [4] Luisa Iturrioz, Łukasiewicz and symmetrical Heyting algebras, *Z. Math. Log. Grundl. Math.* 23(2) (1977), 131—136.
- [5] Luisa Iturrioz, Modal operators on symmetrical Heyting algebras, in: *Universal Algebra and Applications*, Warsaw, 1978, in: *Banach Center Publ.*, vol.9, PWN, Warsaw (1982), pp.289—303.
- [6] Luisa Iturrioz, Symmetrical Heyting algebras with operators, *Z. Math. Log. Grundl. Math.* 9(1) (1983), 33—70.
- [7] Eric SanJuan, Heyting algebras with Boolean operators for rough sets and information retrieval applications, *Discrete Appl. Math.* 156(6) (2008), 967—983.
- [8] Aldo Victorio Figallo, Gustavo Pelaitay, Claudia Sanza, Discrete duality for TSH-algebras, *Commun. Korean Math. Soc.* 27(1) (2012), 47—56.
- [9] Carlos Gallardo, Alicia Ziliani, Symmetrical Heyting algebras of order 3×3 , *Soft Comput.* 25 (2021), 8839—8847.

ÁLGEBRAS DE STONE DOBLES: ELIMINACIÓN DEL CORTE, LOCALIZACIÓN Y EXTENSIONES IMPLICATIVAS

Juan Sebastián Slagter

Universidad Nacional del Sur. Departamento de Matemática, Argentina

juan.slagter@uns.edu.ar

En esta charla presentamos una investigación en desarrollo sobre las álgebras de Stone dobles, estructuras introducidas por Balbes y Grätzer en los años setenta, que combinan una negación de Heyting y una negación de Brouwer sobre un retículo distributivo acotado. Abordamos estas estructuras desde una perspectiva unificada, combinando aspectos algebraicos y lógico-formales.

Estudiamos lógicas no clásicas asociadas a estas álgebras —tanto desde la preservación del orden como de los valores de verdad—, desarrollando sistemas de secuentes con eliminación del corte y analizando sus propiedades paraconsistentes y paracompletas. A nivel algebraico, construimos la localización de una álgebra de Stone doble S respecto de una topología $\mathcal{F}$, mediante subconjuntos $\wedge$ -cerrados y congruencias adecuadas que permiten definir una álgebra de fracciones $S_{\mathcal{F}}$ libre de elementos paraconsistentes.

También exploramos extensiones implicativas no equivalentes, definidas a partir de herramientas ya desarrolladas en la bibliografía especializada, que permiten estudiar la compatibilidad con el orden y la posibilidad de definir sistemas deductivos adecuados.

Trabajo en conjunto con Martín Figallo y Carlos Gallardo (Universidad Nacional del Sur, Argentina).

Referencias

- [1] Balbes, R. and Grätzer, G. Injective and projective Stone algebras. *Duke Mathematical Journal*, 38 (1971), 339—347.
- [2] Düntsch, I. and Orłowska, E. Discrete Dualities for Double Stone Algebras. *Studia Logica*, 99(1/3) (2011), 127—142. Disponible en: <http://www.jstor.org/stable/41475198>
- [3] Figallo, M. and Slagter, J. Cut-elimination theorems for some logics associated with double Stone algebras. *International Journal of Approximate Reasoning*, Vol. 186, 2025, Art. 109526. <https://doi.org/10.1016/j.ijar.2025.109526>
- [4] Figallo-Orellano, A. and Slagter, J. Monteiro's algebraic notion of maximal consistent theory for Tarskian logics. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 445, (2022), 90—122.
- [5] Gallardo, C. and Slagter, J. Double Stone algebras associated with a topology, 2025. (Manuscrito sometido)
- [6] Kumar, A., Gaur, N., and Dewan, B. A 4-valued logic for double Stone algebras. *International Journal of Approximate Reasoning*, Vol. 176, 2025. <https://doi.org/10.1016/j.ijar.2024.109309>
- [7] Rasiowa, H. An algebraic approach to non-classical logics. *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, Vol. 78. North-Holland, Amsterdam, 1974.
- [8] Rauszer, C. Semi-Boolean algebras and their applications to intuitionistic logic with dual operations. *Fundamenta Mathematicae*, 83 (1974), 219—249.

Matemática Discreta

LIMITACIONES DE LOS AJUSTES HACIA LA EFICIENCIA DE PARETO EN EL PROBLEMA DE ASIGNACIÓN DE COLEGIOS

Pablo Arribillaga

Instituto de Matemática Aplicada San Luis, Universidad Nacional de San Luis, y CONICET, Argentina
rarribi@gmail.com

El algoritmo de Aceptación Diferida (DA) es estable y no manipulable, pero puede producir asignaciones que son Pareto-ineficientes para los estudiantes, por lo que se han propuesto diversas alternativas para corregir esta ineficiencia que solo implican violaciones consentidas de prioridades. Sin embargo, mostramos que estos enfoques no pueden corregir la distribución subóptima de rangos generada por DA, ya que esta deficiencia puede surgir incluso en casos donde DA es Pareto-eficiente. Asimismo, analizamos la segregación estudiantil en contextos con estudiantes privilegiados y marginados. Probamos que la composición demográfica de cada escuela se preserva perfectamente bajo cualquier regla Pareto-eficiente que domine a DA y, en consecuencia, las escuelas totalmente segregadas bajo DA mantienen su extrema homogeneidad.

Trabajo en conjunto con JOSUÉ ORTEGA (Queen's University Belfast), GABRIEL ZIEGLER (University of Edinburgh) y GENG ZHAO (University of California, Berkeley).

Referencias

- [1] Abdulkadiroglu, Atila, Parag A Pathak, and Alvin E Roth. "Strategy-proofness versus efficiency in matching with indifference: Redesigning the NYC High School Match." *American Economic Review*, 99(5) (2009), 1954—78.
- [2] Abdulkadiroglu, Atila and Tayfun Sönmez. "School choice: A mechanism design approach." *American Economic Review*, 93(3) (2003), 729—747.
- [3] Ashlagi, Itai, Yash Kanoria, and Jacob Leshno. "Unbalanced random matching markets: The stark effect of competition." *Journal of Political Economy*, 125(1) (2017), 69—98.
- [4] Chen, Yiqiu and Markus Moller. "Regret-free truth-telling in school choice with consent." *Theoretical Economics*, 135 (2023).
- [5] Escobar, Juan F and Leonel Huerta. "Segregation and affirmative action in school choice." *Journal of Political Economy: Microeconomics* (2025).
- [6] Feizi, Mehdi. "Notions of rank efficiency for the random assignment problem." *Journal of Public Economic Theory*, 26(6) (2024), e70008.
- [7] Kessel, Dany and Elisabet Olme "School choice priority structures and school segregation." Unpublished working paper, 6 (2018).
- [8] Kesten, Onur. "School choice with consent." *The Quarterly Journal of Economics*, 125(3) (2010), 1297—1348.
- [10] Ortega, Josué, Ziegler, Gabriel, Arribillaga, Pablo and Geng Zhao. "Identifying and quantifying (un)improvable students." (2025). ArXiv preprint.

UN PROBLEMA DE CONEXIÓN-DESCONEXIÓN EN GRAFOS Y SU RESOLUCIÓN

Diego Barrios

Universidad Nacional del Litoral, Argentina
Barrios.Diego.E1000@gmail.com

El Hex es un juego de mesa abstracto para dos jugadores que se juega en un tablero en forma de rombo cubierto por hexágonos. Cada jugador tiene como objetivo conectar con sus fichas los lados opuestos del tablero que le corresponden, impidiendo al mismo tiempo que el rival logre su conexión. El juego garantiza siempre un ganador. La dinámica del Hex se puede representar a través de la teoría de grafos.

Inspirados en este juego, en este trabajo se define el siguiente problema: Dado un grafo conexo $G = (V, E)$ y dos pares de vértices $(R_1, R_2), (B_1, B_2)$, hallar el mínimo conjunto de aristas de E que conectan el primer par de nodos y al mismo tiempo, al ser removidas, desconectan al otro par. Llamamos a este problema: problema de conexión-desconexión en grafos.

En primer lugar, se analiza la relación entre el problema planteado, y los problemas de grafos de mínimo corte y de mínimo camino entre dos vértices. Para estos dos últimos problemas existen algoritmos eficientes conocidos, para los cuales se han propuesto numerosas implementaciones y mejoras ([1]-[5]).

En segundo lugar, se propone un algoritmo para resolver el problema. Este algoritmo aplica los métodos conocidos de mínimo corte y mínimo camino para resolver subproblemas inducidos en cada iteración, con el objeto de determinar la solución al problema de conexión-desconexión de forma eficiente. Paralelamente, se formula un problema de programación entera binaria que representa el problema. Se aplican ambos abordajes para resolver varios casos de estudio ilustrativos, así como otros numerosos casos generados aleatoriamente. Se compara la performance de estas metodologías y se analizan las ventajas, alcances y limitaciones del algoritmo propuesto. Se plantean los aspectos que podrían mejorarse y que serán objeto de estudios futuros.

Finalmente, se analiza la aplicación de la metodología propuesta para diseñar una estrategia de juego del Hex.

Trabajo en conjunto con Marian Marcovecchio (Universidad Nacional del Litoral).

Referencias

- [1] Ford, L. R., Jr., and Fulkerson, D. R. Flows in networks. Princeton University Press, 1962.
- [2] Edmonds, J. and Karp, R.M. Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems. Journal of the ACM, 19(2): 248-264, 1972.
- [3] Ibrahim, I.Y and Ibrahim M.I. Zebari, I.M.I. A Comprehensive Review of the Ford-Fulkerson Algorithm for Network Flow Problems. Asian Journal of Research in Computer Science 18 (3):335–344, 2025.
- [4] Dijkstra, E. W. A note on two problems in connection with graphs. Numerische Mathematik, 1, 269–271, 1959.
- [5] Duan, R., Mao, J., Mao, X., Shu, X. and Yin, L. Breaking the sorting barrier for directed single source shortest paths. arXiv. <https://arxiv.org/abs/2504.17033>, 2025.

SOBRE REGLAS DE VOTACIÓN QUE SATISFACEN “RESISTENCIA A NOMBRES FALSOS” Y “PARTICIPACIÓN”

Agustín G. Bonifacio

Instituto de Matemática Aplicada San Luis - Universidad Nacional de San Luis, Argentina
agustinbonifacio@gmail.com

Consideramos reglas de votación en contextos donde las identidades de los votantes son difíciles de verificar. Los votantes pueden manipular el proceso emitiendo múltiples votos bajo diferentes identidades o absteniéndose de votar. Las inmunidades a tales manipulaciones se denominan, respectivamente, “resistencia a nombres falsos” (false-name-proofness) y “participación”. Para el dominio universal de preferencias (estrictas), estas propiedades implican conjuntamente “anonimidad” y son incompatibles con la “neutralidad”. En el dominio de preferencias definidas sobre todos los subconjuntos de un conjunto dado de objetos, ninguna regla que sea suryectiva y “neutral respecto de los objetos” puede satisfacer simultáneamente ambas propiedades y, además, el criterio “tops-only”. Sin embargo, cuando las preferencias sobre subconjuntos de objetos se restringen a ser separables, todas estas propiedades pueden cumplirse a la vez. Además, el dominio de preferencias separables es maximal para la compatibilidad de estas propiedades.

Trabajo en conjunto con Federico Fioravanti (Saint-Etienne School of Economics, Jean Monnet University, Saint-Etienne, France).

Referencias

- [1] Barberà, S., H. Sonnenschein, and L. Zhou. “Voting by committees,” Econometrica, 59 ((1991), 595–609.

- [2] Bonifacio, A.G., J. Massó, and P. Neme. "Preference restrictions for simple and strategy-proof rules: Local and weakly single-peaked domains," *Journal of Mathematical Economics*, 106 (2023), 102845.
- [3] Ching, S. and S. Serizawa. "A maximal domain for the existence of strategy-proof rules," *Journal of Economic Theory*, 78 (1998), 157—166.
- [4] Conitzer, V. "Anonymity-proof voting rules," in *Internet and Network Economics*, ed. by C. Papadimitriou and S. Zhang, Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 295—306, (2008).
- [5] Fioravanti, F. and J. Massó. "False-name-proof and strategy-proof voting rules under separable preferences," *Theory and Decision*, 97 (2024), 391—408.
- [6] Yokoo, M., Y. Sakurai, and S. Matsubara. "The effect of false-name bids in combinatorial auctions: New fraud in internet auctions," *Games and Economic Behavior*, 46 (2004), 174—188.

CARACTERIZACIÓN DE GRAFOS DISTANCIA-HEREDITARIO BALANCEADOS

Lucía Busolini

Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Departamento de Matemática & CONICET-Universidad de Buenos Aires, Instituto de Cálculo (IC), Argentina
lbusolini@dm.uba.ar

Una matriz $A \in \{0, 1\}^{n \times m}$ es balanceada [2] si no contiene como submatriz una matriz cuadrada de orden impar con exactamente dos 1's por fila y por columna. Un grafo G es balanceado [3] si su matriz de incidencia cliques maximales vs. vértices es balanceada. Bonomo, Durán, Lin y Szwarcfiter [4] probaron que un grafo es balanceado si y solo si no contiene soles impares generalizados como subgrafos inducidos. Sin embargo, esta caracterización no es una caracterización por subgrafos inducidos prohibidos minimales, ya que algunos soles impares generalizados contienen otros soles impares generalizados como subgrafos inducidos propios. No se conoce todavía una caracterización por subgrafos inducidos prohibidos minimales de la clase de grafos balanceados en general, aunque se lograron encontrar algunas caracterizaciones parciales, entre las cuales podemos mencionar la caracterización dentro de la clase de grafos sin diamantes [1], sin paw [5], cobipartitos, grafos de línea de multigrafos y complementos de grafos de línea de multigrafos [6].

Un grafo G se dice distancia-hereditario si es conexo y la distancia entre cualquier par de vértices $x, y \in V(G)$ es la misma en G que en cualquier subgrafo inducido conexo H de G . Se sabe que los grafos distancia-hereditarios son perfectos [8] y clique-perfectos [9]. Además, existen varias definiciones equivalentes de esta clase de grafos, entre la que podemos destacar la definición recursiva de Chang, Hsieh y Chen [7].

En esta charla voy a mencionar algunos trabajos previos que fueron fundamentales para lograr caracterizar los grafos distancia-hereditarios balanceados y expondré también un algoritmo lineal de reconocimiento para esta clase de grafos.

Trabajo en conjunto con Guillermo Durán (Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Departamento de Matemática & CONICET-Universidad de Buenos Aires, Instituto de Cálculo) y Martín D. Safe (Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur (UNS) & INMABB, Universidad Nacional del Sur (UNS)-CONICET, Bahía Blanca, Argentina).

Referencias

- [1] N. Apollonio y A. Galluccio. "Minimally unbalanced diamond-free graphs and Dyck-paths". *SIAM J. Discrete Math.* 29.4 (2015), 1837—1863.
- [2] C. Berge. "Balanced matrices". *Math. Program.* 2.1 (1972), págs. 19—31.
- [3] C. Berge y V. Chvátal, eds. "Topics on perfect graphs". Vol. 88. North-Holland Mathematics Studies. *Annals of Discrete Mathematics*, 21. North-Holland, Amsterdam (1984), pp. xiv+369.
- [4] F. Bonomo, G. Durán, M. C. Lin y J. L. Szwarcfiter. "On balanced graphs". *Math. Program.* 105.2-3, Ser. B (2006), 233—250.
- [5] F. Bonomo, G. Durán, M. D. Safe y A. K. Wagler. "Clique-perfectness and balancedness of some graph classes". *Int. J. Comput. Math.* 91.10 (2014), 2118—2141.
- [6] F. Bonomo, G. Durán, M. D. Safe y A. K. Wagler. "On minimal forbidden subgraph characterizations of balanced graphs". *Discrete Appl. Math.* 161.13-14 (2013), 1925—1942.

- [7] M.-S. Chang, S.-y. Hsieh y G.-H. Chen. "Dynamic programming on distance-hereditary graphs". Algorithms and computation (Singapore, 1997). Vol. 1350. Lecture Notes in Comput. Sci. Springer, Berlin (1997), 344–353.
- [8] E. Howorka. "A characterization of distance-hereditary graphs". Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 28.112 (1977), 417–420.
- [9] C.-M. Lee y M.-S. Chang. "Distance-hereditary graphs are clique-perfect". Discrete Appl. Math. 154.3 (2006), 525–536.

PARKING FUNCTIONS CON DINV SECUNDARIO IGUAL A 0.

Luis Agustín Cardenas Pena

Universidad de Talca, Chile
cardenaspenaluisa@gmail.com

Las parking functions son un objeto combinatorio que juega un rol importante en la combinatoria algebraica y el estudio de las funciones simétricas. Dos invariantes importantes en este contexto son el área debajo de una parking function, y la cantidad de pares de inversión diagonal (diagonal inversion pairs) abreviados como dinv. Los dinv se dividen en dos, los dinv primarios y los dinv secundarios.

En esta charla las trataremos meramente como un objeto combinatorio, y describimos las parking functions con dinv secundario igual a 0, enumerándolas mediante otros objetos combinatorios.

Se conocen varias biyecciones entre el conjunto $PF(n)$ de parking functions de tamaño n y otros objetos combinatorios. Un ejemplo es $F(n)$ el conjunto de los labeled rooted forest de tamaño n .

Un subconjunto de $PF(n)$ interesante es el conjunto $PFZ(n)$ de las parking functions con dinv secundario igual a cero. Se observó que los primeros 12 términos de la sucesión $\#PFZ(n)$ coinciden con la sucesión A007840 de oeis.org. Esta sucesión también cuenta el cardinal el conjunto $uF(n)$, los unimodal labeled rooted forest de tamaño n . Las biyecciones conocidas entre $PF(n)$ y $F(n)$ restringidas a $PFZ(n)$ no tienen a $uF(n)$ como imagen.

Uno de los conjuntos descriptos por la sucesión A007840 es $OC(n)$ la cantidad de formas de dividir a $[1, n]$ en ciclos, distinguiendo del orden. Por ejemplo, para $n = 2$ hay 3 formas que son $(1)(2)$, $(2)(1)$, (12) ya que distinguimos a $(1)(2)$ de $(2)(1)$.

En "Parking Functions with Zero Dinv" probamos que las funciones que enumeran los conjuntos $PFZ(n)$ y $OC(n)$ coinciden demostrando que satisfacen la siguiente relación de recursión:

$$\varphi(n) = \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(n-k)!} \sum_{\ell=0}^{n-k} \binom{n-k}{\ell} \varphi(\ell) \varphi(n-k-\ell). \quad (1)$$

Recientemente logramos explotar esta recursión para dar una biyección explícita entre $OC(n)$ y $PFZ(n)$, con la relación bien desarrollada se ve que $OC(n)$ se puede incrustar de forma bastante intuitiva en $PF(n)$ como las $PFZ(n)$. Componiendo la biyección $PFZ(n) \rightarrow OC(n)$ con una biyección conocida entre $OC(n) \rightarrow uF(n)$ se puede describir de forma directa una biyección entre $PFZ(n)$ y $uF(n)$. Un problema interesante a futuro es estudiar posibles extensiones de esta biyección a los conjuntos $PF(n) \rightarrow F(n)$.

Trabajo en conjunto con Susanna Fishel (Arizona State University).

Referencias

- [1] S. Fishel, L. Pena. Parking Functions with Zero Dinv. Arabian Journal For Mathematics (aceptado, pendiente de publicación).
- [2] A. M. Garsia, G. Xin, M. Zabrocki. A three shuffle case of the compositional parking function conjecture. Elsevier Journal of Combinatorial Theory, Series A, (1) 123 (2014), 202–238.
- [3] A. Guedes de Oliveira, M. las Vergnas. Parking Functions and labeled trees. Séminaire Lotharingien de Combinatoire 65 (2011), Article B65e.
- [4] K. Anders y K. Archer. Rooted forests that avoid sets of permutations. European Journal of Combinatorics, 77 (2019), 1–16.

PROPIEDADES ESPECTRALES DE GRAFOS DI-CAYLEY.

Paula Mercedes Chiapparoli

CIEM (CONICET), Universidad Nacional de Córdoba., Argentina
paula.chiapparoli@mi.unc.edu.ar

Dado un grupo G y S_ℓ, S_r, S_m subconjuntos de G , el grafo bi-Cayley $BX(G; S_\ell, S_r, S_m)$ está definido sobre el conjunto de vértices $G \times \{0, 1\}$, tal que los vértices (h, i) y (g, i) forman un lado dirigido si $i = 0$ y $gh^{-1} \in S_\ell$ o $i = 1$ y $gh^{-1} \in S_r$; y los vértices $(h, 0)$ y $(g, 1)$ forman un lado no dirigido si $gh^{-1} \in S_m$. Generalizamos esta noción para permitir grafos dirigidos. El grafo di-Cayley $DX(G; S_\ell, S_r, S_m)$ tiene conjunto de vértices $G \times \{0, 1\}$ tal que los vértices (h, i) y (g, i) forman un lado dirigido si $i = 0$ y $gh^{-1} \in S_\ell$ o $i = 1$ y $gh^{-1} \in S_r$; los vértices $(h, 0)$ y $(g, 1)$ forman un lado dirigido si $gh^{-1} \in S_m$ y los vértices $(h, 1)$ y $(g, 0)$ forman un lado dirigido si $hg^{-1} \in S_m$.

Daremos las matrices de adyacencia de los grafos bi/di-Cayley y de allí obtendremos su espectro en el caso donde los conjuntos de conexión son cerrados por conjugación. En particular, en el caso $S_\ell = S_r = S$, los autovalores del grafo di-Cayley espejo $\Gamma = DX(G; S, S, S_m)$ están dados por

$$\lambda_\Gamma^\pm(\chi) = \frac{1}{\chi(1)}(\chi(S) \pm \chi(S_m)),$$

donde $\chi(S) = \sum_{s \in S} \chi(s)$ y $\chi \in \hat{G}$ se mueve en el conjunto de todos los caracteres irreducibles de G .

Esto nos permitirá dar criterios de isospectralidad y equienergía.

Trabajo en conjunto con Ricardo A. Podestá (CIEM-CONICET), Universidad Nacional de Córdoba, Argentina.

Referencias

- [1] P. M. Chiapparoli, R. A. Podestá. On mirror di-Cayley (sum) graphs and their spectrum (work in progress).
- [2] P. M. Chiapparoli, R. A. Podestá. On di-Cayley graphs and their spectrum (work in progress).

SOBRE LA CONVERGENCIA DE PUNTOS FINALMENTE PERIÓDICOS PARA AUTÓMATAS CELULARES PERMUTACIONALES

Luca D'Amico

Universidad Nacional De Salta - Facultad de Ciencias Exactas - Departamento de Matemática, Argentina
damico.1985@gmail.com

En el marco de la teoría de la dinámica de los autómatas celulares unidimensionales, resulta interesante considerar familias de autómatas que alcanzan el conjunto límite en una cantidad finita de iteraciones. Algunos casos fueron estudiados en [1], [3] y [7].

A partir de un código prefijo $\mathcal{C}$ que permite la codificación de todo el full shift $\mathcal{A}^\mathbb{N}$, consideramos $\mathbb{E}_{\mathcal{C}}$ el Automata Celular Permutacional Elector asociado a $\mathcal{C}$, es decir: $\mathbb{E}_{\mathcal{C}}(x)_i = \sigma^{l(i)}(x)_i$ donde la transformación σ , definida por $\sigma(x)_i = x_{i+1}$, y $l(i)$ es la longitud del elemento de $\mathcal{C}$ que comienza en la posición i del punto.

En este trabajo vamos a describir una familia de Autómatas Celulares Permutacionales que alcanzan el conjunto límite en una cantidad finita de iteraciones en sus puntos finalmente periódicos.

Si consideramos el código prefijo $\mathcal{C}_1 = \{000, 001, 010, 011, 1000, 1001, 101, 11\}$, y $\mathbb{E}_{\mathcal{C}_1}$ el Automata Celular Permutacional Elector asociado, resulta que $\mathbb{E}_{\mathcal{C}_1}$ alcanza el conjunto límite en una cantidad finita de iteraciones en sus puntos finalmente periódicos.

Es decir, demostramos que para todo $x \in \mathcal{A}^\mathbb{N}$, σ -periódico de periodo mínimo n , existe $j_n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathbb{E}_{\mathcal{C}_1}^{j_n}(x) = \sigma^k(\mathbb{E}_{\mathcal{C}_1}^{j_n-1}(x)), k \in \{2, 3\}$$

Logramos describir una condición suficiente de cómo los puntos $\mathbb{E}_{\mathcal{C}_1}$ finalmente periódicos convergen (es decir, cuando $k = 2$ y cuando $k = 3$), en términos de los parámetros del código que determinan el autómata.

Desarrollamos este ejemplo para dar las bases y poder construir una familia de Autómatas Celulares Electores $\{\mathcal{C}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tales que los puntos finalmente periódicos alcancen el conjunto límite en una cantidad finita de iteraciones.

Trabajo en conjunto con Alberto, Diego Luis y Jadur, Camilo Alberto (Universidad Nacional De Salta - Facultad de Ciencias Exactas - Departamento de Matemática).

Referencias

- [1] Blanchard, F., Hansel, G. Systèmes codés. Theoret. Comput. Sci. (1) 44 (1986), 17–49.
- [2] Hedlund, G. Endomorphisms and automorphisms of the shift dynamical systems. Math. Syst. Theory (3) 4 (1969), 320–375.
- [3] Jadur, C., Yazlle, J. On the dynamics of autómatas celular induced from a prefix code. Advances in Applied Mathematics, Elsevier, (38) 38 (2007), 27–53. issn 0196-8858.
- [4] Kurka, P. Languages, Equicontinuity and Attractors in Cellular Automata. Ergodic Theory & Dynamical Systems 17 (1997), 417–433.
- [5] Kurka, P. Topological and Symbolic Dynamics. Cours Spécialisés 11, Société Mathématique de France (2003).
- [6] Lind, D. Marcus, B. Symbolic Dynamics and Coding. Cambridge University Press (1995).
- [7] Alberto, D. Sensitivity of Cellular Automata: The Case of Variable Length Shifts. Journal of Cellular Automata 13 (2017), 429–440.

PROPIEDADES ESPECTRALES DE LOS ASOCIAEDROS DE GRAFOS

Ana Gargantini

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Cuyo, Argentina
anagargantini@gmail.com

Los asociaedros de grafos fueron introducidos por Carr y Devadoss [1], como una generalización de los asociaedros clásicos, como así también de otras familias conocidas de politopos. En particular, cuando G es un camino, un ciclo, un grafo completo o un grafo estrella, el asociaedro $\mathcal{A}(G)$ de G permite recuperar, respectivamente, el asociaedro clásico, el cicloedro, el permutaedro o el stelloedro. Más allá de carácter de generalización, los asociaedros de grafos constituyen una herramienta valiosa en el estudio de estructuras combinatorias y su representación geométrica, y han encontrado aplicaciones en áreas tan diversas como la optimización, los sistemas jerárquicos de visualización, la generación de estructuras aleatorias y los modelos probabilísticos. El interés en estos objetos no solo recae en los politopos mismos, sino también en las propiedades de los grafos que estos determinan. Desde la teoría de grafos, se han estudiado diversos parámetros, entre ellos su hamiltonicidad, conectividad y diámetro [2,3].

Una herramienta central en la teoría de grafos es el análisis espectral de la matriz de adyacencia. El espectro de un grafo, definido como el conjunto de autovalores de dicha matriz, está estrechamente vinculado con propiedades estructurales como la conectividad, la expansión y la simetría, y desempeña un papel relevante en aplicaciones relacionadas con el isomorfismo, las caminatas aleatorias y el análisis de robustez. Sin embargo, pese a su importancia, el estudio espectral de los asociaedros de grafos ha recibido poca atención; en la literatura solo se encuentran algunos resultados sobre los autovalores del permutaedro y el asociaedro clásico [4].

En este trabajo, realizamos una contribución al análisis espectral de los asociaedros de grafos. En particular, obtenemos una cota inferior para el segundo autovalor más grande del asociaedro $\mathcal{A}(G)$ asociado a un grafo G . Asimismo, empleando particiones equitables, estudiamos el espectro de los stelloedros $\mathcal{A}(K_{1,n})$, probando la existencia de un autovalor en el intervalo $(n - 2, n - 1]$ e identificando, además, dos autovalores pequeños adicionales.

Trabajo en conjunto con Adrián Pastine (Instituto de Matemática Aplicada San Luis, CONICET-UNSL), Pablo Torres (Universidad Nacional de Rosario y CONICET) y Mario Valencia-Pabon (Université de Lorraine, CNRS, Inria, LORIA).

Referencias

- [1] M. Carr, S. Devadoss. Coxeter complexes and graph-associahedra. Topology and its Applications, 153.12 (2006), 2155–2168.
- [2] T. Manneville, V. Pilaud. Graph properties of graph associahedra. Séminaire Lotharingien de Combinatoire, 73 (2015), Article B73d.
- [3] J. Cardinal, L. Pournin, M. Valencia-Pabon. Diameter estimates for graph associahedra. Annals of Combinatorics, 26 (2022), 873–902.

- [4] S. Cioaba, V. Gupta. A lower bound for the smallest eigenvalue of a graph and an application to the associahedron graph. Bulletin of the Romanian Mathematical Society, 65.113, no. 4 (2022), 393-404.

DESCOMPOSICIÓN DE LARSON Y DESCOMPOSICIÓN SD-KE EN GRAFOS CON MATCHING PERFECTO

Agustina Victoria Ledezma

Instituto de Matemática Aplicada San Luis (UNSL-CONICET) y Departamento de Matemática, Universidad Nacional de San Luis, Argentina
agustinaledezma@gmail.com

Un conjunto independiente I_C es llamado conjunto independiente crítico si

$$|I_C| - |N(I_C)| \geq |J| - |N(J)|$$

para todo conjunto independiente J . El número de independencia crítico de un grafo es la cardinalidad de un conjunto independiente crítico máximo.

La descomposición de Larson, ver [1], particiona cualquier grafo en dos subgrafos que satisfacen las siguientes condiciones: El número de independencia y el número de independencia crítico de un subgrafo coincide. El número de independencia crítico del otro subgrafo es igual a cero. La suma de los números de independencia de los dos subgrafos es igual al número de independencia del grafo original.

Un grafo es de König–Egerváry si su número de independencia más su número de matching es igual al orden del grafo.

La descomposición SD-KE de un grafo lo particiona en dos subgrafos disjuntos: uno es de König–Egerváry, y el otro se caracteriza por el hecho de que cada vértice yace ya sea en un posy o en una flower, configuraciones introducidas por Edmonds [2], Sterboul [3] y Deming [4].

En este trabajo, demostramos que ambas descomposiciones son equivalentes para grafos con un matching perfecto.

Trabajo en conjunto con Daniel A. Jaume, Kevin Pereyra y Valentina Soldera (Instituto de Matemática Aplicada San Luis (UNSL-CONICET) y Departamento de Matemática, Universidad Nacional de San Luis).

Referencias

- [1] Larson, C. E. The critical independence number and an independence decomposition. European Journal of Combinatorics, 32(2) (2011), 294–300.
- [2] Edmonds, J. Paths, trees, and flowers. Canadian Journal of mathematics, 17 (1965), 449–467.
- [3] Sterboul, F. A characterization of the graphs in which the transversal number equals the matching number. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 27(2) (1979), 228–229.
- [4] Deming, R. W. Independence numbers of graphs-an extension of the König–Egerváry theorem. Discrete Mathematics, 27(1) (1979), 23–33.

ÁRBOLES DE THINNESS PROPIA 2

Ignacio Maqueda

CONICET-UBA, Instituto de Ciencias de la Computación, Argentina
ignaciomaqueda95@gmail.com

La thinness propia de un grafo es un invariante que generaliza a los grafos de intervalos propios. Todo grafo tiene un valor numérico de thinness propia y los grafos con thinness propia 1 coinciden con los grafos de intervalos propios.

Un grafo es k -thin propio si sus vértices pueden ordenarse de manera que exista una partición de los vértices en k clases cumpliendo que para cada tripla de vértices $r < s < t$, tales que existe una arista entre r y t , se cumplen que si r y s pertenecen a la misma clase, entonces existe una arista entre s y t , y si s y t pertenecen a la misma clase, entonces existe una arista entre r y s . La thinness propia de un grafo es el menor valor de k tal que el grafo sea k -thin propio.

En este trabajo nos enfocamos en el cálculo de la thinness propia para los árboles. Caracterizamos los árboles de thinness propia 2, tanto estructuralmente como por sus subgrafos inducidos minimales prohibidos.

También mostramos por qué los resultados obtenidos para árboles de thinness propia 2 no pueden ser generalizados a árboles de thinness propia 3.

Trabajo en conjunto con Flavia Bonomo-Braberman (CONICET-UBA, Instituto de Ciencias de la Computación) y Nina Pardal (University of Huddersfield).

C-EARS Y PROPIEDADES DETERMINANTALES DE GRAFOS.

Diego Gabriel Martinez

Universidad Nacional de San Luis, Instituto de Matematica Aplicada de San Luis, Argentina
martinezdiegogabriel@gmail.com

En esta charla introducimos la noción de c-ear, un camino de longitud impar que conecta dos vértices de un cubrimiento mínimo por vértices de un grafo. Comenzamos estudiando los c-earless graphs (grafos sin c-ears) y presentamos una nueva caracterización de los grafos bipartitos elementales en términos de la ausencia de c-ears (véase [1]).

Luego investigamos cómo la adición o eliminación de c-ears afecta las propiedades estructurales y determinantes de los grafos. Con este fin, definimos las sucesiones c-earless, lo que nos permite demostrar que cualquier grafo de König-Egerváry matcheable puede reducirse, mediante la eliminación sucesiva de c-ears, a un grafo bipartito elemental único (módulo copias de K_2).

Una consecuencia clave de esta reducción es que el permanente y el determinante (salvo el signo) de la matriz de adyacencia permanecen invariantes durante el proceso. Estos resultados ofrecen una nueva perspectiva sobre la estructura algebraica y combinatoria de los grafos de König-Egerváry matcheables.

Trabajo en conjunto con Daniel A. Jaume (UNSL, Instituto de Matemática Aplicada San Luis - Conicet), Cristian Panelo (UNSL) y Kevin Pereyra (UNSL, Instituto de Matemática Aplicada San Luis - Conicet).

Referencias

- [1] Lovász, L. and Plummer, M. D. Matching theory (Vol. 367). American Mathematical Soc., 2009.

SOBRE LA DOMINACIÓN DE CAMINOS EN GRAFOS ORIENTADOS

María Pía Mazzoleni

Universidad Nacional La Plata, CMaLP, CONICET, Argentina
pia@mate.unlp.edu.ar

Un grafo orientado D está formado por un par $(V(D), A(D))$: siendo $V(D)$ es el conjunto (finito) de vértices de D y $A(D)$ el conjunto de pares ordenados de vértices distintos de D , llamados arcos, que se notan por uv . Dos vértices son adyacentes si existe un arco que los una. Un arco uv es una arista orientada de u hacia v . Los vértices u y v son los extremos de ese arco. El vértice u se llama cola y v se llama cabeza.

En este trabajo tratamos con el problema de dominación de caminos en grafos orientados. Mostramos que la noción de dominación entre distintos tipos de caminos tiene un rol fundamental a la hora de caracterizar a las clases de grafos orientados.

Un recorrido orientado en D es una secuencia alternada $W = x_1, a_1, x_2, a_2, x_3, \dots, x_{k-1}, a_{k-1}, x_k$ de vértices x_i y arcos a_j de D tal que x_i y x_{i+1} son la cola y la cabeza de a_i , respect.

Si los vértices del recorrido orientado W son distintos, decimos que W es un camino orientado. Si los vértices $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$ son distintos, $k \geq 3$ y $x_1 = x_k$, W es un ciclo orientado notado $\vec{C}_k$.

En todos estos casos la longitud es su número de arcos.

El (x, y) -camino orientado más corto (más largo) en D es un (x, y) -camino orientado de longitud mínima (máxima) en D .

Un (x, y) -camino orientado inducido es un (x, y) -camino orientado $x = x_1, x_2, \dots, x_k = y$ tal que los únicos arcos son $x_i x_{i+1}$ para $i \in \{1, \dots, k-1\}$.

Sean W y W' recorridos orientados con los mismos no adyacentes vértices extremos. Decimos que W domina a W' si todo vértice interno de W' es adyacente a algún vértice interno de W o pertenece a W .

Notación: Sean x e y vértices no adyacentes de D .

$\overrightarrow{SDP}(x, y) = \{W : W \text{ es un } (x, y)\text{-camino orientado más corto}\};$

$\overrightarrow{IDP}(x, y) = \{W : W \text{ es un } (x, y)\text{-camino orientado inducido}\}.$

$\overleftarrow{W}(x, y) = \{W : W \text{ es un } (x, y)\text{-recorrido}\};$

$\overleftarrow{SDP}(x, y) = \overrightarrow{SDP}(y, x);$

$\overleftarrow{IDP}(x, y) = \overrightarrow{IDP}(y, x);$

$\overleftarrow{W}(x, y) = \overrightarrow{W}(y, x).$

Definición: Sean $A, B \in \{\overrightarrow{SDP}, \overleftarrow{SDP}, \overrightarrow{IDP}, \overleftarrow{IDP}, \overleftarrow{W}, \overrightarrow{W}\}$. La clase $\mathbf{A/B}$ está formada por los grafos orientados D tal que: para todo par de vértices no adyacentes x e y de D , se tiene que: todo $W \in \mathbf{A}(x, y)$ domina a todo $W' \in \mathbf{B}(x, y)$, es decir, $W \in \mathbf{A}(x, y)$ y $W' \in \mathbf{B}(x, y)$ implica que W domina a W' .

En este trabajo, damos Teoremas de caracterización de las clases $\overrightarrow{IDP}/\overleftarrow{IDP}$, $\overrightarrow{SDP}/\overleftarrow{IDP}$, $\overleftarrow{W}/\overleftarrow{IDP}$ por subgrafos inducidos prohibidos. Y de otras clases que salen directamente por simetría. Lo cual demuestra que dichas clases son hereditarias. Observamos que no todas las clases son hereditarias.

Trabajo en conjunto con Noemí Gudiño y Silvia B. Tondato (Universidad Nacional de La Plata, CMaLP, Argentina).

LA ORTOGONALIDAD DIAMANTE $\perp_\diamond$ Y LA INVERSA BT

Paola Moas

Universidad Nacional de Río Cuarto - Universidad Siglo 21, Argentina
pmoas@exa.unrc.edu.ar

En [3] Ferreyra y Malik introdujeron una propiedad en el conjunto de matrices de índice 1, llamada core-aditividad: $(A + B)^c = A^c + B^c$, donde c simboliza la *inversa core* de una matriz [1]. Mediante dicha propiedad se dieron nuevas caracterizaciones del orden parcial core [1] (denotado por $A \leq^c B$) y sus potencias $A^2 \leq^c B^2$. Entre otras cosas, se estableció que si se asume la core-aditividad de dos matrices A y B de índice 1, entonces $A \leq^c B \iff B - A \leq^c B$.

Después, en [4] los mismos autores introdujeron un nuevo concepto de ortogonalidad para matrices de índice 1 llamada core-ortogonalidad: $A \perp_c B$ si y solo si $A^c B = 0$ y $BA^c = 0$. Los autores estudiaron fundamentalmente la interrelación de la core-ortogonalidad y la core-aditividad. Entre otros resultados, probaron que $A \perp_c B$ y $B \perp_c A$ implican que $(A + B)^c = A^c + B^c$. Sin embargo, la implicación recíproca se estableció como una conjetura, la cual se resolvió en [6].

Recientemente, en [5] se estudiaron versiones laterales de la core-ortogonalidad y su conexión con sumas paralelas matriciales y la *-ortogonalidad.

En este trabajo, se introduce la $\diamond$ -ortogonalidad $\perp_\diamond$ entre dos matrices A y B de índice arbitrario usando la *inversa BT* de Baksalary y Trenkler [2] (denotada por $A^\diamond$), es decir, $A \perp_\diamond B$ si $A^\diamond B = 0$ y $BA^\diamond = 0$. Mediante dicho concepto se estudia la relación binaria $\leq^{BT}$ sobre $\mathbb{C}^{n \times n}$ definida por $AA^\diamond = BA^\diamond$ y $A^\diamond A = A^\diamond B$ y su relación con la $\diamond$ -aditividad dada por $(A + B)^\diamond = A^\diamond + B^\diamond$, extendiendo de esta manera muchos de los resultados obtenidos en [4-6].

Este trabajo fue parcialmente financiado por la Universidad Nacional de Río Cuarto (PPI 18/C634 y PPI 18/C614-2), Universidad Nacional de La Pampa, Facultad de Ingeniería (R 172/24) y Universidad Siglo 21 (RR 6242/2024).

Trabajo en conjunto con Trabajo en conjunto con: David Eduardo Ferreyra (UNRC, UNLPam, CONICET), Fabián Eduardo Levis (UNRC, CONICET) y Valentina Orquera (UNRC, Universidad Siglo 21).

Referencias

- [1] O.M. Baksalary, G. Trenkler, Core inverse of matrices, *Linear Multilinear Algebra*, 58 (6) (2010), 681–697.
- [2] O.M. Baksalary, G. Trenkler, On a generalized core inverse, *Appl. Math. Comput.*, 236 (2014), 450–457.
- [3] D.E. Ferreyra, S.B. Malik, Some new results on the core partial order, *Linear Multilinear Algebra*, 70 (18) (2022), 3449–3465.
- [4] D.E. Ferreyra, S.B. Malik, Core and strongly core orthogonal matrices, *Linear Multilinear Algebra*, 70 (20) (2022), 5052–5067.
- [5] D.E. Ferreyra, F.E. Levis, S.B. Malik, R.P. Moas, One sided star and core orthogonality of matrices, *Linear Multilinear Algebra*, 73 (5) (2025), 893–908.
- [6] X. Liu, C. Wang, H. Wang, Further results on strongly core orthogonal matrix, *Linear Multilinear Algebra*, 71 (15) (2023), 2543–2564.

RECONSTRUCCIÓN DE GRAFOS A PARTIR DE COORDENADAS MÉTRICAS.

Mercè Mora

Universitat Politècnica de Catalunya, España
merce.mora@upc.edu

Dado un grafo G y un conjunto ordenado W de k vértices de G , podemos asociar a cada vértice u del grafo un vector con k coordenadas, donde la coordenada i -ésima es la distancia de u al k -ésimo vértice de W . Llamamos coordenadas métricas a dichas distancias.

Se dice que el conjunto W es resolutivo si a vértices distintos del grafo les corresponden vectores de coordenadas métricas distintos. En este caso, el conjunto de vectores de coordenadas métricas de los vértices del grafo forman un conjunto S de vectores con coordenadas enteras no negativas de cardinal el orden del grafo.

En este trabajo estudiamos el problema inverso, es decir, dado un conjunto S de vectores con coordenadas enteras no negativas, determinar si existen un grafo G y un conjunto resolutivo W de forma que S sea precisamente el conjunto de todos los vectores de coordenadas métricas de los vértices de G respecto al conjunto resolutivo W . En caso de existir tales G y W , decimos que S es realizable.

En este trabajo hemos caracterizado los conjuntos realizables y analizado la unicidad de la realización. Además, hemos estudiado algunas propiedades del grafo que se pueden deducir directamente del conjunto S , como por ejemplo, realizaciones minimales respecto al número de aristas del grafo y conjuntos que se pueden realizar con árboles.

Trabajo en conjunto con María Luz Puertas (Universidad de Almería, España) y Víctor Franco-Sánchez (Universitat Politècnica de Catalunya, España).

Referencias

- [1] M. Mora, M.L. Puertas, On the metric representation of the vertices of a graph, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* 46 (2023), #187.

1-PERSISTENCIA DE LA RELAJACIÓN CLIQUE EN GRAFOS CON ANTIAGUJERO IMPAR

Lucía Moroni

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura-Universidad Nacional de Rosario, Argentina
lmoroni@fceia.unr.edu.ar

Un poliedro $P \subseteq [0, 1]^n$ tiene la propiedad de 1-persistencia si para todo $c \in \mathbb{R}^n$ y x^* solución óptima de $\max\{cx : x \in P\}$, existe una solución óptima y^* del problema $\max\{cx : x \in P \cap \{0, 1\}^n\}$ tal que $y_j^* = x_j^*$ si $x_j^* = 1$. Esta propiedad se relaciona con otra propiedad más fuerte, la de 0,1-persistencia, analizada en [1].

En este trabajo, continuamos nuestro estudio iniciado en [2] de la 1-persistencia sobre la relajación por cliques del poliedro de conjuntos estables de un grafo G , $QSTAB(G)$. Si Q es la familia de todos los grafos G tales que $QSTAB(G)$ tiene la propiedad de 1-persistencia, probamos que esta propiedad es hereditaria en la familia Q y presentamos una condición necesaria para que un grafo pertenezca a Q relacionada con la

presencia de una pata (paw) en el grafo, conectada de una manera específica con un agujero o antiagujero impar inducido en el grafo G .

A partir de estas propiedades, un grafo G es mnQ si G no pertenece a Q pero todo subgrafo inducido por nodos propio de él, está en la familia. Mientras que en [2] estudiamos los grafos mnQ asociados a la presencia de patas conectadas con agujeros impares, en esta contribución, avanzamos en la caracterización de los grafos mnQ contruidos a partir de una pata y un antiagujero impar como subgrafo inducido.

La identificación de subestructuras prohibidas para esta familia puede ser utilizada para la caracterización de los grafos Q -persistentes, contribuyendo al diseño de un algoritmo de Branch and Bound apropiado para el problema de optimización sobre la relajación por cliques asociada a un grafo G .

Trabajo en conjunto con Delle Donne, Diego (ESSEC Business School, Cergy, France), Escalante, Mariana (CONICET, Argentina - Universidad Nacional de Rosario, Argentina) y Fekete, Pablo (Universidad Nacional de Rosario, Argentina).

Referencias

- [1] E. Rodríguez-Heck, K. Stickler, M. Walter, S. Weltge. "Persistency of Linear Programming Relaxations for the Stable Set Problem." Bienstock D., Zambelli G. (eds) Integer Programming and Combinatorial Optimization. IPCO 2020. Lecture Notes in Computer Science, vol 12125. Springer, Cham.
- [2] D. Delle Donne, M. Escalante, P. Fekete, L. Moroni. (2024). 1-Persistency of the Clique Relaxation of the Stable Set Polytope. In: Basu, A., Mahjoub, A.R., Salazar González, J.J. (eds) Combinatorial Optimization. ISCO 2024. Lecture Notes in Computer Science, vol 14594. Springer, Cham.

NUEVAS CARACTERIZACIONES Y PROPIEDADES DE LA INVERSA P - m -WG

Valentina Orquera

Universidad Nacional de Río Cuarto, Universidad Siglo 21, Argentina
vorquera@exa.unrc.edu.ar

En la literatura reciente de inversas generalizadas, ha sido de interés el estudio de inversas generalizadas que dependen de un cierto parámetro m . Este es el caso de la inversa m -WG introducida en [6] en el contexto de anillos abstractos, como una extensión de la inversa de grupo débil [5], que resulta del caso $m = 1$. También, la inversa m -WG se reduce a la inversa de grupo generalizada [1], cuando $m = 2$. Más aún, la inversa m -WG extiende a la clásica inversa de Drazin cuando m es mayor o igual al índice de la matriz. Recientemente, en [2] se introduce la inversa P - m -WG como una combinación lineal de la inversa m -WG y ciertos proyectores oblicuos asociados a la misma, extendiendo las inversas CPO y P -core-EP estudiadas en [3] y [4], respectivamente.

El objetivo de esta charla es presentar nuevas caracterizaciones y propiedades de la inversa P - m -WG. Además, a partir de una descomposición triangular superior de tipo Schur, llamada descomposición core-EP, se derivan condiciones necesarias y suficientes para que dicha inversa coincida con diferentes inversas generalizadas, tales como las inversas de Moore-Penrose, de Drazin, m -WG, core-EP, entre otras.

Este trabajo fue parcialmente financiado por la Universidad Nacional de Río Cuarto (PPI 18/C634 y PPI 18/C614-2) y Universidad Siglo 21 (RR 6242/2024).

Trabajo en conjunto con David Eduardo Ferreyra (UNRC, UNLPam, CONICET), Fabián Eduardo Levis (UNRC, CONICET) y Paola Moas (UNRC, Universidad Siglo 21).

Referencias

- [1] D.E. Ferreyra, S.B. Malik, A generalization of the group inverse, Quaest. Math. 46(10) (2023), 2129—2145.
- [2] S.B. Malik, D.E. Ferreyra, F.E. Levis, V. Orquera, The projection m -weak group inverse, Linear Multilinear Algebra (2025), <https://doi.org/10.1080/03081087.2025.2489419>.
- [3] J. Gao, H. Wang, S. Liu, The CPO-inverse and its partial orders, Linear Multilinear Algebra 73(3) (2025), 427—460.
- [4] B. Sitha, J.K. Sahoo, R. Behera, P.S. Stanimirović, A.A. Stupina, Generalized core-EP inverse for square matrices, Comput. Appl. Math. 42 (2023), 348.

- [5] H. Wang, J. Chen, Weak group inverse, Open Math. 16(1) (2018), 1218—1232.
- [6] Y. Zhou, J. Chen, M. Zhou, m -weak group inverses in a ring with involution, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. 115 (2021), 2.

COMPARACIÓN DE ALGORITMOS DE ASIGNACIONES PESADAS DE BIENES INDIVISIBLES.

Solange del Cielo Pitronaci

Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina

spitronaci@campus.ungs.edu.ar

El reparto de bienes indivisibles entre un grupo de personas es un problema que ha despertado mucho interés en las últimas dos décadas, ver por ejemplo la revisión de la historia del arte presentada en [1]. El problema se aborda en la mayoría de los trabajos con el supuesto que todas las agentes tienen la misma prioridad ante los bienes a repartir. Sin embargo, más recientemente ha ganado también atención el problema más realista (y que generaliza al anterior) en el que las agentes pueden tener distintas prioridades para recibir los bienes (prioridades pesadas), lo que ocurriría entre accionistas de una empresa que se disuelve, cuando tienen distintos porcentajes, o en una herencia en la que están involucradas personas con distinto parentesco a la persona fallecida, etc., ver por ejemplo [2] y [3]. En este caso, los repartos se denominan asignaciones pesadas. Cada agente entre las que se reparten los bienes tiene su propia subjetividad y se desea tener un método que reparta los bienes de manera que todas queden satisfechas con la asignación de acuerdo a la prioridad que les corresponde. Hay definidas distintas medidas de justicia y funciones de bienestar para medir cuán buenas son las asignaciones de este tipo (ver [3]) y lo deseable suele ser proponer algoritmos de asignación que se desempeñen bien respecto a estas medidas o cuantificadores. Proponemos un método de asignación y lo comparamos a través de simulaciones con otros algoritmos conocidos. Para el algoritmo que generaliza a Round Robin al caso de prioridades pesadas presentado en [3] proponemos modificaciones. Generalizamos algoritmos de asignación entre agentes de igual prioridad presentados en [4] y [5] al caso de prioridades pesadas. A su vez, para casos de pocos agentes y pocos artículos también comparamos con métodos exhaustivos que logran, de existir, asignaciones pesadas proporcionales o asignaciones pesadas libres de envidia (ver definiciones en [3]), observando en qué proporción de casos no se logran estas asignaciones justas con los algoritmos que analizamos. También comparamos con métodos exhaustivos que maximizan medidas de bienestar como el Bienestar de Nash para prioridades pesadas (ver [3]) o el igualitario en los casos de prioridades pesadas, observando la pérdida con los algoritmos analizados en este sentido. El objetivo de realizar esta comparación es elegir los métodos más destacados por separado para los casos en los que es posible una búsqueda exhaustiva entre todas las posibles asignaciones y los que no y programar una aplicación para que usuarios/as interesados/as puedan disponer libremente de estos algoritmos de asignación.

Trabajo en conjunto con Agustín Alvarez (Universidad Nacional de General Sarmiento, Instituto de Ciencias).

Referencias

- [1] Amanatidis, G., Aziz, H., Birmpas, G., Filos-Ratsikas, A., Li, B., Moulin, H., [...] and Wu, X. Fair Division of Indivisible Goods: Recent Progress and Open Questions. Artificial Intelligence, 103965 (2023).
- [2] Suksompong, W. Weighted fair division of indivisible items: A review. Information Processing Letters, 187, 106519 (2025).
- [3] Chakraborty, M., Igarashi, A., Suksompong, W., and Zick, Y. Weighted envy-freeness in indivisible item allocation. ACM Transactions on Economics and Computation (TEAC), 9(3) (2021), 1–39.
- [4] Plaut, B., and Roughgarden, T. Almost envy-freeness with general valuations. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 34(2) (2020), 1039–1068.
- [5] Goldberg, P. W., Høgh, K., and Hollender, A. The frontier of intractability for EFX with two agents. Theoretical Computer Science, 115367 (2025).

CARACTERIZACIÓN DE GRAFOS “TRIVIAALLY PERFECT” DE “PROPER THINNESS” 2

Barbara Rivero

FCEyN - UBA , Argentina
barbara.m.rivero@gmail.com

La proper thinness de un grafo es un invariante que generaliza el concepto de grafo de intervalos propio. Todo grafo tiene un valor numérico de proper thinness, y los grafos con proper thinness igual a 1 son exactamente los grafos de intervalos propios.

Un grafo es proper k -thin si sus vértices pueden ordenarse de tal manera que exista una partición de los vértices en k clases que satisfaga que, para cada triple de vértices $r < s < t$, tal que existe una arista entre r y t , se cumple que si r y s pertenecen a la misma clase, entonces existe una arista entre s y t , y si s y t pertenecen a la misma clase, entonces existe una arista entre r y s . La proper thinness es el menor valor de k tal que el grafo es proper k -thin.

En este trabajo nos enfocamos en el cálculo de la proper thinness para los grafos threshold y trivially perfect, donde los grafos threshold son una subclase de los trivially perfect. Caracterizamos los grafos trivially perfect con proper thinness 2, tanto estructuralmente como por sus subgrafos inducidos mínimos prohibidos. Por otro lado, se concluye que los grafos threshold tienen, como máximo, proper thinness igual a 2.

Trabajo en conjunto con Eric Brandwein, Ignacio Maqueda y Flavia Bonomo (FCEyN, Universidad de Buenos Aires, Argentina).

Referencias

- [1] F. Bonomo Et al. On the thinness and proper thinness of a graph, 2020.

ARISTA-DOMINACIÓN EFICIENTE HEREDITARIA

Germán Nicolás Sabatini

Universidad Nacional del Sur, Argentina
german.sabatini@uns.edu.ar

Un conjunto dominante eficiente en un grafo es un conjunto independiente de vértices D tal que todo vértice del grafo pertenece a D o es adyacente a un único vértice en D . El problema de decidir si un grafo admite un conjunto dominante eficiente es NP-completo para grafos en general e incluso restringido a distintas clases de grafos, como por ejemplo los grafos de línea o los grafos cordales. No obstante, se conocen clases de grafos para las cuales el problema es polinomial, como los grafos split y los grafos de co-comparabilidad. Una caracterización estructural de la familia de los grafos tales que todo subgrafo inducido admite un conjunto dominante eficiente fue dada por Milanič [3].

Un conjunto dominante de aristas eficiente en un grafo es un matching F tal que toda arista del grafo pertenece a F o es incidente a una única arista de F . De manera análoga a la dominación eficiente por vértices, el problema de decidir si un grafo admite un conjunto dominante de aristas eficiente es NP-completo en general, e incluso restringido a distintas clases de grafos como los grafos de línea [2]. También se conocen clases de grafos para las cuales el problema es polinomial, como los grafos bipartitos estrella-convexos [4] y los libres de P_{10} [1].

Presentaremos una caracterización por subgrafos inducidos prohibidos de la clase de los grafos tales que todo subgrafo inducido admite un conjunto dominante de aristas eficiente. Además, ofreceremos una caracterización estructural de dicha clase describiendo las posibles componentes conexas de los grafos que la conforman.

Trabajo en conjunto con Martín Darío Safe (Universidad Nacional del Sur, Argentina).

Referencias

- [1] A. Brandstädt and R. Mosca, Finding dominating induced matchings in P_{10} -free graphs in polynomial time, Theoret. Comput. Sci. 990 (2024), Paper No. 114404, 16.
- [2] D.L. Grinstead, P.J. Slater, N.A. Sherwani, and N.D. Holmes, Efficient edge domination problems in graphs, Inform. Process. Lett. 48 (1993), no. 5, 221—228.
- [3] M. Milanič, Hereditary efficiently dominatable graphs, J. Graph Theory 73 (2013), no. 4, 400—424.

- [4] B.S. Panda and J. Chaudhary, Dominating induced matching in some subclasses of bipartite graphs, Theoretical Computer Science 885 (2021), 104–115.

CARACTERIZACIÓN TIPO-HALL DE LOS POSY-GRAFOS

María Valentina Soldera Ruiz

Universidad Nacional de San Luis, Argentina
mvsrpame@gmail.com

En 1979, Sterboul [1] introdujo un nuevo tipo de configuración conocida como posies. Recientemente, en 2025, Jaume, Martínez, Panelo y Pereyra propusieron una generalización de este concepto, denominada Jposies, que ofrece una mayor flexibilidad y una aplicabilidad más amplia que las posies clásicas. Definimos un posy-grafo como un grafo con un matching perfecto en el cual cada vértice pertenece a alguna Jposy. En esta charla, investigamos las propiedades estructurales de los posy-grafos y presentamos una caracterización de tipo-Hall para esta nueva clase de grafos.

Trabajo en conjunto con Daniel A. Jaume, Agustina Ledezma y Kevin Pereyra (Universidad Nacional de San Luis, Argentina).

Referencias

- [1] Sterboul, F. A characterization of the graphs in which the transversal number equals the matching number. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 27(2) (1979), 228–229.

ORIENTACIÓN ÓPTIMA DE HIPERGRAFOS

Gabriel Valiente

Universidad Politécnica de Cataluña, España
gabriel.valiente@upc.edu

Presentamos el problema de asignar una dirección a las aristas de un hipergrafo de modo que se minimice el número de vértices fuente y sumidero. Consideramos hipergrafos cuyas aristas están divididas en dos subconjuntos disjuntos de vértices, que se convertirán en la cola y la cabeza de la arista al orientarse. Demostramos que el problema es NP-difícil incluso cuando se restringe a hipergrafos donde cada vértice pertenece exactamente a dos aristas, pero que se puede resolver en tiempo polinómico en grafos.

También presentamos una forma más general del problema de orientación de hipergrafos, en la que algunos vértices están restringidos a ser fuente, sumidero o vértice interno. Demostramos que sigue siendo resoluble en tiempo polinomial en grafos mediante un algoritmo de tiempo lineal.

Estos problemas tienen aplicación práctica en la orientación de las reacciones bioquímicas en las redes metabólicas.

Trabajo en conjunto con Alberto José Ferrari, Valeria Leoni y Graciela Nasini (Universidad Nacional de Rosario, Argentina).

GRAFOS SIN TRIÁNGULOS CUYO CUADRADO DE LÍNEA NO TIENE AGUJEROS DE LONGITUD AL MENOS k

Martina Vergara

Departamento de Matemática, UNS e INMABB, UNS-CONICET, Argentina
martina.vergara@uns.edu.ar

El grafo de línea de un grafo G , denotado $L(G)$, tiene un vértice por cada arista de G y dos vértices de $L(G)$ son adyacentes si y solo si corresponden a aristas que comparten un extremo. El cuadrado de un grafo G , denotado G^2 , tiene los mismos vértices que G y dos vértices de G^2 son adyacentes si y solo si están unidos en G por un camino de longitud a lo sumo 2. El cuadrado de línea de un grafo G es el cuadrado del grafo de línea de G , es decir, $L(G)^2$. Denotamos por C_k al ciclo sin cuerdas con k vértices. Decimos que C_k es un agujero si $k \geq 4$. Un grafo es libre de C_k si no contiene C_k como subgrafo inducido. Un grafo es libre de $C_{\geq k}$ si es libre de C_t , para todo $t \geq k$.

Dos aristas se dicen independientes si no comparten extremos ni son ambas incidentes a una arista en común. El problema del Matching Inducido Máximo (MIM) consiste en encontrar un conjunto de aristas

independientes dos a dos de máxima cardinalidad. El problema del Conjunto Independiente Máximo (CIM) consiste en hallar un conjunto de vértices no adyacentes dos a dos de máxima cardinalidad. Claramente, resolver MIM en un grafo G es equivalente a resolver CIM en $L(G)^2$. Este hecho implica que MIM puede resolverse en tiempo polinomial (resp. cuasipolinomial) en la clase de todos los grafos G tales que $L(G)^2 \in \mathcal{H}$, para cada clase $\mathcal{H}$ de grafos en la cual CIM puede resolverse en tiempo polinomial (resp. cuasipolinomial).

En particular, se sabe que CIM se puede resolver en tiempo polinomial en la clase de los grafos libres de $C_{\geq 5}$ [1] y en tiempo cuasipolinomial en la clase de los grafos libres de $C_{\geq k}$, para cada k [2]. Por lo tanto, si $\mathcal{G}_{\geq k}$ es la clase de los grafos G tales que $L(G)^2$ es libre de $C_{\geq k}$ entonces MIM se puede resolver en tiempo polinomial en $\mathcal{G}_{\geq 5}$ y en tiempo cuasipolinomial en $\mathcal{G}_{\geq k}$, para cada k , respectivamente.

Scheidweiler y Wiederrecht [3] caracterizaron la clase de los grafos cuyo cuadrado de línea es libre de C_k , para cada $k \geq 4$. A partir de dicha caracterización, en particular, hallaron la familia de subgrafos inducidos prohibidos para la clase de los grafos cuyo cuadrado de línea es cordal, esto es, para $\mathcal{G}_{\geq 4}$. Sin embargo, ninguna de estas caracterizaciones es por subgrafos inducidos prohibidos minimales, pues algunos de los subgrafos prohibidos contienen a otros como subgrafos inducidos propios.

Adaptando métodos que desarrollamos en un trabajo previo sobre cuadrados de línea libres de caminos sin cuerdas, en esta comunicación presentamos una caracterización por subgrafos inducidos prohibidos minimales de la clase de los grafos sin triángulos cuyo cuadrado de línea es libre de $C_{\geq k}$, para cada $k \geq 4$. Cada familia de subgrafos inducidos prohibidos minimales queda caracterizada mediante un conjunto de cadenas aceptadas por un autómata finito determinista.

* Este trabajo fue financiado parcialmente por los subsidios PGI 24/L115 y 24/L133 de la Universidad Nacional del Sur. M.D. Safe fue financiado parcialmente por el subsidio PIBAA 28720210101185CO del CONICET.

Trabajo en conjunto con Martín D. Safe (Departamento de Matemática, UNS e INMABB, UNS-CONICET).

Referencias

- [1] T. Abrishami, M. Chudnovsky, M. Pilipczuk, P. Rzażewski, and P. Seymour. Induced subgraphs of bounded treewidth and the container method. *SIAM J. Comput.*, 53(3):624—647, 2024.
- [2] P. Gartland, D. Lokshtanov, M. Pilipczuk, M. Pilipczuk, and P. Rzażewski. Finding large induced sparse subgraphs in $C_{\geq t}$ -free graphs in quasipolynomial time. In *STOC '21—Proceedings of the 53rd Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing*, pages 330—341. ACM, New York, 2021.
- [3] R. Scheidweiler and S. Wiederrecht. On chordal graph and line graph squares. *Discrete Appl. Math.*, 243:239—247, 2018.

Talleres de la Reunión de Educación Matemática

LECCIONES DE LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA

Fernando J. Bifano
Universidad de Buenos
Aires

Nicolás Igolnikov
Universidad de Buenos
Aires

Fundamentación

¿Cuál puede ser el valor de incorporar la historia de la matemática a la formación docente? ¿Qué lecciones podemos aprender de la historia para contribuir a la formación docente? Si bien el conocimiento de cómo se desarrollaron las nociones matemáticas puede resultar de interés para algunas mentes ávidas por saciar la curiosidad, es posible concebir aportes más sustantivos y complejos para la formación de las y los docentes. En línea con lo que plantea la literatura en relación con porqué y cómo integrar la historia de la ciencia para la enseñanza [10], [11], [7], [9], [3], [6], asumimos que, además del valor intrínseco de la historia en sí, dialogar y confrontar con las fuentes históricas puede contribuir a desarrollar en las y los enseñantes la capacidad de comprender las producciones de sus estudiantes. Arcavi e Isoda [1] denominan esta capacidad como “escucha productiva” y sostienen que se fomenta a partir de un trabajo de descifrado de lo que los testimonios de la historia nos proponen a través de un esfuerzo por desempaquetarnos de nuestro conocimiento experto, descentrándonos de nuestra perspectiva como la única posible para el abordaje de un problema. A su vez, y en línea con diferentes corrientes didácticas que enfatizan la pertinencia de la indagación de la génesis histórica de los conceptos para incorporar herramientas y elementos de análisis para el diseño y evaluación de propuestas de enseñanza ([3], [5], [2], [8]), adherimos a la posición de que convocar a docentes -en formación y/o en ejercicio- al estudio de tales procesos genéticos aporta elementos para adquirir una “vigilancia epistémica” [2] que posibilite un juicio crítico sobre las razones de ser [5] de determinados conceptos matemáticos, así como de la naturaleza contextualizada y social de la práctica matemática. Estas ideas son las bases sobre las que se sustenta nuestra propuesta de taller para docentes que enseñan matemática en los diferentes niveles de escolaridad.

Objetivos

- Desarrollar una mirada crítica sobre los procesos históricos a fin de evitar lecturas ingenuas y estereotipadas de las nociones matemáticas.
- Reflexionar sobre el valor didáctico de integrar elementos propios de la historia de la matemática para repensar la enseñanza.
- Introducirse en un proceso de “desempaquetamiento” de los conocimientos expertos adquiridos para resituarse en la perspectiva de aprendices.

Modalidad de trabajo

El taller se desarrollará en dos sesiones, donde se abordarán entre otras tareas:

- La interpretación de tablillas de arcilla, papiros y/o textos clásicos de la antigüedad con el objeto de propiciar la capacidad de desempaquetamiento y descentración de las y los participantes.
- La resolución de problemas desde el punto de vista del sistema de conocimientos disponibles en un determinado tiempo histórico.
- La discusión en torno a la interrelación de dominios de la matemática y al proceso de delimitación de los mismos.
- El análisis de producciones de estudiantes en relación con diversos problemas matemáticos, con el objeto de discutir las posibles interpretaciones que pueden hacerse de los conocimientos que las y los estudiantes ponen en juego de maneras más o menos explícitas a la hora de resolverlos.

La distribución e interrelación de estas tareas buscará tensionar los vínculos que pueden establecerse entre la interpretación de las fuentes históricas y el desarrollo de la “escucha productiva”. Cada sesión se desarrollará de forma que permita diferentes tiempos de trabajo que combinen lo individual, lo grupal y lo colectivo.

Destinatarios

El taller está abierto a la participación de estudiantes del profesorado, docentes y formadores de docentes. Es de esperar que esta diversidad de experiencias y trayectorias propicie el desarrollo de intercambios ricos y fecundos.

Bibliografía

- [1] Arcavi, A. and Isoda, M. (2007). *Learning to listen: From historical sources to classroom practice*. Educational Studies in Mathematics, 66, 111–129. Special issue on the history of mathematics in mathematics education. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-9075-8>
- [2] Artigue, M. (2018). *Epistemología y didáctica. El cálculo y su enseñanza*. 11. 1–31. 10.61174/recacym.v11i1.26.
- [3] Barbin, É. and Tzanakis, C. (2014). *History of mathematics and education*. In S. Lerman (Ed.), Encyclopedia of mathematics education. Springer <https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8>
- [4] Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Didactique des mathématiques, 1970–1990. Dordrecht: Kluwer Academic.
- [5] Chevallard, Y. (2013). *Enseñar matemáticas en la sociedad del mañana: Alegato a favor de un contraparádigma emergente*. Journal of Research in Mathematics Education, 2(2), 161–182.
- [6] De Vittori, T. (2022). *Études Didactiques de l'Utilisation de l'Histoire des Mathématiques en classe et en formation (EDUHM)*. Histoire et perspectives sur les mathématiques [math.HO]. Université d'Artois. tel-03790136
- [7] Furinghetti, F. (2007). *Teacher education through the history of mathematics*. Educational Studies in Mathematics, 66, 131–143. Special issue on the history of mathematics in mathematics education.
- [8] Godino, J. D. (2024). *Enfoque ontosemiótico en educación matemática*. Fundamentos, herramientas y aplicaciones. McGraw Hill-Aula Magna. ISBN: 9788410066519
- [9] Jankvist (2009). *A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education*. Educ Stud Math.;71(3):235–261. <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9174-9>.
- [10] Tzanakis, C., and Arcavi, A. (2000). *Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey*. In J. Fauvel, and J. van Maanen (Eds.), History in mathematics education (pp. 201–240, Chapter 7). The ICMI Study. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- [11] Tzanakis, C., and Thomaidis, Y. (2000). *Integrating the close historical development of mathematics and physics in mathematics education: Some methodological and epistemological remarks*. For the Learning of Mathematics, 20(1), 44–55.

CANGURO MATEMÁTICO, EXPERIENCIAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Florencia Mardones

Universidad Nacional
del Comahue

Flavia Santamaria

Universidad Nacional
del Comahue

Fundamentación

La Competencia Internacional Canguro Matemático es un evento emocionante que empodera a los y las estudiantes, ayudándoles a aumentar su autoconfianza en matemática. Gracias a su metodología divertida, resulta especialmente atractiva tanto para aquellos a quienes no les apasionan las matemáticas como para los verdaderos entusiastas de esta disciplina. Esta competencia se ha convertido en una actividad académica recreativa muy popular en numerosos países alrededor del mundo. Originada hace más de 20 años en Francia, e inspirada en una propuesta de Australia, la competencia Canguro ha crecido rápidamente, con millones de estudiantes participando a nivel global. Está dirigida a estudiantes de educación primaria (desde 5to grado) y secundaria (hasta 4to año) y no tiene fines selectivos; más bien, se utiliza como una herramienta para acercar a los y las estudiantes a matemáticas no rutinarias.

Desde 2017, estudiantes y docentes de tres asignaturas del Profesorado Universitario de Matemática, junto con integrantes de proyectos de extensión del Centro Regional Universitario de Bariloche, han hecho posible que seamos sede para la promoción y el acompañamiento de esta competencia en la región de Bariloche y sus alrededores. Tras participar en la Competencia, los y las estudiantes de las diferentes asignaturas diseñan e implementan talleres de resolución de problemas Canguro Matemático, adaptándolos a los diversos contextos socioeducativos.

El taller que les presentamos busca que los y las participantes vivan experiencias enriquecedoras y reflexionen sobre una propuesta para abordar la resolución de problemas en las aulas actuales. Reconocer la heterogeneidad del aula es un gran desafío, y esta propuesta de formación permite discutir en pequeños grupos los criterios para seleccionar los problemas a abordar, teniendo en cuenta la variedad de recursos cognitivos y metacognitivos de los y las estudiantes.

Al anticipar diferentes formas de resolver problemas y discutirlos, ampliamos nuestro repertorio de soluciones y refinamos nuestra comprensión sobre cómo los estudiantes construyen su conocimiento, así como nuestras propias prácticas. Reconocer la diversidad en el aula nos invita a pensar en propuestas más abiertas, con distintos niveles de desafío y explicitación. El trabajo con docentes de distintos niveles educativos interesados en la matemática potencia el trabajo didáctico-matemático.

Objetivos

- Adentrarse en una experiencia de resolución de problemas Canguro Matemático.
- Analizar y reflexionar sobre algunas de las distintas experiencias de talleres realizadas en escuelas e instituciones del nivel superior en los últimos años teniendo en cuenta los distintos aspectos didácticos y matemáticos presentes en las mismas.

Modalidad de trabajo

Se invitará a los y las asistentes a conformar pequeños grupos de trabajo heterogéneos, de un máximo de cuatro integrantes. Esta diversidad de perspectivas enriquecerá el proceso de aprendizaje.

Las acciones de explicar, justificar y confrontar son fundamentales para validar el trabajo realizado y enriquecer futuras experiencias.

En la primera parte del taller, cada integrante del grupo trabajará en la resolución de algunos problemas de uno o dos niveles de la Competencia Canguro Matemático, para luego discutirlos e intercambiar ideas con los otros miembros. Posteriormente, cada grupo deberá seleccionar tres problemas para compartir sus resoluciones a los otros grupos. Durante esta fase, se discutirán los criterios de selección utilizados, promoviendo así una reflexión crítica sobre el proceso. A lo largo de las tareas, se realizarán intervenciones estratégicas que potenciarán el espacio de intercambio y reflexión, asegurando que los y las participantes se sientan incluidos y motivados a contribuir.

En la segunda parte del taller, se presentarán y analizarán diversas experiencias vivenciadas desde el 2017 en cursos de nivel primario, secundario y superior. Se discutirán sus características y potencialidades, considerando el contexto socio-educativo en el que se desarrollaron. Este análisis integrará aspectos discutidos durante el taller, como: el papel de los diagramas como puente entre lenguajes en matemática, y al pensar y comunicar; la variación de los enunciados de los problemas como recurso para pensar el trabajo en aulas heterogéneas; familias de problemas; la planificación estratégica como hipótesis de trabajo; la intervención educativa en función de las estrategias/heurísticas asociadas a la resolución de problemas menos estructurados; la gestión del aula; el rol de estudiantes y docentes; las potencialidades y cuidados de este tipo de propuestas; la evaluación diagnóstica y del proceso; entre otras.

Destinatarios

El taller está destinado a docentes y estudiantes del profesorado de nivel primario y de matemática que se desempeñen o pretendan desempeñarse en el ámbito de la educación primaria (2do y 3er ciclo) y secundaria (en todas sus modalidades). Además nos interesa que puedan sumarse docentes y estudiantes del nivel superior de profesorados de nivel primario y secundario interesados e interesadas en reflexionar didácticamente en torno a propuestas de talleres de resolución de problemas matemáticos.

Bibliografía

- [1] Castorina, J. A. y Sadovsky, P. (2018). *Los saberes docentes y la producción de conocimiento sobre la enseñanza*. Desde la Patagonia, difundiendo saberes, 15 (26), 8 –12.
- [2] Davini, M. C. (2016). *La formación en la práctica docente*. Paidós.
- [3] Kalantzis, M., Cope, B. y Zapata G. C. (2019). *Las alfabetizaciones múltiples: teoría y práctica*. Octaedro. Introducción (pp. 6–20).
- [4] Perkins, D. (2018). *El aprendizaje pleno*. Paidós.

- [5] Rodríguez, M. (2015). *Resolución de problemas*. En M. D. Pochulu y M. A. Rodríguez (comp.), Educación matemática: aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos, 153-174. Universidad Nacional de General Sarmiento.
- [6] Rodríguez, M. (coord). (2016). *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en Educación Matemática*. Universidad Nacional de General Sarmiento.

DESAFÍOS AL TOMAR PARA EL AULA UNA INGENIERÍA DIDÁCTICA: EL CASO DE LA INTRODUCCIÓN DE LOS NÚMEROS ENTEROS EN UN CONTEXTO ALGEBRAICO.

Emanuel Issa

Universidad Nacional del Comahue

Fundamentación

En este taller se propone reflexionar sobre las dificultades que enfrentan los docentes a la hora de considerar para sus aulas una propuesta didáctica proveniente de la investigación educativa. En particular, tomaremos una ingeniería didáctica que busca introducir los números negativos en un contexto algebraico [3].

Numerosos autores señalan que se trata de un proceso no lineal. En [2] se muestra que la puesta en práctica de las innovaciones didácticas requiere el desarrollo de una gran diversidad de estrategias por parte de los docentes, y sostienen que se trata de un proceso que supone una adaptación mutua entre la propuesta y las prácticas habituales de los docentes. Por su parte, Sadovsky [4] pone de relieve otra dificultad por la que debe pasar un docente a la hora de trabajar con una ingeniería didáctica, y es la de apropiarse de ciertas concepciones epistemológicas sobre las cuales se diseñó dicha ingeniería. Indica que se les pide sostener una relación problema-conocimiento, esto es, la idea fundamental de que los conocimientos no se caracterizan por definiciones y propiedades, sino por los problemas que permiten abordar, y esta cuestión importante es difícil de considerar cuando no se ha participado de su construcción.

Por lo anterior interpretamos que la complejidad de las ideas que sustentan una propuesta proveniente de la investigación necesita de un trabajo de problematización de los objetos de enseñanza en ella involucrados. Dicha problematización debe poner de manifiesto el entrecruzamiento entre las concepciones propias de los docentes, y las que fundamentan la Ingeniería Didáctica.

Objetivos

- Discutir aspectos didáctico-matemáticos de una Ingeniería Didáctica que busca introducir los números enteros en un contexto algebraico.
- Vislumbrar algunas tensiones que se juegan al considerar dicha Ingeniería como recurso de enseñanza.

Modalidad de trabajo

Se propone una dinámica de taller que alterna momentos destinados a la resolución de problemas en grupos pequeños, y momentos para reflexionar de manera colectiva sobre los procesos de resolución, los sentidos de los objetos y el trabajo matemático implicado.

Destinatarios

Docentes de matemática – estudiantes de profesorado en matemática – investigadores en educación.

Bibliografía

- [1] Barrio, E.; Bednarz, N.; Cid, E.; Colipe, L.; Detzel, P.; Issa Nuñez, E.; Martinez, R.; Morari, R.; Petich, A.; Ruiz, M. E. y Zambrano, J. (2022) *Trabajo colaborativo entre profesores de matemática e investigadores en Didáctica de la Matemática. Desafíos y problematizaciones en la adaptación y difusión de una propuesta para la enseñanza de los números enteros*. EDUCO. Neuquén.
- [2] Block, D., Moscoso, A., Ramírez, M., Solares, D. (2007). *La apropiación de innovaciones para la enseñanza de las matemáticas por maestros de educación primaria*, pp. 731-726, en Revista Mexicana de Investigación Educativa, Distrito federal, Mexico, vol.12, N°033, ISSN (versión impresa): 1405-6666
- [3] Cid, E. (2015). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos*. Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza.
- [4] Sadovsky, P. (2015). Panelista en Coloquio 30 años de investigación educativa – mesa didácticas específicas. Coordinadores Fernando Avendaño (UNR) y Dora Riestra (UNComa) minuto 38. <https://www.youtube.com/watch?v=eRvXTzGiPDg>

COMPRENDER LOS NÚMEROS RACIONALES EN BASES NO DECIMALES

Natalia Salva
Universidad Nacional
del Comahue

Andrea Rivera
Universidad Nacional
del Comahue

**Maximiliano Palacios
Amaya**
Universidad Nacional
del Comahue

Jordi Alsina
Universidad Nacional
del Comahue

Fundamentación

En cuanto a la enseñanza y aprendizaje del objeto matemático “número racional”, una de las dificultades más relevantes radica en el uso de las diversas representaciones [3], [4]. Estas representaciones semióticas y sus significados forman parte de los saberes centrales comunes establecidos por el Ministerio de Educación Nacional (Núcleos de Aprendizajes Prioritarios, 2012). Por ejemplo, se señala que en el ciclo básico de la escuela secundaria (primer y segundo año), los estudiantes deben ser capaces de utilizar los números racionales en sus distintas expresiones y reconocer las propiedades de las relaciones en diferentes contextos, contribuyendo así a la formación del pensamiento numérico y de los sistemas numéricos. Según [1], la aprehensión conceptual de un objeto matemático se basa en dos de sus características fuertes: el uso de más de un registro de representación semiótica; y la creación y el desarrollo de sistemas semióticos nuevos que son símbolo de progreso del conocimiento.

Dos de las representaciones semióticas de los números racionales son: la representación como fracción y la representación decimal. Aunque suelen emplearse algoritmos o recetas mágicas para transformar los números de una representación a otra, persisten dificultades en la comprensión de los números racionales en relación a ambas representaciones. En la matemática escolar, generalmente se distingue entre números racionales e irracionales mediante su representación en el sistema decimal. Los números irracionales se definen como aquellos cuya expresión decimal es infinita y no periódica. Sin embargo, cuando se estudian los números racionales con representación decimal infinita, a veces las expresiones decimales infinitas (sin más detalles) no permiten determinar si se trata de un número racional o irracional. Por ejemplo, la secuencia 1,618033... podría corresponder al número áureo, pero también podría ser una secuencia como 1,61803333... (con infinitos tres), lo que indicaría un número racional. La escritura decimal infinita introduce cierta ambigüedad que sólo se puede aclarar añadiendo otros símbolos, términos o características que completen el significado de la representación. Esta dificultad se ve reforzada por la concepción persistente de que los números racionales deben tener períodos decimales compuestos únicamente por unos pocos dígitos, idea que se ve reforzada por las expansiones decimales generadas por las calculadoras, que con frecuencia se confunden con números irracionales debido a la falta de una relación aparente en las secuencias de números que aparecen en el visor [5].

La representación decimal es un tipo de sistema numeral presente en muchas de las familias lingüísticas que han formado parte de la historia de la humanidad, pero no es la única. Si bien existen diversos sistemas de notación (aditiva, mixta), en este taller nos enfocaremos en el sistema de notación posicional, donde la posición de las cifras indica si son unidades, decenas, centenas, etc., o en general, la potencia de la base. Es fundamental destacar que la propiedad de ser racional o irracional es independiente de la notación decimal, e incluso de cualquier base utilizada para representar el número. Esta característica es intrínseca al número y no depende de la notación empleada, a diferencia de otras propiedades que pueden cambiar al utilizar distintas bases. Por ejemplo, el número $(1/7)$ en base 10 se representa como 0,142857142857... (un decimal periódico infinito), mientras que en base 7 su expresión es 0,1 (un decimal finito).

En este taller, nos proponemos explorar la representación decimal en base 5 de los números racionales y su transformación a la representación fraccionaria. En particular, analizaremos cómo determinar el desarrollo decimal a partir de la representación como fracción, ya sea su longitud (si es finita) o la longitud del período y el lugar donde comienza (si es periódico infinito). Además, reflexionaremos sobre el uso de las calculadoras para analizar y anticipar el comportamiento de los decimales. El empleo de bases distintas a la decimal permitirá consolidar los conceptos y propiedades comúnmente asociados a los números racionales, al mismo tiempo que fomentará una reflexión crítica sobre las convenciones aritméticas que solemos utilizar.

Objetivos

Explorar la representación decimal en base 5 de los números racionales, y la transformación a la representación fraccionaria. Más específicamente:

- Discutir la complejidad matemática y cognitiva de la representación de los números racionales en distintas bases numéricas.
- Analizar materiales didácticos utilizados para la enseñanza de suma y multiplicación de números naturales, readecuados para la representación en base 5.
- Propiciar un espacio de intercambio y reflexión a partir del estudio de actividades que ponen el foco en la comprensión de las escrituras decimales de las fracciones.

- Valorizar y discutir el uso de las calculadoras para analizar y anticipar el desarrollo de decimales finitos e infinitos.
- Reflexionar sobre el concepto de número racional e irracional y la relación que tiene con su representación decimal.

Modalidad de trabajo

Se trabajará en modalidad taller, en donde los participantes serán organizados en pequeños grupos. En cada encuentro se comenzará con una presentación para repasar los conceptos utilizados para dicho encuentro. Luego se propondrán actividades para resolver en grupo, que ayuden a reflexionar sobre las problemáticas comunes que se encuentran en el aula. A modo de cierre, habrá un espacio para la puesta en común propiciando interacciones que permitan la validación y el debate con la moderación de los talleristas.

El taller se divide en 3 encuentros:

Primer encuentro Representación de números enteros positivos en bases no decimales. Ejemplos y actividades en base 5. Revalorización de materiales didácticos, como ábaco, collar matemático, rueda aritmética, bloques multibase, etc, para la suma, resta, multiplicación. Discusión con una mirada crítica sobre algoritmos utilizados en las cuentas paradas de suma, resta y multiplicación.

Segundo encuentro Representación de números racionales. Números con representación decimal finita en base 5. Transformación entre representación decimal y representación como fracción. Números con representación decimal infinita periódica pura en base 5. Transformación entre representación decimal y representación como fracción. Determinación de la longitud del periodo a partir de la representación como fracción.

Tercer encuentro Representación de números racionales representación decimal infinita periódica no pura. Cálculo del comienzo del periodo y su longitud en base 5. Transformación entre representación decimal y representación como fracción. Reflexión de lo abordado a lo largo del taller sobre las propiedades y definición de los números racionales, junto una breve discusión sobre los irracionales y su caracterización en relación a su representación decimal. Generalización de las propiedades vistas para base decimal.

Para llevar a cabo las actividades planteadas es necesario contar con calculadora. Además se aconseja repasar el tema “relaciones de congruencias módulo p ” en números enteros. Se puede leer las páginas 168-174 de [2].

Destinatarios

Docentes de Matemática en nivel medio y superior. Estudiantes de Profesorado y Licenciatura en Matemática.

Bibliografía

- [1] Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle.
- [2] Gentile, E. (1988). *Notas de álgebra I*. Ed. Eudeba.
- [3] Granados Niño, N.J. y Jiménez Espinosa, A. (2022), *Representaciones semióticas en números racionales*. Revista Habitus: Semilleros de investigación, 2(3). <https://doi.org/10.19053/22158391.13966>
- [4] Palacios-Amaya, M., Bianchi, V. y Montoro, V. (2018). *Estudiantes de escuela secundaria pensando los números racionales*. Revista de Educación Matemática, 33(3), 5–26.
- [5] Pochulu, M. D. (2007). *Períodos de números racionales: Un abordaje desde la teoría de números y con nuevos recursos*. Números: Revista de didáctica de las matemáticas, 68, 1–8.
- [6] Ross, K.E. (2013) *Elementary Analysis: The Theory of Calculus*. Springer New York.

(DES)HACIENDO MATEMÁTICA PARA ENSEÑAR MATEMÁTICA

Gabriel Soto
Universidad Nacional
de la Patagonia San
Juan Bosco

Anahí Luciana Díaz
Universidad Nacional
de la Patagonia San
Juan Bosco

Eliana Gómez
Universidad Nacional
de la Patagonia San
Juan Bosco

Mónica González
Universidad Nacional
de la Patagonia San
Juan Bosco

Cintia Negrette
Universidad Nacional
de la Patagonia San
Juan Bosco

Fundamentación

Dirigido a profesores de matemática de secundaria, futuros docentes y formadores, este taller invita a reflexionar y dialogar sobre el conocimiento especializado que fundamenta la enseñanza de la matemática. Partiendo de la premisa de que saber más matemática no garantiza mejores prácticas, el encuentro se centrará en explorar la naturaleza de los saberes involucrados en enseñar matemática desde la perspectiva del modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (MTSK). Se analizará la tensión entre la matemática escolar (ME) y la matemática académica (MA) – una doble discontinuidad clave en la construcción del MTSK – y cómo los docentes activan sus saberes en el contexto áulico. Se enfatizará la necesidad de establecer puentes entre la ME y la MA a través de la elementarización, ejemplificando con situaciones como la matemática subyacente a los algoritmos con fracciones y la relación entre la mediatriz y las cónicas, lo que permitirá revisar estas ideas desde la matemática escolar y contrastarlas con su rigor académico.

Objetivos

- Comprender la distinción entre matemática escolar y matemática académica, y su impacto en la práctica docente.
- Analizar cómo las dimensiones del Conocimiento Matemático (como parte del modelo MTSK) se manifiestan en la práctica docente al abordar contenidos específicos.
- Discutir estrategias y dispositivos de formación profesional que permitan a los docentes en ejercicio y en formación profundizar y fortalecer su conocimiento especializado.

Temas a discutir

- El modelo MTSK (Mathematical Teacher's Specialized Knowledge) como herramienta para analizar el conocimiento del profesor.
- La elementarización como proceso para conectar la matemática académica y la matemática escolar.
- Tensiones entre la matemática que se enseña y la matemática para la formación docente.
- El rol de las comunidades de práctica profesional (PLC) en el desarrollo del conocimiento especializado.
- Estrategias para identificar y analizar las jerarquías entre conceptos matemáticos que utilizan los docentes.

Este taller busca generar un espacio de aprendizaje colectivo donde podamos:

- Reflexionar acerca del conocimiento especializado necesario para una práctica docente poderosa desde diferentes perspectivas teóricas.
- Identificar estrategias para diseñar herramientas para la práctica profesional, para fortalecer la formación inicial y continua de profesores de matemática.

Esperamos contar con su activa participación en este importante debate sobre el corazón de la profesión docente en matemática.

Bibliografía

- [1] Soto, G. (2024) *(Des)haciendo matemática. Aportes para el estudio del conocimiento matemático para enseñar*. En J. Sagula (Comp.) V Simposio de Educación Matemática-Virtual: tendencias en investigación en Educación Matemática (pp 53-60). Luján: EdUnLu

TALLER SOBRE SENTIDO ESTOCÁSTICO

**Luis J.
Rodríguez-Muñiz**
Universidad de Oviedo

Resumen

En este taller se abordará el sentido estocástico mediante la integración de actividades inspiradas en el documento GAISE II [2], en los trabajos sobre los significados de la probabilidad [3] y también en investigaciones propias sobre estos aspectos en educación primaria y secundaria [1], [4], [7], [8], [9].

Se plantearán diferentes actividades para desarrollar el sentido estocástico a través de la experimentación física y digital con la aleatoriedad, el planteamiento de buenas preguntas, la formulación y comprobación o refutación de conjeturas, la inferencia estadística informal con los datos disponibles, la visualización de datos, y el dominio afectivo.

El informe GAISE II propone un ciclo de resolución de problemas estadísticos adaptado a partir del PPDAC de [10], en el que la formulación de preguntas es la primera etapa. Prestar atención a esta fase, y no reducir la enseñanza de la estocástica a responder a preguntas ya formuladas, resulta crucial y, para ello, la visualización de los datos es un elemento clave [5].

Por otro lado, la inferencia estadística informal [6] sirve como paradigma para promover en el aula situaciones en las que las buenas preguntas se relacionen con la disponibilidad o no de datos que les den respuesta y la posibilidad de apoyar o sospechar de la veracidad de determinadas conjeturas.

En el taller se abordarán estos aspectos mediante tareas escalables a diferentes niveles educativos.

Bibliografía

- [1] Alsina, Á., Muñiz-Rodríguez, L., Rodríguez Muñiz, L. J., García Alonso, I., Vázquez Ortiz, C. A., y López Serentill, P. (2023). *Alfabetizando estadísticamente a niños de 7-8 años a partir de contextos relevantes*. Revista Complutense de Educación, 34 (1), 95–108.
- [2] Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Gould, R., Johnson, S., Perez, L., y Spangler, D. (2020). *Pre-K-12 Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) report II*. ASA y NCTM.
- [3] Batanero, C. (2005). *Significados de la probabilidad en la educación secundaria*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8 (3), 247–263.
- [4] Capomagi, G., Aguilar-González, Á., y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2024). *Exploring the relationship of prospective primary teachers with mathematics and statistics: memories, emotions and turning points*. LUMAT-B: International Journal on Math, Science and Technology Education, 9 (2), 1–1.
- [5] Engebretsen, M., y Kennedy, H. (2020). *Data Visualization in Society*. Amsterdam University Press.
- [6] Makar, K., y Rubin, A. (2009). *A framework for thinking about informal statistical inference*. Statistics Education Research Journal, 8 (1), 82–105.
- [7] Muñiz-Rodríguez, L., Giadas, P., y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2024). *Tareas para la evaluación del sentido estocástico*. UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 104, 36–42.
- [8] Rodríguez-Muñiz, L. J., Muñiz-Rodríguez, L., García-Alonso, I., López-Serentill, P., Vázquez, C., y Alsina, Á. (2022). *Nadando entre dos orillas: abstracción y contexto en educación estadística en Secundaria*. Culture and Education, 34 (3), 689–725.
- [9] Santaengracia, J. J., Rodríguez-Muñiz, L. J., y Palop, B. (2023). *Una situación de aprendizaje para el desarrollo del sentido estocástico en Educación Primaria*. Números: Revista de didáctica de las matemáticas, 113, 63–80.
- [10] Wild, C. J., y Pfannkuch, M. (1999). *Statistical thinking in empirical enquiry*. International Statistical Review, 67 (3), 223–248.

Relatos de Experiencias

CÁLCULO ALGEBRAICO Y MEDICIÓN EMPÍRICA: UNA EXPERIENCIA STEAM EN TORNO AL FACTOR DE EMPAQUETAMIENTO ATÓMICO

Paola Beatriz Baiutti

Instituto de Enseñanza Superior "Doctora Carmen Peñaloza", Argentina
paolabaiutti@gmail.com

Este trabajo presenta una experiencia de un taller interdisciplinario desarrollado en el In.E.S. "Dra. Carmen Peñaloza" de San Juan, para estudiantes avanzados del Profesorado de Química. La propuesta surgió frente a una dificultad recurrente al enseñar una unidad de Química Inorgánica: Cristaloquímica. Para abordarla, se diseñó un taller en el que ciencias naturales, tecnología, humanidades y matemática se integraron a través de una actividad STEAM, centrada en el diseño y construcción de material didáctico tridimensional. El trabajo se estructuró en etapas: conceptualización teórica, diseño y construcción de modelos, planificación de microclases e implementación. De manera no premeditada, emergió la modelización matemática, incorporando la medición empírica de volúmenes mediante propiedades físicas. Asimismo, la participación en la Feria de Ciencias amplió el alcance del proyecto, validó la propuesta e inspiró adaptaciones para estudiantes con discapacidad visual. La experiencia muestra cómo un obstáculo al enseñar puede convertirse en una oportunidad de formación docente, integrando saberes.

Trabajo en conjunto con Galina, Esther (FAMAF - Universidad Nacional de Córdoba, Argentina) y Escudero, Consuelo (FI - FCEFN - Universidad Nacional de San Juan, Argentina).

DISEÑO DE UN CURSO DE FORMACIÓN DOCENTE PARA EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO FUNCIONAL A TRAVÉS DE LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

Karla Bastías Sepúlveda

Universidad de Granada, España
karlabastias@correo.ugr.es

El presente trabajo tiene el objetivo de describir un curso de formación docente para promover el pensamiento funcional a través de la modelización matemática en educación primaria. Este curso se desarrolla con profesores en Chile que imparten clases en los niveles de 5° y 6° básico (educación primaria). Los participantes experimentaron, diseñaron e implementaron tareas de modelización matemática que implicaban el desarrollo del pensamiento funcional. En cinco sesiones de trabajo, se abordaron elementos teóricos y prácticos vinculados al marco teórico del estudio. Los resultados ponen de manifiesto que esta experiencia permitió a los docentes, a través de un proceso teórico práctico, articular conceptos vinculados a las prácticas del pensamiento funcional, utilizando la modelización matemática como estrategia pedagógica.

Trabajo en conjunto con Antonio Moreno Verdejo (Universidad de Granada, España) y María Florencia Cruz (Universidad de Córdoba, España).

INTERVENCIONES PEDAGÓGICAS PARA DISMINUIR LA DESERCIÓN ESTUDIANTIL: EL CASO DE ÁLGEBRA LINEAL

Cristina Elizabeth Basualdo Soria

Universidad Nacional de Santiago del Estero, Argentina
cbasualdosoria@gmail.com

La asignatura Álgebra Lineal de la FCEyT-UNSE ha presentado históricamente altos índices de deserción y bajos niveles de regularidad. En 2024, en el marco del proyecto “Análisis de las causas de deserción de los estudiantes de Álgebra Lineal. Una propuesta de mejora”, se introdujeron cambios en la metodología de enseñanza y de evaluación cuyo impacto es el objeto de estudio del presente trabajo. El análisis cuantitativo efectuado desde el año 2019 al 2024 inclusive, ha evidenciado un impacto positivo en los resultados finales de la cursada a partir de los cambios efectuados: incremento significativo de estudiantes que alcanzan la regularidad, disminución de los que no regularizan por no alcanzar los requisitos de la cátedra (insuficientes) y menor tasa de deserción. Si bien los resultados son alentadores, siguen siendo necesarias intervenciones pedagógicas para atacar la problemática de la deserción.

Trabajo en conjunto con Ximena Natalia Villarreal, Matías Alejandro Espíndola Coronel, Anna Sol Hegetschweiler y Gregorio Sebastián Juárez (Universidad Nacional de Santiago del Estero).

PROYECTOS STEAM PARA LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA EN LAS CIENCIAS AGROPECUARIAS: ANÁLISIS DE INFORMES EN FORMATO VIDEO PRODUCIDOS POR ESTUDIANTES

Araceli Coirini

Facultad de Ciencias Agropecuarias-Universidad Nacional de Córdoba, Argentina
araceli.coirini@unc.edu.ar

En la asignatura Matemática II de la Facultad de Ciencias Agropecuarias de la Universidad Nacional de Córdoba se implementó una propuesta de enseñanza con enfoque STEAM, en la que los estudiantes abordaron problemáticas agropecuarias reales mediante un proceso de modelización matemática, presentando sus proyectos en informes en formato video. El objetivo de este trabajo fue analizar estos informes para identificar logros y desafíos de la modalidad. Para ello se diseñó una rúbrica con criterios vinculados a la formulación de hipótesis, la construcción y adecuación de modelos matemáticos, el uso de herramientas de cálculo y la interpretación de resultados. El análisis de 36 informes evidenció avances en la presentación y conclusión de la problemática, junto con dificultades en la formalización e interpretación matemática, lo que orienta mejoras en la implementación futura y aporta a la reflexión sobre la enseñanza de la matemática en la facultad.

Trabajo en conjunto con Valeria González y María de los Ángeles Martínez (FCA-Universidad Nacional de Córdoba, Argentina).

DISEÑO, IMPLEMENTACIÓN Y EVALUACIÓN DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA CON GEOGEBRA PARA LA ENSEÑANZA DE POLINOMIOS Y FUNCIONES POLINÓMICAS EN EDUCACIÓN SECUNDARIA

Viviana Costa

Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata, Argentina
vivianaangelicacosta@gmail.com

Este artículo presenta el diseño, implementación y análisis de una secuencia didáctica para la enseñanza de polinomios y funciones polinómicas en estudiantes de 4° y 5° año de secundaria de la Provincia de Buenos Aires, Argentina. Es parte de una tesis de maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales en la Universidad Nacional de La Plata. La propuesta se enmarca en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), integra el uso de GeoGebra en dispositivos móviles y promueve el Aprendizaje Móvil. La secuencia, adaptada del “Grupo de los Lunes”, se estructura en actividades que favorecen la construcción de funciones polinómicas a partir del producto de funciones de menor grado. Los resultados muestran una mejora en la comprensión conceptual, la autonomía estudiantil y la interacción con herramientas digitales, evidenciando el potencial de GeoGebra para transformar prácticas tradicionales en el aula de matemáticas.

Trabajo en conjunto con Agustina Bayés (Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata).

PENSAMIENTO PROBABILÍSTICO EN TIEMPOS DE OBSOLESCENCIA: DESAFÍOS PARA LA FORMACIÓN CIUDADANA

Fiorella Dómina

Universidad Nacional del Sur, Departamento de Matemática, Argentina
fired08@hotmail.com

Esta comunicación presenta una propuesta innovadora y su correspondiente análisis, desarrollados por una estudiante avanzada del Profesorado en Matemática en el marco de una beca de estímulo a las vocaciones científicas EVC-CIN cuyo trabajo se centra en el estudio de la obsolescencia programada, la tecnología y el ambiente, abordado desde una perspectiva estadística con enfoque STEAM. La intervención pedagógica tuvo lugar en la asignatura “Probabilidad, variable aleatoria y estadística”, destinada a estudiantes de segundo año de Ingeniería Electrónica e Ingeniería Electricista. Desde esta perspectiva, se impulsa una alfabetización estadística orientada a la responsabilidad ciudadana, que permita comprender la incertidumbre y valorar los datos estadísticos como insumos clave para decisiones éticas en relación con el entorno social y ambiental.

Trabajo en conjunto con Beatriz S. Marrón (Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina) y Sandra A. Hernández (Gabinete de Didáctica de la Química, Departamento de Química, Universidad Nacional del Sur. Instituto de Química del Sur (INQUISUR), UNS-CONICET, Bahía Blanca, Argentina).

EVALUACIÓN DE ANÁLISIS DE FUNCIONES A TRAVÉS DE UN JUEGO DIDÁCTICO

Sergio Pablo Farabello

Facultad de Bromatología. Universidad Nacional de Entre Ríos (UNER), Argentina
sergio.farabello@uner.edu.ar

La evaluación de una asignatura, particularmente de Matemática, tiene una importancia vital en la formación de los futuros profesionales. Como profesores de Matemática debemos preguntarnos cómo estamos evaluando, de qué modo conocemos lo que los alumnos aprenden tras cursar la asignatura y cuál es la finalidad que perseguimos con la evaluación que estamos realizando. Además, debemos conocer los diferentes modelos de evaluación que existen y preguntarnos cuáles de ellos se ajustan más a las características de los futuros profesionales que estamos formando y cuáles son los instrumentos que debemos utilizar para realizar la evaluación de los conocimientos adquiridos por los alumnos.

Para poder dar respuesta a esos interrogantes planteamos un proyecto de investigación que tiene además el objetivo de aportar una base para diseñar, en el marco de la Teoría de las Inteligencias Múltiples, instrumentos para la evaluación de la Matemática. En el proyecto planteamos un cambio total en la forma de evaluación de Matemática I y Matemática II, desarrollando un sistema de créditos que sirven tanto para regularizar como para promocionar ambas asignaturas.

La experiencia que aquí se relata forma parte del mencionado proyecto y se utilizó como instrumento de evaluación para Matemática I, constituyendo el Crédito 12.

Trabajo en conjunto con Yanina Macarena Morales, María Florencia Mostto y Octavio Agustín Raschetti (Universidad Nacional de Entre Ríos, Argentina).

EXPERIENCIA DE AULA RELACIONADA CON EL PROGRAMA DE ERLANGEN EN FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICA

María Martha Ferrero

Universidad Nacional del Comahue, Argentina
marthaferrero@gmail.com

Presentamos una experiencia de formación de profesores desarrollada en la cátedra Epistemología e Historia de la Matemática, del Profesorado Universitario en Matemática (UNCo – CRUB). En el transcurso de la clase se implementó una actividad con el objetivo de que se revelen conexiones entre Álgebra y Geometría, siguiendo al Programa de Erlangen propuesto por el matemático Félix Klein. A partir del trabajo con software de geometría dinámica, se propuso al grupo de estudiantes explorar la relación entre el determinante de una matriz y la variación de área de polígonos bajo transformaciones lineales. Poniendo en diálogo las miradas del equipo docente y de una estudiante se elaboran conclusiones respecto de la potencialidad de esta secuencia como formación en el quehacer matemático, desde una perspectiva epistemológica y didáctica.

Trabajo en conjunto con Jordi Alsina y Bárbara Varela.

LA VARIACIÓN UNIFORME EN EL REGISTRO CARTESIANO: ASUNTOS EMERGENTES DE UN PROCESO DE PLANIFICACIÓN COLABORATIVA

Nicolás Elias Daniel Igochnikov

Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Centro de Formación e Investigación en Enseñanza de las Ciencias (CEFIEC), Argentina
nicolas.igochnikov@unipe.edu.ar

En este trabajo se presentan avances de un proyecto de investigación colaborativa del Grupo Lunes, conformado por docentes de distintos niveles y trayectorias, en torno a la enseñanza de las funciones lineales. El eje de análisis de este trabajo se sitúa en el proceso de planificación colectiva, en torno a la decisión novedosa de priorizar el registro gráfico-cartesiano antes de introducir el lenguaje algebraico. Esta decisión permitió problematizar el rol de los gráficos cartesianos como generalización de correspondencias y diseñar actividades que desplazan el foco desde cálculos puntuales hacia el estudio de la variación en el registro gráfico cartesiano. El estudio pone en relieve las potencialidades de la planificación colaborativa como espacio de construcción de lenguaje común, toma de decisiones didáctico-matemáticas y generación de nuevas zonas de indagación. La emergencia de preguntas sobre cómo apoyar procesos de generalización hacia lo simbólico desde el trabajo gráfico orienta la etapa actual de la investigación.

Trabajo en conjunto con Enrique Di Rico y Mariana Matovich (Universidad Pedagógica Nacional, Departamento de Ciencia y Tecnología, Argentina).

PROYECTO DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA PARA ESTUDIANTES DE INGENIERÍA DESDE UNA PERSPECTIVA CRÍTICA

Carlos Enrique Parodi

Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Pampa (UNLPam)., Argentina
parodic@ing.unlpam.edu.ar

Se comparte un proceso de modelización matemática planificado desde una perspectiva crítica y vivenciado por estudiantes de primer año de Ingeniería durante el ciclo lectivo 2024. Se emplea un ciclo de modelización matemática para describir y analizar lo acontecido en las distintas fases desarrolladas por los estudiantes al involucrarse en dicho proceso. Se muestran resultados del estudio acompañado de reflexiones que incluyen voces de docentes y estudiantes.

Trabajo en conjunto con Adriana Noemí Magallanes (Universidad Nacional de Río Cuarto, Argentina).

EL SENTIDO DEL CONCEPTO DE ÁREA DEL ROMBOIDE: UNA MIRADA DESDE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA

Eliana del Valle Prado Valverde

Universidad Nacional de San Luis (FCFMyN) - Esc. Secundaria España e ISFD Col. Sup. Nº 1 de Rawson
Iole Lebe Palmolelli de Mascotti, Argentina
elydelvalleprado@gmail.com

Se expone una parte del trabajo realizado en el marco de la finalización de la carrera de posgrado Especialización en Didáctica de la Matemática, en el cuál se abordó la problemática de la falta de sentido del concepto de área de polígonos, específicamente del romboide, en estudiantes de 2º año de la Escuela Secundaria España en San Juan. Se evidenció que los alumnos adquieren conocimientos de forma mecánica, centrados en cálculos sin comprender el significado del concepto, debido a metodologías que priorizan memorización sobre razonamiento crítico. Para dar respuesta a esta problemática, se trabajó con la teoría de la Educación Matemática Realista (EMR), experiencias internacionales que destacan la importancia de contextualizar el aprendizaje en situaciones reales, y una propuesta áulica basada en esta perspectiva, utilizando la historia de los volantines y la historia del origen del concepto de área para llegar redefinir al mismo y deducir la fórmula que permite su cálculo.

Trabajo en conjunto con Director del trabajo: Roberto Pablo Arribillaga (Universidad Nacional de San Luis, Argentina), Co-directora del trabajo: y Nora Edith Herrera (Universidad Nacional de San Juan, Argentina).

FUNCIÓN CUADRÁTICA Y USO DE INTELIGENCIA ARTIFICIAL EN LA ESCUELA AGROTÉCNICA

Bruno Racca

Escuela Agrotécnica N 336 " Mario C. Videla", Argentina
brunoracca10@gmail.com

La enseñanza de la función cuadrática en secundaria suele ser percibida como abstracta y desvinculada de la práctica profesional, especialmente en escuelas agrotécnicas, donde los estudiantes esperan que los contenidos matemáticos se relacionen con la producción y la gestión agropecuaria (Brousseau, 2007; Chevallard, 1991). En este contexto, se desarrolló una experiencia educativa en quinto año que integró la función cuadrática con inteligencia artificial (IA) para modelizar la relación entre la dosis de fertilizante y el rendimiento de un cultivo. La IA actuó como un entorno experimental virtual, generando datos heterogéneos, simulando escenarios con variabilidad realista y ofreciendo retroalimentación progresiva, lo que permitió que los estudiantes construyeran, ajustaran y validaran sus modelos sin perder protagonismo en la resolución del problema.

La propuesta favoreció la comprensión conceptual de los coeficientes y el vértice de la parábola, vinculando la teoría matemática con la optimización de decisiones productivas. Se observó un aumento significativo en la motivación, la participación activa y las competencias de modelización predictiva. Los resultados confirman que la integración de función cuadrática e IA potencia la pertinencia de la matemática, transformando contenidos abstractos en herramientas de análisis aplicables a la práctica agropecuaria y promoviendo una educación matemática crítica y contextualizada.

RECORRIDO DEL PROBLEMA ECONÓMICO A LA FUNCIÓN MATEMÁTICA MEDIADAS POR IA GENERATIVAS

Alejandro Daniel Salinas

Universidad Nacional de Misiones, Argentina
alejandro.salinas@fce.unam.edu.ar

La incorporación de la Inteligencia Artificial (IA) en la enseñanza universitaria redefine los procesos de aprendizaje en contextos donde convergen saberes, como la matemática aplicada a la economía. Este trabajo examina la evolución de un Recorrido de Estudio e Investigación (REI) a partir de la pregunta generatriz: ¿con qué tamaño de lote de televisores y con qué frecuencia minimizamos costos? El problema permitió articular conceptos matemáticos (funciones, derivadas y optimización) y económicos (costo total, costo marginal, costo mínimo, costo de inventario e inventario promedio) dentro de un marco co-disciplinar basado en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 2004). Los hallazgos muestran que la IA, junto con la mediación docente, potencia la participación activa, fortalece la autonomía estudiantil y genera praxeologías emergentes significativas.

Trabajo en conjunto con Benítez, Velma Marina, Domínguez, Lucas Javier, Skrypczuk, Mauricio Rene, Benítez, Silvia Mabel, Pagnoni, Liliana Ruth y Sánchez, Esteban David (Universidad Nacional de Misiones).

LA INTELIGENCIA ARTIFICIAL COMO ASISTENTE EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS OLÍMPICOS: UNA PROPUESTA PARA LA FORMACIÓN DOCENTE EN EL NIVEL MEDIO

Maria Laura Santori

Universidad Nacional del Comahue, Argentina
mlausantori@yahoo.com.ar

Este trabajo propone una estrategia de formación docente que integra inteligencia artificial generativa (IAG) y metodologías colaborativas en el marco de un proyecto de extensión universitaria. La iniciativa surge a partir de observar una escasa participación de escuelas secundarias públicas de Neuquén en las Olimpíadas Matemáticas Argentinas (OMA), lo cual se puede atribuir a la falta de información respecto a estas competencias y/o a la carencia de espacios para que los docentes puedan compartir experiencias y prepararse en la resolución de problemas olímpicos. Se desarrolló un taller de formación utilizando una metodología mixta (encuentros sincrónicos/asincrónicos) en la plataforma PLENA de la Universidad Nacional del Comahue. En el taller se abordaron cuatro ejes temáticos: geometría, teoría de números, combinatoria y álgebra. La metodología empleada combinó el enfoque de resolución de problemas propuesto por Polya (1981), técnicas de pensamiento matemático inspiradas en Hadamard (1945) y herramientas tecnológicas como Genially, Padlet, Canva, y recursos de IAG (Gemini, Copilot, DeepSeek). Esta experiencia dejó en

evidencia el potencial de la IA como herramienta de apoyo para el entrenamiento en la resolución de problemas olímpicos y sirvió como punto de partida para una discusión ética sobre su uso en la educación.

Trabajo en conjunto con Daniela Fernández y Cecilia Ferrari Freire (Universidad Nacional del Comahue).

PRÁCTICAS MATEMÁTICAS ESCOLARES SOBRE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

María Paula Trillini

Universidad Nacional de Hurlingham, Argentina
maria.trillini@unahur.edu.ar

En esta comunicación nos proponemos describir y caracterizar algunas producciones de estudiantes realizadas en el marco de un recorrido de enseñanza sobre Funciones Trigonómicas. Uno de nuestros objetivos es reflexionar acerca de las prácticas matemáticas que dicho recorrido favoreció desplegar, en relación a las prácticas matemáticas académicas. Para esto se considerará la situación específica sobre la que tratan los problemas, la gestión del docente y el contexto institucional, elementos esenciales para analizar un proceso transpositivo. Las producciones de los estudiantes que se analizan fueron realizadas a propósito de una situación de evaluación al finalizar un tramo del trayecto de enseñanza.

Trabajo en conjunto con Mauro F. Nicodemo (Universidad Nacional de Hurlingham - Scholem Aleijem).

VISUALIZACIÓN DE LA MATEMÁTICA DESDE LA PERSPECTIVA DEL GEOGEBRA

Sandra Marcela Vera

Instituto de Enseñanza Superior Estanislao Maldones , Argentina
verasandramarcela@gmail.com

Las prácticas áulicas de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática se ven interpeladas por múltiples exigencias propias de la evolución social y comunicacional. La concepción de (Álvarez, 2023), nos invita a pensar en “una ruptura brusca” (disrupción) en los modos habituales, tradicionales y convencionales de la enseñanza” (p. 7). Dentro de los parámetros de la Educación disruptiva definida por (Álvarez, 2023), como “aquella renovación, innovación y transformación educativa urgente desde el rol docente” (p. 7), se concibe el marco de esta experiencia áulica para aplicar Apps: calculadora y graficadora (GeoGebra), presentaciones interactivas y colaborativas (Padlet y Canva) combinadas con el uso contextualizado de la IA.

En base a lo expuesto como emergentes, surgió el proyecto denominado “Visualizando la Matemática desde la perspectiva del GeoGebra” desarrollado en dos cursos de ciclo básico del Nivel Secundario Técnico de la Escuela Provincial de Minería Dr. “Bernardo Houssay” de Catamarca. La propuesta buscó superar las dificultades habituales en la materia mediante un formato taller, con la incorporación de recursos digitales y materiales adaptados al contexto de los estudiantes.

De este modo, se propuso no solo innovar en las estrategias de enseñanza, sino también en las formas de valorar, abordar y construir el aprendizaje.

Trabajo en conjunto con Liliana Raquel Palacio Veliz (Escuela Provincial de Minería Dr. Bernardo A. Houssay).

EL CONCEPTO DE ÁREA EN LA FORMACIÓN DE DOCENTES PARA LA EDUCACIÓN PRIMARIA: UNA EXPERIENCIA MÁS ALLÁ DE LA APLICACIÓN DE FÓRMULAS

Cinthia Noelia Del Valle Vides

Universidad Nacional de Salta-Facultad de Ciencias Exactas- Dpto. de Matemática, Argentina
diamantecinthia@gmail.com

En la formación docente para la Educación Primaria, resulta fundamental que los futuros maestros comprendan los conceptos matemáticos más allá del uso mecánico de fórmulas. Esta comunicación presenta una experiencia realizada en la asignatura Matemática y su Didáctica II del Profesorado de Educación Primaria, carrera que se dicta en el IES N° 6017 de la localidad de General Güemes en la provincia de Salta. El objetivo de la experiencia fue que los estudiantes diseñaran actividades para enseñar el concepto de área utilizando material concreto. Para ello, se trabajó inicialmente con la obra Superficie y Volumen: ¿algo más que el trabajo con fórmulas? de Editorial Síntesis, que propone abordar estos contenidos desde una perspectiva comprensiva y no algorítmica.

La consigna planteada buscó promover la comprensión del área como magnitud, favoreciendo la argumentación y la exploración en contextos variados, evitando reducir la enseñanza a la simple aplicación de fórmulas sin cuestionar su fundamento. Durante la experiencia, los estudiantes trabajaron en grupos, diseñaron consignas para el aula de primaria y reflexionaron sobre sus decisiones didácticas. Se describen el proceso de trabajo, algunas de las producciones obtenidas y los aportes y desafíos que emergieron.

ENSEÑANZA DE MATRICES Y GRAFOS EN CIENCIAS EMPRESARIALES: UNA EXPERIENCIA DIDÁCTICA BASADA EN REDES SOCIALES

Marcela Patricia Villagra

Universidad Austral, Argentina

MVillagra@austral.edu.ar

Este trabajo presenta la implementación de una estrategia pedagógica innovadora para la enseñanza de matrices y grafos en la asignatura de Álgebra y Geometría, materia inicial en las carreras de Ciencias Empresariales de la Universidad Austral. La propuesta busca abordar la problemática de la desmotivación estudiantil hacia la matemática mediante una metodología que vincula conceptos fundamentales del Álgebra Lineal con situaciones en contextos cercanos a los estudiantes.

La experiencia se centra en la enseñanza de matrices y grafos a partir del análisis de redes sociales y redes de contactos, lo que permite articular la teoría con ejemplos próximos a la realidad de los estudiantes. De este modo, se favorece la comprensión del valor práctico y aplicativo del Álgebra Lineal en contextos concretos, propiciando un aprendizaje más significativo y motivador de la disciplina. Los resultados preliminares basados en encuestas y en el rendimiento en los exámenes, evidencian una mejor apropiación de los conceptos abstractos. Además, también se observó que la modelización matemática contribuyó a modificar la percepción de la matemática como abstracta y alejada de la realidad profesional en los estudiantes de Ciencias Empresariales.

Trabajo en conjunto con Rodrigo Moreno y Lucila Montaos (Universidad Austral, Argentina).

Reportes de Investigación

MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERENCIA SOBRE LAS ISOMETRÍAS PARA LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO EN MATEMÁTICA

Jessica Belén Albarracín

Instituto de Formación Docente Continua de Villa Mercedes, San Luis, Argentina
jessicaalbarracin@gmail.com

Esta presentación se inscribe en una tesis de Maestría en Educación Superior que intenta, desde el marco teórico y metodológico que proporciona la TAD, abordar el problema didáctico ¿Cuál es el equipamiento praxeológico necesario (o por lo menos útil) para que futuros profesores puedan intervenir de manera efectiva y pertinente en la formación matemática de los estudiantes de nivel medio, en relación con el estudio de las isometrías? ¿Qué se puede hacer desde la formación docente para que dispongan de él? Ponemos a consideración hipótesis de trabajo, cuestiones que se derivan de ellas y respuestas tentativas, que forman parte de la dimensión epistemológica del problema que se investiga.

Trabajo en conjunto con Mabel Licera (Universidad Nacional de Río Cuarto, Córdoba, Argentina).

DISEÑO DE UNA GUÍA PARA ANALIZAR TAREAS PRESENTES EN LIBROS DE TEXTO DE MATEMÁTICAS DESDE EL ANÁLISIS DIDÁCTICO

Helen Bolaños González

Universidad Nacional de Costa Rica (UNA), Costa Rica
hellen.bolanos.gonzalez@una.cr

El propósito de este trabajo es describir el proceso de elaboración y validación de una guía de análisis de tareas de libros de texto de matemáticas utilizando como herramienta el análisis didáctico. Este es un estudio cualitativo de carácter descriptivo. El resultado es una guía de análisis de libros de texto de matemáticas que permite al docente reflexionar y cuestionar sus distintas tareas matemáticas. Para su elaboración se han empleado indicadores y descriptores del Análisis Didáctico.

Trabajo en conjunto con Helen Bolaños González (Universidad Nacional, Costa Rica), Antonio Moreno (Universidad de Granada, España) y María Florencia Cruz (Universidad de Córdoba, España).

MODELIZACIÓN ESPACIAL Y TECNOLOGÍAS DIGITALES EN LA FORMACIÓN DOCENTE: UNA INVESTIGACIÓN ACERCA DEL USO DE BLUE-BOT EN LA FORMACIÓN DOCENTE

Ana Inés Cocilova

Departamento de Matemática, Departamento de Ciencias de la Educación, Universidad Nacional del Sur (UNS), Bahía Blanca, Argentina, Argentina
cocilova@uns.edu.ar

Este trabajo se inscribe en un proyecto de investigación orientado a analizar los efectos de la incorporación de tecnologías digitales en el medio didáctico, particularmente en relación con los procesos de estudio de la matemática en el nivel superior y primario. Una de las cuestiones que nos proponemos indagar es: ¿Qué características asumen los procesos de estudio de la matemática en el nivel superior cuando se incorporan al medio didáctico diferentes tecnologías digitales? En la búsqueda de respuesta a esta cuestión, socializaremos en este trabajo algunos hallazgos que pudimos observar del análisis de una experiencia desarrollada en el Profesorado de Educación Inicial (PEI), centrada en una tarea de orientación espacial mediada por el uso de Blue-Bot. El marco teórico adoptado se sitúa en la tradición francesa de la didáctica de la matemática. A partir del registro y análisis de la tarea, se identifican momentos de interacción significativa con el medio.

Trabajo en conjunto con Rafael Adrián Cornejo Endara (Departamento de Matemática, Departamento de Ciencias de la Educación, Universidad Nacional del Sur (UNS), Bahía Blanca, Argentina).

VIDEOS PRODUCIDOS POR FUTUROS PROFESORES EN ESCENARIOS DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA: CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADOS

Araceli Coirini Carreras

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación, UNC, Argentina
araceli.coirini@unc.edu.ar

En esta comunicación se presentan avances de una investigación sobre la producción de videos por futuros profesores de matemática en el marco del curso Didáctica Especial y Taller de Matemática de la Universidad Nacional de Córdoba. El propósito es indagar qué significados se construyen en escenarios de modelización matemática abierta cuando los estudiantes elaboran un video como parte de un proyecto formativo. El estudio se inscribe en un enfoque cualitativo e interpretativo y toma como caso ilustrativo un video que aborda la problemática de un comedor comunitario. El análisis permite reconocer cómo la producción audiovisual se convierte en un espacio de apropiación de la modelización y de construcción de significados que articulan lo educativo con lo social.

Trabajo en conjunto con Jonathan Alonso (Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación, UNC), Mónica Villarreal (CONICET-Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación, UNC) y Iris Dipierri (Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación, UNC).

GEOGEBRA Y LA DECONSTRUCCIÓN DIMENSIONAL: ANÁLISIS DE ALGUNAS HERRAMIENTAS DIGITALES EN EL ESTUDIO DE LA GEOMETRÍA

Rafael Adrián Cornejo Endara

Departamento de Matemática, Departamento de Ciencias de la Educación, Universidad Nacional del Sur, Argentina
rcornejo@uns.edu.ar

Este trabajo de investigación se enmarca en un proyecto más amplio sobre procesos de estudio de la matemática y la formación docente inicial. En particular, se centra en analizar los aportes del software GeoGebra a los procesos de estudio de la geometría. Se adopta como marco teórico la teoría de los registros de representación semiótica, la cual nos permite indagar cómo el uso de GeoGebra modifica la actividad geométrica. Se analizan específicamente el desplazamiento, la herramienta recta y el compás. El análisis permite reflexionar sobre el papel del software como medio didáctico lo cual consideramos que contribuye a desnaturalizar el uso de la tecnología educativa en los procesos de estudio de la matemática.

Trabajo en conjunto con Ana Inés Cocilova (Departamento de Matemática, Departamento de Ciencias de la Educación, Universidad Nacional del Sur).

“FOTOGEBRA”: UN RECORRIDO DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN EN LA ESCUELA SECUNDARIA PARA EL ESTUDIO DE LA MATEMÁTICA

Viviana Costa

Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata, Argentina
vivianaangelicacosta@gmail.com

Este trabajo se enmarca en una tesis doctoral en Enseñanza de las Ciencias, situada en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Yves Chevallard. El propósito es analizar cómo estudiantes de 5º año de secundaria en Argentina desarrollan un proceso de estudio a través de un Recorrido de Estudio e Investigación (REI), instalando en el aula el Paradigma de la Investigación y del Cuestionamiento del Mundo (PICM), que impulsa actitudes investigativas. El REI se origina en FotoGebra, un concurso que invita a utilizar fotografías como punto de partida para formular y resolver problemas reales con GeoGebra y funciones matemáticas. La pregunta generatriz que orienta el proceso es: ¿Cómo estudiar una situación problemática real utilizando una fotografía, GeoGebra y funciones matemáticas? La investigación, de carácter descriptivo y exploratorio con enfoque cualitativo, evidencia la construcción de organizaciones matemáticas, el surgimiento de actitudes investigativas, el valor de las dialécticas didácticas y el papel central de GeoGebra como media. Además, la metodología muestra que estos dispositivos didácticos favorecen una construcción funcional de los objetos matemáticos, al tiempo que activan dialécticas y actitudes propias de la PICM, integrando de forma natural la modelización matemática en el proceso de estudio.

Trabajo en conjunto con Karina Rizzo (Universidad Tecnológica Nacional FRA, Universidad Siglo 21).

INVESTIGACIÓN COLABORATIVA: EL POTENCIAL DE LOS DIÁLOGOS DE CLASE

Betina Duarte

Universidad Pedagógica Nacional - UNPE, Argentina
betina.duarte@unipe.edu.ar

En el proyecto de investigación “Interpelar la práctica docente a través de dispositivos de estudio colaborativo: alcances, límites y condiciones de modelos para la formación continua”, PI UNPE 2024-2025/5 estudiamos el potencial de un dispositivo para promover en los docentes del grupo de estudio una reflexión sobre su práctica. Uno de tales recursos, los Diálogos de Clase, comporta la escritura de escenarios de enseñanza para momentos de una clase hipotética. A través de experiencias desarrolladas señalamos el potencial de este recurso para concebir intervenciones docentes que comanden un aula donde la actividad matemática está impulsada por la producción de los y las estudiantes.

Trabajo en conjunto con Cecilia Lamela, Cecilia Montes de Oca, Uriel Kasman y Carolina Benito (Universidad Pedagógica Nacional).

EL CÁLCULO DE ÁREAS EN LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA: MARCAS EN EL DESARROLLO DE LA INTEGRAL DEFINIDA

NicolaS Elias Daniel Igochnikov

Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Centro de Formación e Investigación en Enseñanza de las Ciencias (CEFIEC), Argentina
nicolasigochnikov@hotmail.com

El presente trabajo se propone anticipar algunos elementos de un análisis histórico-epistemológico del concepto de integral definida, en el marco del trabajo de tesis doctoral del autor. Se analizan algunas producciones históricas y se proponen preguntas en relación con la enseñanza-aprendizaje de esta noción

DE RÉGIMEN TRADICIONAL DE PARCIALES A SISTEMA DE CRÉDITOS: EFECTOS DE UNA EVALUACIÓN FORMATIVA EN LA TRAYECTORIA ACADÉMICA UNIVERSITARIA

Yanina Macarena Morales

Facultad de Bromatología, Universidad Nacional de Entre Ríos, Argentina
macarena.morales@uner.edu.ar

El presente trabajo aborda la evaluación de los aprendizajes en el ámbito universitario, con énfasis en la implementación de un sistema de evaluación formativa basado en créditos en la asignatura Matemática I de la Facultad de Bromatología de la Universidad Nacional de Entre Ríos. El objetivo es analizar el impacto de dicho sistema en la trayectoria académica de los estudiantes.

Se toma como referente la Teoría de las Inteligencias Múltiples de Gardner y los aportes de Anijovich sobre evaluación formativa, entendida como parte integral del proceso de enseñanza-aprendizaje. Estos enfoques reconocen la heterogeneidad de los estilos cognitivos y promueven múltiples oportunidades para la expresión de saberes, favoreciendo la participación activa y la diversidad de estrategias.

La investigación adopta un diseño cuantitativo, descriptivo-comparativo y cuasi-experimental, con la implementación de un sistema de créditos con instancias diversificadas y retroalimentación continua, y la comparación entre los resultados académicos de cohortes evaluadas con el sistema tradicional y con el nuevo sistema.

Los hallazgos evidencian un incremento en los índices de retención, regularización y promoción respecto del régimen de parciales. Se concluye que el sistema de créditos constituye una alternativa superadora, al promover aprendizajes significativos y ofrecer escenarios donde los estudiantes pueden demostrar conocimientos desde sus fortalezas individuales.

UN MODELO PRAXEOLÓGICO DE REFERENCIA PARA EL ESTUDIO DE LA DIVISIBILIDAD EN LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICA

Mayra Muñoz

Universidad Nacional del Comahue
mayranqn90@gmail.com

Esta investigación formó parte de una tesis de Maestría y se centra en la formación inicial de profesores de matemática, específicamente se aborda la divisibilidad de números enteros. Se enmarca en la Teoría Antropológica de lo Didáctico y el objetivo es delimitar aspectos que fortalezcan el equipamiento praxeológico del futuro profesor, permitiéndole intervenir eficazmente en la enseñanza de la divisibilidad en la escuela secundaria.

El estudio se desarrolló en el Profesorado Universitario en Matemática (PUMAT) de la Universidad Nacional del Comahue, Neuquén. Se busca contribuir al campo de la educación matemática mediante la creación y descripción de un Modelo Praxeológico de Referencia complementario al modelo vigente en la formación de profesores del PUMAT en torno a la divisibilidad de números enteros.

En este trabajo se tomó en cuenta la importancia de articular la formación de profesores de matemáticas con los lineamientos y enfoques propuestos por el diseño curricular de la escuela secundaria de Neuquén, destacando la importancia de construir organizaciones matemáticas más flexibles, articuladas y completas con el fin de ofrecer a profesores en formación una praxeología para la enseñanza lo suficientemente potente como para incluir una praxeología por enseñar que cobre sentido para los alumnos de la escuela secundaria.

Trabajo en conjunto con María Laura Santori (Universidad Nacional del Comahue, Neuquén, Argentina).

POTENCIALIDAD EPISTÉMICA Y CONSTRUCCIÓN DE CONOCIMIENTO EN PRÁCTICAS EDUCATIVAS DE GEOMETRÍA EN ESCENARIOS DINÁMICOS

Karina Vanesa Nahuin

Universidad Nacional de la Patagonia Austral, Argentina
karinanahuin@gmail.com

Este trabajo analiza la potencialidad epistémica de prácticas educativas en el área de la Geometría mediadas por herramientas digitales, en el marco de la formación inicial del profesorado en Matemática. Se estudia particularmente la articulación entre la Geometría Sintética (GS) y la Geometría Analítica (GA), una problemática histórica que continúa generando dificultades en la enseñanza y el aprendizaje. La investigación se sostiene en el Enfoque Ontosemiótico para la Cognición y la Instrucción Matemática (EOS), que permite identificar prácticas matemáticas, objetos y procesos implicados en tareas "fértil" y detectar potenciales conflictos semióticos.

A través del análisis de una tarea específica sobre circunferencias, se examina cómo la incorporación de Software de Geometría Dinámica (SGD) transforma los procesos de resolución respecto del trabajo con lápiz y papel. Se identifican tres procesos duales fundamentales —materialización/idealización, descomposición/rectificación y particularización/generalización— cuya dinámica se ve modificada en entornos digitales, generando tensiones y nuevos objetos emergentes como puntos dinámicos y el arrastre.

Los resultados muestran que reconocer y analizar estos conflictos semióticos es un conocimiento clave para la formación docente, ya que permite diseñar estrategias didácticas más efectivas para integrar los Software de Geometría Dinámica y favorecer la construcción de significados geométricos profundos y articulados entre Geometría Sintética (GS) y la Geometría Analítica (GA).

ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA ESPACIAL EN LA ESCUELA SECUNDARIA: ANÁLISIS DE LAS ORGANIZACIONES QUE SE PROPONEN ESTUDIAR

María de la Trinidad Quijano

UNCo-CRUB, UNRN, Argentina
maria.quijano@crub.uncoma.edu.ar

Este trabajo se centra en el estudio de la geometría espacial en la escuela secundaria. Con la Teoría Antropológica de lo Didáctico como marco referencial, se caracteriza la organización matemática estudiada en relación con la geometría espacial en los primeros cuatro años de escuelas de secundaria. Se describieron y analizaron las tareas escolares presentes en el registro de clases de estudiantes de tres instituciones de la una ciudad de la provincia de Río Negro, Argentina. Los principales resultados señalan que el estudio de la

geometría espacial es limitado, mayormente vinculado con la aritmética y el álgebra. Particularmente, el hacer de las tareas se relaciona con el cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos, mediante fórmulas brindadas previamente y que se identifica con el fenómeno de monumentalización del saber.

Trabajo en conjunto con Ana Rosa Corica (CONICET, NIEM, ISISTAN, UNCPBA).

DINÁMICA EN LAS IDEAS DE INFINITO DE DOS ESTUDIANTES DE BIOLOGÍA

Andrea Rivera

UNCo - Bariloche, Argentina
andreb.rivera@gmail.com

Presentamos el análisis de una entrevista a dos estudiantes de Biología realizada luego de responder un cuestionario, con el objetivo de estudiar la dinámica de las concepciones sobre el infinito matemático en relación con el número real al reflexionar. Profundizamos en sus comprensiones sobre la representación decimal infinito-periódica de un número racional, la comparación de números con distintas notaciones y la comparación de conjuntos numéricos infinitos. Los resultados exhiben un vaivén de concepciones que conviven activamente durante la reflexión, evidenciando una comprensión lábil del infinito, que se les presenta de forma contradictoria y cognitivamente compleja. Destacamos que el contexto de la tarea influye en las visiones que ponen en juego al resolverlas, y que la noción potencial de límite actúa como un obstáculo para aceptar la equivalencia entre números expresados en dos representaciones decimales distintas. Además, notamos en los participantes una visión de la matemática como una herramienta, consistente con su formación donde la matemática tiene un carácter utilitario.

Trabajo en conjunto con Jordi Alsina (UNCo - Bariloche, IB - UNCuyo) y Virginia Montoro (UNCo - Bariloche, IPEHCS-UNCo-Conicet).

COMPETENCIAS DIGITALES DE ESTUDIANTES Y DOCENTES EN LA CÁTEDRA ANÁLISIS MATEMÁTICO: UN ESTUDIO EXPLORATORIO EN CURSO CON MIRAS A LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA CON GEOGEBRA

Karina Rizzo

Universidad Siglo 21. UTN.FRA, Argentina
karinarizzo71@gmail.com

En el marco de la creciente digitalización educativa, resulta imprescindible conocer y fortalecer las competencias digitales de estudiantes y docentes en carreras universitarias. La enseñanza de Análisis Matemático enfrenta desafíos por la abstracción de contenidos y la escasa relación con situaciones significativas. En esto, la modelización matemática con GeoGebra se constituye en una estrategia innovadora para la formalización matemática con representaciones dinámicas y contextualizadas.

Este trabajo expone los avances de una investigación en curso en la cátedra Análisis Matemático, orientada a diagnosticar y desarrollar competencias digitales que sustenten la implementación de actividades de modelización matemática. En una primera fase, se aplicó un pretest basado en el marco europeo DigComp 2.1 a 84 estudiantes y se encuestó a los docentes. Los resultados muestran fortalezas en la búsqueda y validación de información digital, pero debilidades en la colaboración en línea y en el uso autónomo de software matemático. En paralelo, los docentes valoran GeoGebra, aunque lo utilizan de manera puntual y manifiestan necesidad de mayor formación.

A partir de este diagnóstico, se implementaron talleres de formación en GeoGebra y actividades de modelización matemática, actualmente en desarrollo. En la siguiente fase se aplicará un posttest para evaluar el impacto de estas intervenciones

Trabajo en conjunto con Iván Darío Gómez Rivera, Marcos Kincero y Mariano Melendez (Universidad Siglo 21).

PROBLEMAS INTEGRADORES: SU IMPORTANCIA EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA EN CIENCIAS ECONÓMICAS

Marino César Schneeberger

Universidad Nacional de Entre Ríos - Facultad de Ciencias Económicas, Argentina
marino.schneeberger@uner.edu.ar

El presente trabajo muestra resultados correspondientes al informe final del proyecto de investigación denominado "Relevamiento, análisis, selección, categorización y elaboración de situaciones problemáticas del campo de las ciencias económicas aplicando contenidos matemáticos: implementación en el aula y evaluación de resultados", que se desarrolló en la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Entre Ríos.

El mismo tuvo como objetivo realizar un relevamiento y un análisis de los principales libros de uso habitual en este campo y, a partir de ello, organizar, sistematizar y categorizar esta información según el tipo de problemas y/o aplicaciones específicas que incluyan, prestando especial atención a la cantidad de temas que estos problemas involucran a medida que se avanza en el tratamiento de los diferentes temas y, a partir de esto, elaborar nuevos instrumentos que integren la mayoría de los temas posibles abordados en las asignaturas Álgebra, Cálculo y Matemática para Economistas. Algunos de ellos ya han sido puestos en práctica, tanto en instancias de enseñanza como de evaluación.

Trabajo en conjunto con Mariana Blanco y Melisa Fernández (UNER. Facultad de Ciencias Económicas. Argentina).

¿CUÁNTA MATEMÁTICA SABE LA IA?

Pedro Willging

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Universidad Nacional de La Pampa., Argentina
pwillging@gmail.com

En este trabajo nos proponemos poner a prueba las capacidades matemáticas de la inteligencia artificial generativa (IAG). Mostramos estándares disponibles para evaluar el desempeño de las herramientas que utilizan IAG para resolver problemas matemáticos. Ilustramos con algunos ejemplos las capacidades y deficiencias de la IAG en su estado actual.

Trabajo en conjunto con Cristian Scarola (Universidad Nacional de la Pampa, Argentina).

CLASIFICACIÓN EMPÍRICA DE LOS ERRORES DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE 1° ORDEN

Paula Zambianchi

Universidad de Buenos Aires, Argentina
pzambianchi@docente.ffyba.uba.ar

Con el objetivo de identificar las dificultades que surgen en las resoluciones de los ejercicios de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de 1° orden se realizó un análisis cuantitativo, diferenciando y categorizando los tipos de errores según lo observado en los exámenes, para poder comparar los desempeños pre y post pandemia. Estos ejercicios corresponden a los segundos parciales de los primeros y segundos cuatrimestres de los años 2018, 2022 y 2023. Este tema se aborda en la asignatura Matemática que forma parte del Ciclo Común de las carreras de Farmacia y Bioquímica de la Facultad de Farmacia y Bioquímica de la Universidad de Buenos Aires.

Para el tratamiento del análisis se consideró la clasificación empírica de los errores propuesta por Inbar, Movshovtitz-Hadar y Zaslavsky (1987), particularmente, inferencias no válidas lógicamente, falta de verificación de la solución y errores técnicos.

En este sentido, se observó que los estudiantes cometieron errores referidos a inferencias no válidas lógicamente, errores algebraicos, errores de derivación y/o integración y errores en el planteo e interpretación de la solución. En función de este análisis se realizarán modificaciones en la propuesta educativa de la asignatura para que los estudiantes puedan comprender las nociones enseñadas.

Trabajo en conjunto con Myriam Nuñez y Judith Montenegro Brusotti (Universidad de Buenos Aires, Argentina).



NOTICIERO

ISSN 1514-9595 (web)

Publicaciones de la REM: Relatos de experiencias

Esta sección contiene los trabajos que fueron presentados para ser expuestos durante la REM - UMA 2025 en la Sesión “Relatos de experiencias” y fueron aceptados por evaluadores para ser publicados.

El proceso de evaluación fue realizado por un conjunto de docentes e investigadores/as de todo el país y coordinado por el Comité Científico REM.

CÁLCULO ALGEBRAICO Y MEDICIÓN EMPÍRICA: UNA EXPERIENCIA STEAM EN TORNO AL FACTOR DE EMPAQUETAMIENTO ATÓMICO

Baiutti, Paola Beatriz; Galina, Esther; Escudero, Consuelo

In.E.S. “Dra. Carmen Peñaloza”; UNC - FAMAF; UNSJ - FI - FCEF

paolabaiutti@gmail.com

Categoría del Trabajo: Relatos de experiencias (de enseñanza o formación)

Nivel Educativo: Enseñanza Superior INFOD.

Palabras claves: material didáctico, sólidos cristalinos, química inorgánica, cuerpos geométricos.

Resumen: Este trabajo presenta una experiencia de un taller interdisciplinario desarrollado en el In.E.S. “Dra. Carmen Peñaloza” de San Juan, para estudiantes avanzados del Profesorado de Química. La propuesta surgió frente a una dificultad recurrente al enseñar una unidad de Química Inorgánica: Cristaloquímica. Para abordarla, se diseñó un taller en el que ciencias naturales, tecnología, humanidades y matemática se integraron a través de una actividad STEAM, centrada en el diseño y construcción de material didáctico tridimensional. El trabajo se estructuró en etapas: conceptualización teórica, diseño y construcción de modelos, planificación de microclases e implementación. De manera no premeditada, emergió la modelización matemática, incorporando la medición empírica de volúmenes mediante propiedades físicas. Asimismo, la participación en la Feria de Ciencias amplió el alcance del proyecto, validó la propuesta e inspiró adaptaciones para estudiantes con discapacidad visual. La experiencia muestra cómo un obstáculo al enseñar puede convertirse en una oportunidad de formación docente, integrando saberes.

Introducción

El propósito del taller fue ofrecer una experiencia STEAM integrada a estudiantes avanzados del profesorado, en la que distintas disciplinas se integren en torno a la resolución de un problema real y complejo.

La elección de la temática respondió a una dificultad recurrente en el aula de la asignatura Química Inorgánica, donde los contenidos de Cristaloquímica resultaban abstractos y difíciles

de visualizar. En este sentido, la propuesta buscó transformar esa dificultad en una oportunidad de aprendizaje, promoviendo la elaboración de representaciones tridimensionales que permitieran facilitar la comprensión del tema. A partir de ello, se invitó a estudiantes avanzados a preparar una microclase sobre algún contenido de la unidad de Cristaloquímica, incorporando la creación y construcción de algún material didáctico como componente esencial.

Modelización matemática y actividades STEAM integradas en Ferias de Ciencias

La experiencia se inscribe en el marco de discusiones en torno al currículo integrado. Beane (1991, citado en Ortiz-Hernández, 2017) sostiene que integrar supone atender al “todo” más que a la suma de las partes, mientras que Fogarty (1991) describe diversos modelos de integración donde las disciplinas se entrelazan mediante conceptos, destrezas y objetivos comunes. Lo que coincide con la afirmación de Popper (1963, citado en Ortiz-Revilla et al., 2020) de que los científicos no estudian disciplinas, sino problemas que atraviesan límites disciplinares.

En este marco, el enfoque STEAM integrado resulta clave ya que articula ciencia, tecnología, ingeniería, arte y matemática en torno a un propósito común (Yakman, 2008). Tal integración constituye una vía fundamental en la formación docente para promover en los futuros profesores una auténtica alfabetización científica y tecnológica (Borromeo-Ferri, 2018). En la misma línea, De Meester et al. (2021) plantean que una actividad STEM integrada de calidad debe partir de un desafío auténtico y significativo del mundo real, desagregado en problemas progresivamente más complejos, cuya resolución requiera articular saberes de distintas disciplinas, favoreciendo la indagación, el diseño, la colaboración estudiantil y la vinculación explícita de los contenidos STEM, todo ello adaptado al nivel de los estudiantes y sustentado en la investigación pedagógica de cada disciplina.

Hallström y Schönborn (2023) destacan que la modelización matemática (MM) constituye una estrategia pedagógica eficaz para el aprendizaje STEM. En este sentido, los estudiantes pudieron transitar todas las etapas del proceso de MM que, en términos de Blomhøj (2008), va desde la formulación del problema, pasando por la matematización, la resolución, la interpretación y culminando con la validación del modelo. Esta articulación entre el mundo real y el mundo matemático remite a la idea de Freire et al. (1997) de que “hay una manera matemática de estar en el mundo”, una manera que permite comprender la realidad para poder actuar sobre ella y transformarla. Esta dinámica permitió reflexionar, tal como lo señala Borromeo-Ferri (2018), respecto del valor formativo de la MM en la preparación docente, considerando que la matemática no adquirió un simple rol instrumental (Couso et al., 2021).

Finalmente, la experiencia adquirió proyección en el marco de las Ferias de Ciencias, escenario de divulgación y retroalimentación colectiva (Oppliger, 2009) que impulsa el protagonismo estudiantil y la construcción de competencias científicas (Retana-Alvarado, 2011).

Características institucionales y de los participantes

El taller extracurricular se desarrolló en el Instituto de Enseñanza Superior “Dra. Carmen Peñaloza” con el propósito de que un grupo de estudiantes avanzados del Profesorado de Química elaborara una propuesta didáctica que abordara una dificultad recurrente en la enseñanza de Química Inorgánica: los contenidos de cristaloquímica, cuya comprensión exige nociones de cuerpos geométricos que no forman parte de la currícula de “Matemática y Estadística”, la única asignatura donde podrían integrarse. Participaron estudiantes avanzados del Profesorado de Química que habían regularizado la asignatura “Química Inorgánica”.

Esta propuesta se apoyó en antecedentes: en 2022 los estudiantes tuvieron una primera intervención del docente de Matemática y Estadística en clases de Química Inorgánica, y en 2023 realizaron actividades de manipulación de cuerpos geométricos, representaciones en GeoGebra y construcción de modelos con palillos, plastilina y poliestireno expandido. El taller se desarrolló en el primer semestre de 2024, coordinado por un equipo docente interdisciplinario: Química Inorgánica, Matemática y Estadística, Psicología Educacional y Alfabetización Académica.

Descripción de la experiencia

El taller se estructuró en cuatro encuentros de aproximadamente tres horas cada uno.

Primer encuentro: Se trabajaron conceptos geométricos (visualización e identificación de cuerpos tridimensionales, sus partes y cálculo de volúmenes) junto con nociones químicas vinculadas a sólidos cristalinos (celdas unitarias, redes cristalinas, empaquetamiento atómico). Además, se revisaron conceptos de planificación de clases, material didáctico, comunicación efectiva, redacción de consignas y elaboración de bitácoras.

Como consigna los estudiantes debían preparar una propuesta de microclase para enseñar algún tema de la unidad de Cristaloquímica relacionado con Cuerpos Geométricos, donde la construcción de un material didáctico sea un componente esencial. Para ello, se plantearon preguntas orientadoras: ¿Cómo te hubiese gustado recibir la clase sobre este tema en química? ¿Qué características te gustaron de la propuesta y cuáles agregarías? ¿Cuál fue el papel del material didáctico creado y usado en la clase?

Segundo encuentro: Los equipos de estudiantes presentaron avances de la consigna anterior. Un grupo de tres estudiantes propuso la construcción de objetos que representen modelos

físico-químicos de celdas cúbicas (figura 1 y 2): simple (SC), centrada en la cara (FCC) y centrada en el cuerpo (BCC) (Atkins & Jones, 2006). Los cubos los realizaron en acrílico para representar las celdillas, con esferas de polietileno expandido en su interior para simular los átomos. Esto permitió medir empíricamente, con agua, el volumen de las celdillas. El procedimiento, ideado por los propios estudiantes, constituyó un modo alternativo de calcular el factor de empaquetamiento, diferente del abordaje algebraico trabajado en el cursado. Con este material el grupo de estudiantes calcularon el volumen del cubo con agua y, por diferencia con el espacio vacío, estimaron el volumen de las esferas, pudieron obtener el factor de empaquetamiento.



Figura 1: Esquema de las tres celdillas unidad cúbicas (a_0 =arista del cubo).

Tercer encuentro: Este grupo de estudiantes expuso su material (figura 3) y propuesta. Esta etapa permitió discutir ajustes en la planificación de la microclase y en el uso de los modelos, así como las dificultades técnicas que podrían presentarse en la construcción (hermeticidad de las uniones, adherencia de materiales y absorción de agua por las esferas de polietileno expandido). Los materiales didácticos fueron ideados y creados exclusivamente por los estudiantes, quienes colaboraron de manera creativa en su diseño y elaboración.

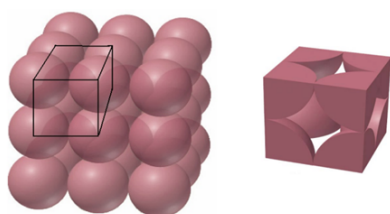


Figura 2: Representación de la red y de la celda unitaria cúbica simple



Figura 3: Estudiantes, docente y material didáctico

La esfera que representa el átomo fue adquirida comercialmente. A partir del radio de la misma obtuvieron las aristas (a) de los cubos que representan las celdas de los empaquetamientos de la figura 1. Calcularon el radio (r) de la esfera y, en función de él, construyeron el primer cubo con un empaquetamiento cúbico simple ($a = 2r$), el segundo con un empaquetamiento cúbico centrado en el cuerpo ($a = \frac{4r}{\sqrt{3}}$), y el tercero con un empaquetamiento cúbico centrado en las caras ($a = \frac{4r}{\sqrt{2}}$). Además, se construyeron otros 3 cubos del mismo tamaño que los anteriores, respectivamente, representando la celda sin átomos. De esta manera, pudieron calcular el factor de empaquetamiento (porcentaje del

espacio ocupado por los átomos en la celda respecto del volumen total de la celda cúbica) en cada estructura cúbica, para ello, calcularon el espacio ocupado por los átomos en cada celda restando al volumen de la celda vacía, el volumen del espacio vacío de la celda. Para el cálculo empírico, se basaron en:

$$V_{\text{espacio vacío}} = V_{\text{agua de celda con átomos}}, \quad V_{\text{átomos (empírico)}} = V_{\text{agua de celda vacía}} - V_{\text{espacio vacío}}$$

$$FE_{\text{empírico}} = \frac{V_{\text{átomos (empírico)}}}{V_{\text{celda}}} \cdot 100$$

El contraste entre el cálculo algebraico y la medición volumétrica permitió discutir sobre los límites de la aproximación geométrica, los errores sistemáticos debidos a la absorción del agua por poliestireno, las variaciones mínimas en el radio real de las esferas, la precisión de los instrumentos de medición y las propiedades físicas que permitieron o dificultaron la validación.

Presentación en Feria de Ciencias: El equipo de estudiantes presentó lo trabajado en la instancia institucional, zonal y provincial de la Feria de Educación, Ciencias, Artes y Tecnología - STEM situado - 2024, reformulando el desafío del taller en términos de una pregunta investigable propia: ¿Cómo podemos facilitar la comprensión del cálculo del factor de empaquetamiento de una celda cúbica a través del uso de material didáctico en una clase? Los evaluadores de la instancia zonal destacaron el potencial del material para ser adaptado a estudiantes con discapacidad visual, lo cual no fue previsto inicialmente.

Cuarto encuentro: En el segundo semestre de 2024, la propuesta didáctica fue implementada en la asignatura Química Inorgánica. Para esta etapa, el grupo de estudiantes cambió las esferas de poliestireno expandido por esferas de yeso, usando pelotas de juguete como molde. Debido a que con las de yeso podrían disminuir el error por la absorción de agua (figura 4).



Figura 4: Construcción de celda cúbica centrada en el cuerpo con esferas de yeso.

Reflexiones sobre la experiencia STEAM realizada

Desde la primera clase se establecieron criterios de evaluación formativa. En línea con De Meester et al. (2021), puede afirmarse que la experiencia alcanzó varios rasgos de una propuesta STEM integrada de calidad: partió de un desafío auténtico (facilitar la comprensión del factor de empaquetamiento), lo cual no podía abordarse desde una sola disciplina, exigió integrar química, matemática, física, didáctica, comunicación y creatividad; promovió

indagación y diseño mediante la construcción y ajuste de prototipos; implicó colaboración en la elaboración de materiales y microclases; y aseguró que los contenidos disciplinares se vinculen explícitamente en torno al problema central, sin diluirse.

En el desarrollo del proyecto, el grupo de estudiantes transitó de manera implícita por los subprocesos de la MM (Blomhøj, 2008, pp. 23), tomando como desafío del “mundo real” la dificultad de comprender el cálculo del factor de empaquetamiento en sólidos cristalinos. La formulación del primer problema, proceso (a), sobre el cual el grupo de estudiantes decidieron trabajar: ¿Cómo facilitar la comprensión del cálculo del factor de empaquetamiento en sólidos cristalinos mediante un recurso didáctico que lo haga tangible para futuros estudiantes? Más adelante, la cuestión se amplió hacia preguntas como: ¿de qué modo se puede construir un modelo tridimensional que represente con fidelidad una celda cúbica? y ¿cómo calcular el volumen ocupado por los átomos en el modelo?

El proceso de sistematización, proceso (b), llevó a identificar que los objetos relevantes eran las celdas cúbicas y los átomos. Decidieron construir cubos de acrílico con esferas de poliestireno expandido, intentando lograr que los prototipos fueran lo suficientemente herméticos para ser utilizados con agua. Este paso condujo a ensayos con distintos pegamentos y materiales por lo que el proceso no resultó lineal. La matematización, proceso (c), apareció al establecer que la medida de la arista debía depender del radio de las esferas disponibles comercialmente. Con estas relaciones se definieron los cubos que representan las distintas celdas (simple, centrada en el cuerpo y centrada en las caras). Luego, al establecer la fórmula para calcular el $FE_{empírico}$, tuvieron que expresar $V_{átomos (empírico)}$ y V_{celda} . El uso de métodos matemáticos, proceso (d), condujo a medir el volumen del agua que ocupó el espacio vacío de los cubos con y sin esferas para calcular el $FE_{empírico}$. En la etapa de interpretación de los resultados, proceso (e), se concluyó que el $FE_{empírico} = 73\%$. La validación, proceso (f), consistió en comparar el valor teórico con el obtenido empíricamente. Por ejemplo, en la celda cúbica centrada en las caras, el factor de empaquetamiento teórico es de 74%, el empírico fue del 73%, error no significativo para un cálculo empírico.

Este proceso de MM permitió una real comprensión del significado del factor de empaquetamiento y la obtención de un material para uso didáctico.

Reflexiones finales

En términos formativos matemáticos, el grupo de estudiantes fortalecieron los conceptos de cuerpos geométricos, su visualización, sus elementos y el cálculo de volúmenes. Así también, aprendieron a explicar con sentido, utilizando la matemática como lenguaje para comunicar

fenómenos de otras ciencias. Les permitió al grupo de estudiantes integrar conceptos de distintas disciplinas, colaborar para abordar un desafío, desarrollar una propuesta didáctica que aborda un tema complejo, entre otros. El hecho de que el grupo de estudiantes imaginaran, materializaran y pusieran a prueba un método alternativo para calcular el factor de empaquetamiento muestra cómo un enfoque interdisciplinario y la modelización matemática reforzaron conceptos previos y habilitaron la creación de otra estrategia de resolución.

La presencia plural del equipo docente mostró el trabajo en equipo interdisciplinario. La presentación en la Feria de Ciencias fue una instancia de retroalimentación, con impacto institucional al posicionar al Profesorado en Química como pionero entre los profesorados del instituto en llevar un proyecto a la Feria de Ciencias. Al replantear el desafío del taller en un proyecto de Feria de Ciencias se consolidó significativamente la apropiación del problema original, evidenciando su capacidad para traducir una dificultad didáctica en un proyecto de investigación educativa. Además, esto brindó a los futuros docentes la experiencia de participar en ferias, dialogar con especialistas y asumir responsabilidad sobre sus producciones.

En conjunto, el taller se configuró como un laboratorio de innovación formativa donde la matemática se resignifica al articularse con problemas auténticos, mostrando que modelizar es una forma de aprender matemática con fenómenos que exceden sus fronteras. En suma, la actividad STEAM integrada favoreció la creatividad y reflexión crítica, transformando obstáculos en oportunidades y entrelazando enseñanza, aprendizaje e investigación.

Referencias bibliográficas

- Atkins P., Jones L. (2006). *Principios de la química: los caminos del descubrimiento*. 3º edición. Editorial Médica Panamericana S. A.
- Blomhøj, M. (2008). Modelización matemática - una teoría para la práctica. (Trad. Mina, M.) *Revista de Educación Matemática (RevEM)*, 23(2), 2. (Trabajo original publicado en 2004).
- Borromeo-Ferri, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Cham, Suiza: Springer International Publishing.
- Couso, D., Cañellas, L. M. y Rodríguez, C. S. (2021). De las mates como instrumento a las mates como práctica: su papel en los proyectos STEM. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, (93), 8-14.
- De Meester, J., De Cock, M., Langie, G. and Dehaene, W. (2021). The Process of Designing Integrated STEM Learning Materials: Case Study towards an Evidence-based Model. *European Journal of STEM Education*, 6(1), 10. <https://doi.org/10.20897/ejsteme/11341>

- Freire, P., D'Ambrosio, U. & Mendonça, M. D. C. (1997). A conversation with Paulo Freire. *For the Learning of Mathematics*, 17(3), 7–10.
- Fogarty, R. (1991). Ten ways to integrated curriculum. *Educational Leadership*, 49 (2), 61-65.
- Hallström, J. y Schönborn, K. J. (2023). Models and modeling in STEM education: nature, roles, and implementation. *Enciclopedia internacional de educación*, 112-116. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-818630-5.13038-6>
- Oppliger, L. V., Nuñez, P. y Gelcich, S. (2019). Ferias Científicas como Escenarios de Motivación e Interés por la Ciencia en Estudiantes Chilenos de Educación Media de la Región Metropolitana. *Información tecnológica*, 30(6), 289-300.
- Ortiz-Hernández, E. (2017). Retos y perspectivas del currículo integrado. *Revista de Educación de Puerto Rico (REduca)*, (21), 35-56.
- Ortiz-Revilla, J., Adúriz-Bravo, A. y Greca, I. M. (2020). A framework for epistemological discussion on integrated STEM education. *Science & Education*, 29(4), 857-880.
- Retana Alvarado, D. A. (2013) Ferias son un semillero de vocaciones en ciencia y tecnología. *Revista de Ciencia y Tecnología de la UCR*, 27, 68-69.
- Yakman, G. (2008). STEAM Education: an overview of creating a model of integrative education. En M.J. DE Vries (Ed.). *PATT-17 and PATT-19 Proceedings* (pp. 335-358). Reston, VA: ITTEA. <https://cutt.ly/Lgj7edP>

DISEÑO DE UN CURSO DE FORMACIÓN DOCENTE PARA EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO FUNCIONAL A TRAVÉS DE LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

Karla Bastías Sepúlveda⁽¹⁾; Antonio Moreno Verdejo⁽²⁾ y María Florencia Cruz⁽³⁾

Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada, España (1, 2)

Facultad de Ciencias de la Educación y Psicología, Universidad de Córdoba, España (3)

karlabastias@correo.ugr.es

Categoría del trabajo: Relato de experiencia de formación

Nivel educativo: Formación docente

Palabras Clave: Pensamiento funcional, Modelización Matemática, Formación docente, Educación primaria.

Resumen

El presente trabajo tiene el objetivo de describir un curso de formación docente para promover el pensamiento funcional a través de la modelización matemática en educación primaria. Este curso se desarrolla con profesores en Chile que imparten clases en los niveles de 5º y 6º básico (educación primaria). Los participantes experimentaron, diseñaron e implementaron tareas de modelización matemática que implicaban el desarrollo del pensamiento funcional. En cinco sesiones de trabajo, se abordaron elementos teóricos y prácticos vinculados al marco teórico del estudio. Los resultados ponen de manifiesto que esta experiencia permitió a los docentes, a través de un proceso teórico práctico, articular conceptos vinculados a las prácticas del pensamiento funcional, utilizando la modelización matemática como estrategia pedagógica.

Introducción

En este trabajo damos a conocer una experiencia de formación continua de profesores de matemática de educación primaria chilenos. La experiencia se centró en dos temáticas fundamentales: el pensamiento funcional y la modelización matemática. A partir del pensamiento funcional se aprovecha el potencial que proporciona este contenido tanto en los primeros niveles educativos como en los niveles sucesivos, potenciando las capacidades del estudiantado, el razonamiento en general y el matemático en particular (Cañadas y Molina, 2016). El Ministerio de Educación de Chile (2012) incluye conceptos vinculados con este tipo de pensamiento, específicamente en el eje temático patrones y álgebra, a través del cual se espera, que los estudiantes expliquen y describan relaciones entre números, formas, objetos y conceptos, facultándolos para investigar las formas, las cantidades y el cambio de una cantidad en relación con otra. También, sugiere la necesidad de que representen patrones. Considerando que la percepción de los patrones les permite predecir y fundamentar su razonamiento en la resolución de problemas. Además, sostiene que un aprendizaje consistente en patrones beneficia el pensamiento abstracto en niveles avanzados, como es el pensamiento algebraico.

La modelización matemática en la actualidad se encuentra en constante expansión, siendo objeto de estudio en diversas investigaciones, ahondando en los avances teóricos y empíricos y sus implicaciones para la práctica pedagógicas (Huincahue et al., 2018; Cruz, 2023). Moreno et al. (2021) indican que “a partir de la traducción de problemas reales al mundo matemático el estudiante percibe la aplicabilidad de las matemáticas, y adquiere estos conocimientos como herramientas para su uso fuera del aula” (p.110). El currículo en Chile considera que, “a partir del modelamiento matemático, los estudiantes aprenden a usar una variedad de representaciones de datos y a seleccionar y aplicar métodos matemáticos apropiados y herramientas para resolver problemas del mundo real” (MINEDUC, 2012, p. 217).

En esta experiencia formativa consideramos la modelización matemática como una estrategia pedagógica fundamental en el proceso de enseñanza y de aprendizaje del pensamiento funcional. Entre las prácticas del pensamiento funcional que recupera Blanton (2008) se encuentran la generalización, la representación, la justificación y el razonamiento, en general, todas ellas se pueden promoverse en situaciones de modelización matemática pensadas para su desarrollo, por lo que consideramos necesario que el profesorado reconozca estas formas de trabajo. Por tanto, nuestro objetivo es describir un curso de formación docente para promover el pensamiento funcional a través de la modelización matemática en educación primaria.

A continuación, presentaremos los elementos teóricos que sustentan la propuesta, posteriormente describimos el diseño de la experiencia desarrollada.

Referentes teóricos

a. Pensamiento funcional

Smith (2008) sostiene que el pensamiento funcional es el pensamiento que estudia la relación entre dos o más cantidades variables, particularmente los tipos de pensamiento que van de relaciones específicas a generalizaciones. Este proceso cognitivo implica la generalización, que es la construcción por parte del estudiante de una certeza matemática general a partir de las relaciones de un conjunto de datos; la representación de esta práctica, que se realiza a través de las palabras, símbolos, tablas o gráficos, que varían según el nivel educativo del estudiante y su experiencia matemática; la justificación, que admite la veracidad de las conjeturas; y el razonamiento que permite al estudiante la búsqueda de argumentos generales para justificar las ideas matemáticas para comprobar la veracidad de una conjetura (Blanton, 2008).

b. Formación del profesorado de primaria y modelización matemática

El desarrollo de la modelización implica establecer relaciones y conexiones de forma implícita o explícita entre un problema real y una idea matemática, proceso que depende de la perspectiva que se establezca de la realidad, de modelo y de modelo matemático (Moreno, et al., 2021). Desde una perspectiva metodológica, la modelización “es utilizada para que el aprendizaje se realice a partir de la realidad del estudiante y sea dirigido hacia el conocimiento matemático” (Huinchahue et al., 2018, p.100). Siguiendo a Cruz (2023) consideramos que se emplea la modelización matemática como abordaje pedagógico cuando se organiza el trabajo en el aula de matemática en torno a las fases que intervienen en un proceso de modelización matemática, se ponen en juego actividades que caracterizan a la matemática y se considera el propio proceso como objeto de enseñanza y de aprendizaje. Distintos investigadores han propuesto versiones de un ciclo de modelización con diferentes fases que representa el proceso (Doerr et al., 2017). Con relación al proceso de formación docente, Bassanezi (1994), afirma que el uso de la metodología de modelización matemática en cursos de especialización ha logrado mejoras educativas, además de fomentar el desarrollo de profesionales altamente cualificados.

Descripción del curso

En la experiencia participó un grupo de 12 profesores de matemática de los niveles de 5º y 6º año básico (10 - 12 años) en establecimientos de la Fundación del Magisterio de La Araucanía

(Chile). La mayoría de los establecimientos son del sector rural (9 escuelas) y 5 de docentes trabajan aulas multigrado, siendo cursos combinados los niveles de 5° y 6° básico.

El diseño y desarrollo del curso se realizó en tres etapas. La primera etapa consistió en la planificación, a través de la definición de los objetivos para cada sesión, los cuales debían ser progresivos; la revisión de los contenidos a abordar de acuerdo con los elementos teórico del estudio, y la descripción de la metodología, que se focalizó en tres procesos claves, la práctica como modelizadores por parte de los participantes, el diseño e implementación de escenarios de modelización matemática en el aula. Además, en este periodo el equipo a cargo del curso seleccionó y diseñó tareas de modelización matemática que integraran las prácticas del pensamiento funcional, que componen el principal recurso para el desarrollo de la experiencia.

Una segunda etapa consistió en la implementación del curso. La programación incluyó cinco sesiones de trabajo de 2,5 horas. Los docentes en la primera sesión se organizaron en grupos de tres integrantes, para trabajar en conjunto durante todas las sesiones. Mediante esta distribución, pretendíamos que se desarrollara un trabajo colaborativo que nutriera sus experiencias, a través de la reflexión, la discusión y el intercambio de ideas. En esta misma etapa, el equipo que impartió el curso repasó el diseño a través de reuniones semanales, evaluando las actividades propuestas según la metodología definida, revisando la documentación teórica y recursos de aprendizaje, y retroalimentando las tareas diseñadas por los participantes.

La tercera etapa, corresponde a la evaluación de la experiencia, siendo un proceso transversal en el diseño. Implicando, la evaluación que realizan los participantes en el desarrollo de cada sesión, la evaluación del diseño del curso por parte del equipo que impartió el mismo, y el análisis e interpretación de los resultados de acuerdo con los objetivos planteados.

A continuación, presentamos un esquema (Figura 1) del diseño del proceso formativo y la planificación curso (Tabla 1) que describe los objetivos, contenidos y la metodología.

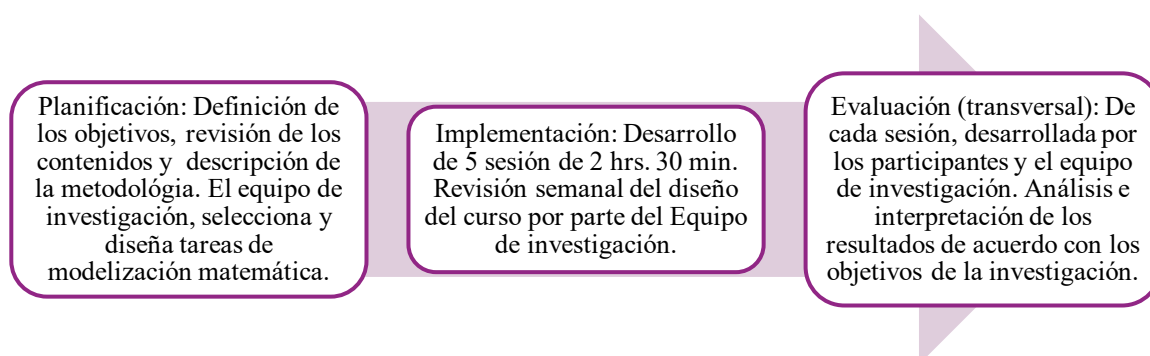


Figura 1. Síntesis del diseño del proceso formativo.

Contenidos: Pensamiento funcional, prácticas del pensamiento funcional, modelización matemática y ciclo de modelización matemática. Rúbrica para la evaluación de procesos de modelado matemático en educación primaria. Instrumento adaptado de Toalongo, et al. (2022).		
Sesión	Objetivos	Metodología
1	Comprender qué es la modelización matemática y los procesos que implica. Estudiar el pensamiento funcional a través de la estrategia de modelización matemática	Presentación y desarrollo de tareas como introducción a la práctica de la estrategia de modelización matemática. Análisis del ciclo de modelización y sus fases. Tareas desarrolladas: “Almuerzo en comunidad”, “Arroz con leche” y “Juana Cumple años”. Monitoreo y retroalimentación.
2	Experimentar la modelización matemática a través de tareas que incorporen el pensamiento funcional.	Análisis de las prácticas del pensamiento funcional. Desarrollo de una tarea dirigida a estudiantes de 5° y 6° básico “Salida pedagógica” siguiendo las fases del ciclo de modelización. Monitoreo y retroalimentación.
3	Diseñar escenarios de modelización matemática que impliquen el desarrollo del pensamiento funcional de estudiantes de 5° y 6° año básico.	En grupos, diseñan tarea de modelización que integren el pensamiento funcional como contenido. Monitoreo y retroalimentación de las tareas.
4	Implementar escenarios de modelización matemática. Analizar y retroalimentar los escenarios de modelización matemática diseñados.	Previo a la sesión, un integrante de cada grupo implementa la tarea diseñada para los niveles 5° y/o 6° básico. Los participantes comparten sus experiencias. El equipo que imparte el curso realiza la retroalimentación de las tareas diseñadas. Los grupos rediseñan sus tareas a partir de las sugerencias.
5	Evaluación del proceso formativo. Análisis de la implementación de escenarios de modelización matemática.	Luego de las sesiones 3 y 4, se acompaña y graba la implementación de la tarea de dos integrantes del mismo grupo. En la sesión se analizan los videos a través de una Rúbrica. Evaluación del proceso formativo.

Tabla 1. Planificación curso de formación de profesores.

Evaluación de la experiencia

El curso desarrollado fue una oportunidad de formación continua para los profesores participantes. El objetivo planteado comprendió una experiencia que permitió a los docentes articular conceptos vinculados a las prácticas del pensamiento funcional, utilizando la modelización matemática como estrategia pedagógica en educación primaria, a través de la cual pueden reconocer y contextualizar contenidos para el trabajo en el aula.

Otro elemento por considerar es que la metodología del curso involucró el trabajo teórico práctico, destacando que los docentes parten el proceso de modelización desde la experimentación, transitando desde un rol de estudiante que aprende a modelizar a un profesor que diseña y aplica escenarios de modelización en el aula. Además, permitió que los docentes pudiesen gestionar de forma colaborativa las interacciones con los estudiantes en la aplicación de las tareas de modelización en el aula.

Referencias

- Bassanezi, R. (1994). Modelling as a teaching-learning strategy. *For the Learning of Mathematics*, 14(2), 31-35. <https://flm-journal.org/Articles/3F5FBE0A2D6EB346EB0517CC861388.pdf>
- Blanton, M. L. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Comares.
- Cruz, M. F. (2023). *Sentidos, validaciones y definiciones al interior de una vivencia de formación de futuras profesoras en matemática mediada por un escenario de modelización matemática en el contexto de una universidad pública argentina*. Universidad Nacional de Córdoba. <https://rdu.unc.edu.ar/handle/11086/548249>
- Doerr, H. M., Ärlebäck, J. B., & Misfeldt, M. (2017). Representations of modelling in mathematics education. In G. Stillman, W., Blum, & G. Kaiser (Eds.), *Mathematical modelling and applications. Crossing and researching boundaries in mathematics education* (pp. 71-82). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62968-1_6
- Huincahue, J., Borromeo-Ferri, R. y Mena-Lorca, J. (2018). El conocimiento de la modelación matemática desde la reflexión en la formación inicial de profesores de matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, 36(1), 99-115. <https://ensciencias.uab.cat/article/view/v36-n1-huincahue-borromeo-mena>
- Ministerio de Educación de Chile (2012). *Bases curriculares de matemática educación básica*. Santiago de Chile, Autor.
- Moreno, A., Marín, M., y Ramírez-Uclés, R. (2021). Errores de profesores de matemáticas en formación inicial al resolver una tarea de modelización. *PNA*, 15(2), 109-136. <https://doi.org/10.30827/pna.v15i2.20746>
- Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In Kaput, J. J., Carraher, D. W., & Blanton, M. L. (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp.133-160) New York, NY: LEA [u.a.].
- Toalongo, X., Trelles, C. y Alsina, Á. (2022). Design, Construction and Validation of a Rubric to Evaluate Mathematical Modelling in School Education. *Mathematics*, 10(24), 4662. <https://doi.org/10.3390/math10244662>

IMPLEMENTACIÓN Y ANÁLISIS DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA CON GEOGEBRA PARA LA ENSEÑANZA DE POLINOMIOS Y FUNCIONES POLINÓMICAS EN EDUCACIÓN SECUNDARIA

Agustina Bayés, Viviana Costa

IMApEC, Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, UNLP

Avenida 1 y 47, la Plata, Buenos Aires, Argentina

agustina.bayes@ing.unlp.edu.ar

Categoría del Trabajo: Relato de experiencia

Nivel Educativo: Secundaria

Palabras claves: Didáctica, enseñanza de la matemática, funciones polinómicas, GeoGebra.

Resumen: Se presenta la implementación y análisis de una secuencia didáctica para la enseñanza de polinomios y funciones polinómicas en estudiantes de 4° y 5° año de secundaria de la Provincia de Buenos Aires, Argentina. Es parte de una tesis de maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales en la Universidad Nacional de La Plata. La propuesta se enmarca en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), integra el uso de GeoGebra en dispositivos móviles y promueve el Aprendizaje Móvil. La secuencia, adaptada del "Grupo de los Lunes", se estructura en actividades que favorecen la construcción de funciones polinómicas a partir del producto de funciones de menor grado. Los resultados muestran una mejora en la comprensión conceptual, la autonomía estudiantil y la interacción con herramientas digitales, evidenciando el potencial de las GeoGebra para transformar prácticas tradicionales en el aula de matemáticas.

Introducción

La enseñanza de polinomios y funciones polinómicas en la escuela secundaria enfrenta desafíos persistentes, como el enfoque tradicional centrado en procedimientos mecánicos y la falta de integración significativa de tecnologías digitales. Esta investigación propone una secuencia didáctica innovadora que utiliza GeoGebra en dispositivos móviles, enmarcada en la TAD, para enriquecer la actividad matemática de los estudiantes, basada en una propuesta por el "Grupo de los Lunes" (Fioriti y Sessa, 2015). El estudio se desarrolla en el contexto del

Diseño Curricular de la Provincia de Buenos Aires (Diseño Curricular de la Provincia de Buenos Aires, 2015), que promueve el uso de software para el estudio de funciones. La secuencia busca superar limitaciones didácticas mediante la exploración gráfica, algebraica y simbólica, fomentando un aprendizaje autónomo y contextualizado. Esta se estructura en actividades que tiene por finalidad la construcción de funciones polinómicas a partir del producto de funciones de menor grado, entendiendo que las funciones resultantes, conservan propiedades de las funciones factores.

Marco Teórico

El marco teórico se sustenta en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1999), que permite analizar las *praxeologías matemáticas*, las *organizaciones didácticas* y los *momentos de estudio* involucrados en la enseñanza. Se incorporan conceptos de Aprendizaje Móvil (AM) y Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) (Bayés, Costa, 2022), específicamente el software GeoGebra, como medios didácticos que amplían las oportunidades de aprendizaje más allá del aula. La TAD proporciona herramientas para diseñar y evaluar secuencias que articulan tareas, técnicas, tecnologías y teorías, facilitando la transposición didáctica de saberes matemáticos.

Metodología

La investigación sigue un enfoque cualitativo y descriptivo, organizado en dos etapas: (1) diseño y ajuste de la secuencia mediante talleres con docentes, y (2) implementación en un curso de 4° año de secundaria. La secuencia fue implementada en 10 clases, con estudiantes trabajando en grupos usando la aplicación móvil de GeoGebra. Los datos se recolectan mediante observación participante, producciones estudiantiles y un cuestionario final sobre la experiencia con GeoGebra. El análisis se realizó desde la perspectiva de la TAD, considerando los momentos de estudio y las organizaciones matemáticas y didácticas.

Resultados

La primera fase de la investigación, centrada en el diseño y ajuste de la secuencia didáctica a través de talleres con docentes, arrojó resultados significativos que permitieron refinar la propuesta educativa. Los talleres revelaron que, si bien los docentes contaban con formación en didáctica de la matemática, sus prácticas predominantes se orientaban hacia enfoques tradicionales, iniciando el estudio de polinomios mediante definiciones formales y priorizando técnicas algebraicas sobre la comprensión conceptual. El análisis desde la TAD permitió identificar que las prácticas docentes vigentes privilegiaban el *saber-hacer* (técnicas de factorización, operaciones) sobre la construcción de significado matemático. Los docentes manifestaron dificultades para integrar tecnologías digitales de manera pedagógicamente

fundamentada, aunque reconocieron el potencial de GeoGebra para enriquecer la visualización y exploración. Los talleres funcionaron como espacios de co-diseño, donde las sugerencias de los docentes, permitieron ajustar la secuencia, que prioriza la gradualidad, la autonomía estudiantil y la articulación entre representaciones gráficas y algebraicas.

A modo de ejemplo se muestra la primera Actividad (Cuadro 1) del Libro Interactivo de GeoGebra.

Actividad 1

Graficar las funciones lineales $p(x)=x$ y $q(x)=2x$ en GeoGebra. A partir del gráfico, respondé a las siguientes preguntas:

a. ¿Para qué valores de x , si existen, $p(x)$ y $q(x)$ son cero? En caso de que existan, podés encontrarlos en GeoGebra con la ayuda de la herramienta .

b. En base a lo anterior, ¿en qué rango de valores de x las funciones $p(x)$ y $q(x)$ son positivas o negativas?

c. A partir de las funciones lineales $p(x)$ y $q(x)$, definimos la función $h(x)$ de la siguiente manera: para cada valor de x , $h(x)=p(x) \cdot q(x)$:
Calcular el valor de $h(x)$ en cada caso, utilizando la vista gráfica y colocar los puntos encontrados usando la herramienta :

- $h(2)$
- $h(0)$
- $h(-1)$
- $h(-3)$
- $h(-2)$

d. Realiza un posible gráfico para $h(x)$ según lo encontrado en el inciso c, usando la herramienta lápiz . Si lo consideras necesario, podés calcular más puntos de la función $h(x)$.

e. Ahora seleccionen la casilla de la función $h(x)$ y comprueben si el gráfico que habían pensado es el que se muestra en GeoGebra.

f. En base al gráfico realizado de la función $h(x)$, ¿para qué valores de la variable x , la función $h(x)$ es cero? ¿Para qué valores de la variable x , $h(x)$ es positiva y negativa? ¿Existe alguna relación con lo encontrado en el inciso a? Si la respuesta es sí, indicar cuál, y si la respuesta es no, explicar por qué.

g. Escribí la expresión algebraica de la función $h(x)$. Podés ayudarte con las expresiones algebraicas de las funciones $p(x)$ y $q(x)$.

h. Realizar en la hoja los gráficos realizados en GeoGebra.

Cuadro 1: Actividad 1 del Libro interactivo de GeoGebra

En los primeros incisos de la actividad, centrados en la identificación de elementos clave de funciones lineales ($p(x)$ y $q(x)$) a partir de sus gráficos, los estudiantes utilizaron la vista algebraica de GeoGebra para ingresar las funciones y observar sus representaciones gráficas. El objetivo era reconocer características como la ordenada al origen y las raíces. Durante el cálculo algebraico de las raíces, aproximadamente la mitad de los estudiantes manifestó

dudas sobre el significado conceptual de “que una función sea cero”, a pesar de haber trabajado previamente con el concepto de “raíz”. Esto requirió una intervención docente para clarificar la terminología y asegurar la comprensión antes de continuar.

Al determinar los intervalos de positividad y negatividad, la mayoría de los estudiantes demostró comprensión gráfica pero mostró dificultades para expresar estos intervalos utilizando notación matemática formal (como $x > 0$) o incluso descripciones coloquiales precisas. Se observaron diversas estrategias: un grupo utilizó la terminología de “cuadrantes”, mientras que otros optaron por expresiones como “de cero a la derecha” o notación matemática básica.

Para el cálculo de valores de la función cuadrática $h(x)$, emergieron dos enfoques diferenciados: algunos grupos realizaron el cálculo algebraicamente (evaluando y multiplicando valores de las funciones lineales) mientras que otros utilizaron directamente la información gráfica disponible en GeoGebra.

El proceso de graficación de $h(x)$ reveló que, aunque los estudiantes pudieron unir puntos correctamente, no todos consideraron las condiciones necesarias para que una gráfica represente adecuadamente una función, indicando posibles vacíos en la comprensión conceptual de las funciones cuadráticas. Sin embargo, la mayoría ingresó correctamente la expresión algebraica de $h(x)$ en GeoGebra, lo que facilitó una discusión productiva sobre las diferentes representaciones gráficas generadas por los distintos grupos.

La pregunta sobre la relación entre las propiedades de $h(x)$ y las funciones originales $p(x)$ y $q(x)$ generó respuestas mayoritariamente en lenguaje coloquial, con limitado uso de notación matemática formal. La actividad culminó con la escritura de la expresión algebraica de $h(x)$ y su representación manual, demostrando que los estudiantes lograron transitar entre múltiples representaciones (algebraica, gráfica, verbal) aunque con diferentes niveles de dominio en cada una. El análisis revela que la secuencia facilitó la exploración conceptual y el descubrimiento de relaciones matemáticas, aunque también evidenció la necesidad de reforzar específicamente el uso de notación matemática formal y la comprensión profunda de los conceptos de función y sus propiedades. La integración de GeoGebra y dispositivos móviles facilitó un medio didáctico dinámico que promovió la exploración y la validación de conjeturas. La secuencia, alineada con la TAD, permitió articular saberes previos con nuevos contenidos, favoreciendo la institucionalización de conceptos clave. Los desafíos incluyen la adaptación a diferentes dispositivos móviles y la necesidad de capacitación docente previa. A modo de ejemplo, se muestran producciones de los estudiantes de la Actividad 1 (Cuadro 2).

Actividad 1 a) Esas funciones son 0 si (x) es 0. b) Son positivas ya que se unican en el 1er cuadrante.	f) cuando $x=0$. Para qué x sea negativa tiene que haber un valor de x positivo y otro negativo. Para que sea positiva tienen que ser 2 valores positivos o 2 negativos. Si, relación con el $A = \begin{cases} p(x)=0 \\ q(x)=0 \end{cases} h(x)=0$

Cuadro 2: Actividad 1. Algunas producciones de estudiantes. (i) Incisos a) y b), (ii) Inciso f) (iii) Inciso d), (iv) Inciso e), (v) Inciso g.

Luego, la implementación de la secuencia, mostró que los estudiantes lograron:

- Construir funciones polinómicas de grado 2 a partir del producto de funciones lineales.
- Identificar raíces, intervalos de positividad/negatividad y comportamientos gráficos mediante la exploración en GeoGebra.
- Desarrollar autonomía en el uso de herramientas digitales y trabajo colaborativo.
- Valorar positivamente el uso de GeoGebra por su interactividad y capacidad de verificación gráfica.

Conclusión

La secuencia didáctica con GeoGebra demostró ser una alternativa viable y efectiva para la enseñanza de polinomios y funciones polinómicas, pertinente a lo propuesto en el Diseño Curricular de la Provincia de Buenos Aires, potenciando el aprendizaje autónomo y la visualización matemática. Además, involucrar a los docentes en el proceso de diseño para asegurar su viabilidad y contextualización en aulas reales, validó la relevancia de la secuencia propuesta. Futuras investigaciones podrían explorar su aplicabilidad en otros temas, por ejemplo para funciones polinómicas de grado tres o mayor.

Referencias Bibliográficas

- Bayés, A., y Costa, V. A. (2022). Calculadora Gráfica de GeoGebra para el estudio de función polinómica, polinomio y serie de Taylor. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, 11(2), 052-071.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221-266.
- DGCyE. Diseño Curricular de la Provincia de Buenos Aires. (2015). http://servicios.abc.gov.ar/lainstitucion/organismos/consejogeneral/disenioscurriculares/secundaria/materias_comunes_a_todas_las_orientaciones_de_4anio/matematica_4.pdf . Accedido el 12 de mayo de 2022.
- Fioriti, G., y Sessa, C. (2015). Introducción al trabajo con polinomios y funciones polinómicas: incorporación del programa GeoGebra al trabajo matemático en el aula. UNIPE: Editorial Universitaria, 2015. Libro digital, PDF Archivo Digital: descarga y online ISBN 9789873805073 1. Formación de Docentes de Secundaria. 2. Matemática. 3. Herramientas Informáticas. I. Sessa, Carmen CDD 371.1

PROYECTOS STEAM PARA LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA EN LAS CIENCIAS AGROPECUARIAS: ANÁLISIS DE INFORMES EN FORMATO VIDEO PRODUCIDOS POR ESTUDIANTES

Araceli Coirini, Valeria González y María de los Ángeles Martínez

Facultad de Ciencias Agropecuarias, UNC

Ing. Agr. Félix Aldo Marrone 746, Ciudad Universitaria, CP:X5000HUA Córdoba,
Argentina

araceli.coirini@unc.edu.ar

Categoría del trabajo: Relato de experiencia

Nivel educativo: Universitario

Palabras claves: proyectos STEAM, modelización matemática, informe-video, Ciencias
Agropecuarias

Resumen:

En la asignatura Matemática II de la Facultad de Ciencias Agropecuarias de la Universidad Nacional de Córdoba se implementó una propuesta de enseñanza con enfoque STEAM, en la que los estudiantes abordaron problemáticas agropecuarias reales mediante un proceso de modelización matemática, presentando sus proyectos en informes en formato video. El objetivo de este trabajo fue analizar estos informes para identificar logros y desafíos de la modalidad. Para ello se diseñó una rúbrica con criterios vinculados a la formulación de hipótesis, la construcción y adecuación de modelos matemáticos, el uso de herramientas de cálculo y la interpretación de resultados. El análisis de 36 informes evidenció avances en la presentación y conclusión de la problemática, junto con dificultades en la formalización e interpretación matemática, lo que orienta mejoras en la implementación futura y aporta a la reflexión sobre la enseñanza de la matemática en la facultad.

Introducción

En el mundo actual, donde los problemas y las tecnologías cambian constantemente, las demandas hacia los futuros egresados de las Ciencias Agropecuarias son cada vez mayores. Estas incluyen la capacidad de resolver problemas complejos, pensar críticamente, trabajar en colaboración con otros y utilizar tecnologías actuales (National Research Council, 2011). Los estudiantes no sólo necesitan información, sino también la capacidad de construir conocimientos, actitudes y valores, y desarrollar diversos modos de pensar (Ministerio de Educación, 2024). En este entramado, la matemática constituye una pieza clave en la formación,

al proveer modelos y métodos que permiten analizar, simular y predecir fenómenos agropecuarios. Sin embargo, un desafío recurrente en los primeros años de la carrera es que los estudiantes tienden a percibirla como abstracta y desvinculada de las problemáticas de su campo profesional.

Con el propósito de enfrentar este desafío, en la asignatura cuatrimestral Matemática II, correspondiente al primer año de las carreras de la Facultad de Ciencias Agropecuarias, se implementó una propuesta de enseñanza basada en proyectos con enfoque STEAM (por sus siglas en inglés, *Science, Technology, Engineering, Arts & Mathematics*). La implementación de proyectos interdisciplinarios desde este enfoque, permite que los estudiantes no solo aprendan contenidos, sino que también los apliquen, los cuestionen y los conecten con su entorno (Chonillo Sisler, 2025). En este marco, la modelización matemática activa (Muller & Burkhardt, 2007) se incorpora como estrategia pedagógica central, ya que a partir de una problemática real los estudiantes deben seleccionar variables, formular hipótesis, recoger datos, establecer relaciones, construir y analizar modelos, así como comunicar resultados. Como parte de la evaluación de los proyectos, los grupos elaboran un informe en formato video (en adelante informes-video) en el que presentan la problemática abordada y el recorrido seguido.

El presente trabajo tiene como objetivo analizar los informes-video elaborados por estudiantes en el marco de una propuesta de aprendizaje con enfoque STEAM centrada en problemáticas agropecuarias, a fin de identificar logros y desafíos que permitan discutir los aportes de esta modalidad para la enseñanza de la matemática en la FCA-UNC.

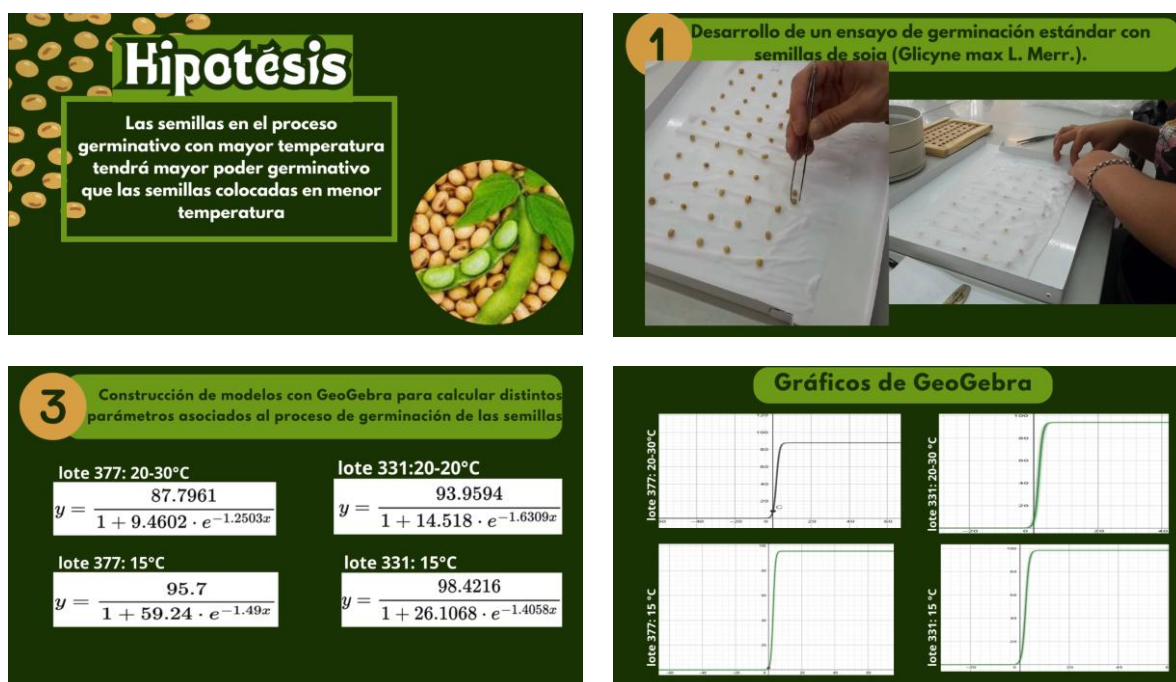
Descripción de la experiencia

Se diseñaron siete proyectos centrados en la construcción y aplicación de modelos matemáticos en situaciones concretas de las Ciencias Agropecuarias. Los proyectos fueron cargados en el aula virtual de la asignatura, acompañados de un instructivo que detallaba las pautas generales, la modalidad de trabajo y de entrega, los criterios de evaluación, así como herramientas útiles para abordar las distintas situaciones planteadas.

Las temáticas abordadas fueron: 1) Estudio de la producción de biomasa aérea forrajera en la región norte de Córdoba; 2) Monitoreo de la pérdida de bosques nativos en Córdoba mediante imágenes satelitales; 3) Estudio de la capacidad de absorción de agua en cultivares de garbanzo Kabuli; 4) Aplicación de modelos matemáticos al estudio de la fotosíntesis en cultivos de trigo en Córdoba; 5) Ensayos de germinación de semillas de soja; 6) Estudio de los efectos de diferentes aditivos en el proceso de fermentación de la levadura; y 7) Estudio de la relación entre el desarrollo de ciertos cultivos y la temperatura.

La propuesta didáctica se implementó en 2024 en todas las comisiones de trabajos prácticos de Matemática II, abarcando un total de 392 alumnos. Los estudiantes, organizados en grupos de cuatro a seis integrantes, desarrollaron los proyectos a lo largo del cuatrimestre, integrando los contenidos teóricos y prácticos del curso y utilizando recursos tecnológicos (como el software Geogebra) para el análisis y la presentación de resultados. La planificación incluyó un seguimiento de los distintos grupos, con instancias de consulta y espacios específicos dentro del horario de clases prácticas, asegurando un acompañamiento continuo en la construcción del conocimiento.

Entre los instrumentos de evaluación de los proyectos grupales, se implementó un informe-video. Cada grupo elaboró una presentación audiovisual de 3 a 5 minutos de duración, incluyendo la descripción del fenómeno estudiado, el objetivo de la investigación, una hipótesis inicial y su posterior contraste con los resultados, el análisis de datos, el modelo matemático desarrollado y las conclusiones vinculadas tanto al fenómeno como a las herramientas matemáticas empleadas. En la Figura 1 se muestran capturas de un informe-video que ejemplifican algunos apartados del trabajo realizado por un grupo en la temática 5).



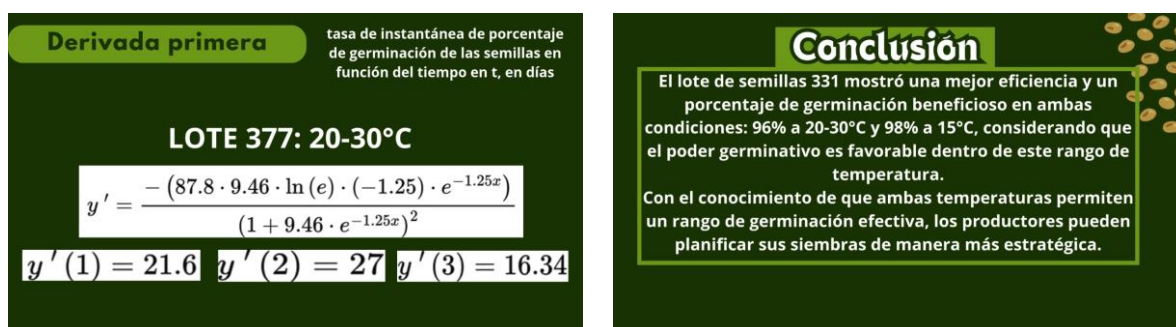


Figura 1: Capturas del informe-video de un grupo para la temática 5)

Una semana antes de la exposición final, los estudiantes debían subir sus producciones al aula virtual para compartirlas con sus compañeros y el docente. A cada grupo se le asignó un video realizado por otro grupo, con la consigna de visualizarlo, analizarlo y elaborar dos preguntas para plantear durante la instancia de exposición final. En la última semana del cursado, durante la clase práctica de cada comisión, los grupos proyectaron sus informes-video. Posteriormente, respondieron las preguntas formuladas por sus compañeros y docentes, lo que favoreció la interacción entre los estudiantes y generó un espacio de discusión y reflexión en torno a los proyectos trabajados.

Metodología

Para esta comunicación se presenta el análisis de 36 informes-video de las temáticas 1) a 5). El análisis se realizó mediante una rúbrica diseñada específicamente, que contempló criterios vinculados con: la presentación del fenómeno, el objetivo de la investigación, la hipótesis, la metodología y la toma de datos, así como con la construcción del modelo matemático (tipo de modelo, expresión algebraica y representación gráfica), la adecuación del modelo al dominio y a la situación problemática, el uso de herramientas matemáticas (derivada e integral), el análisis de la problemática con dichas herramientas y las conclusiones obtenidas a partir de la interpretación de resultados.

Cada criterio fue evaluado en tres niveles de desempeño (Logrado, Regular, No logrado), definidos a partir de descriptores que orientaron la codificación de las producciones. La unidad de análisis fue cada informe-video, considerado como producto final del trabajo grupal. Las valoraciones registradas en las rúbricas fueron sistematizadas y analizadas en Python, lo que permitió calcular frecuencias y proporciones para cada criterio.

Resultados y conclusiones

El análisis de los informes-video permitió reconocer diferentes aspectos en varios criterios de la rúbrica (Figura 2).

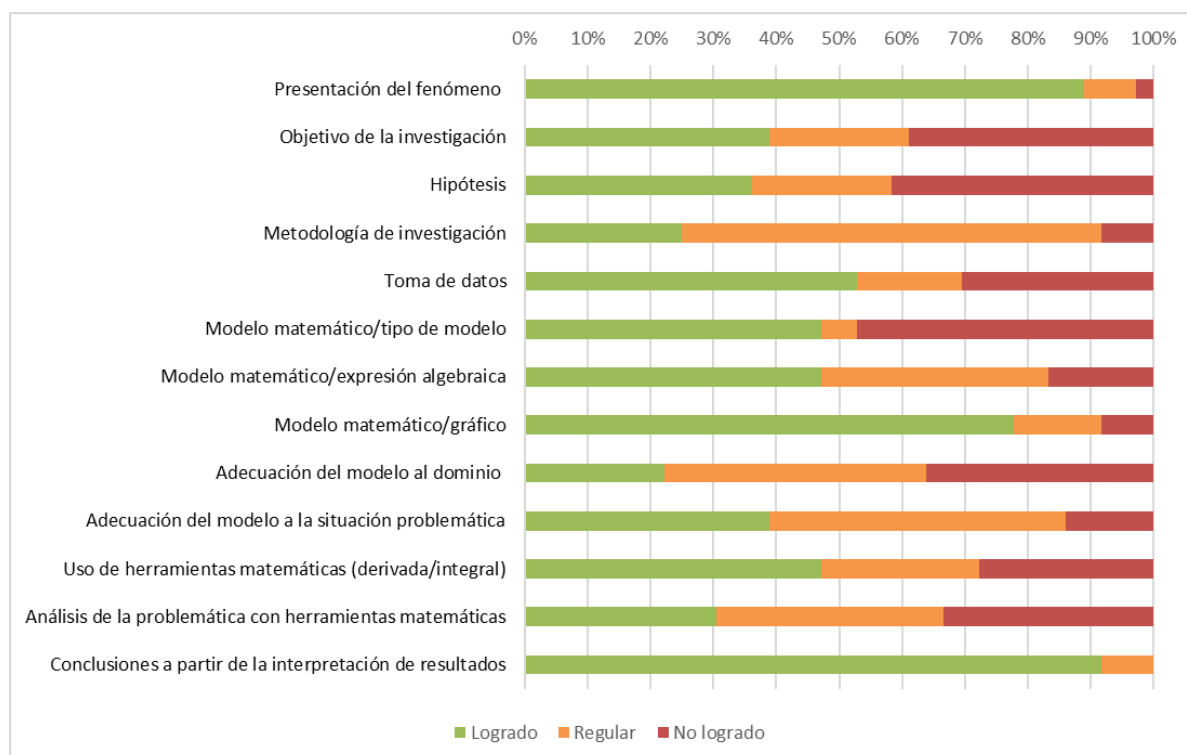


Figura 2: Distribución porcentual de niveles de desempeño por criterio en los informes-video (n=36).

La mayoría de los grupos logró presentar con claridad el fenómeno estudiado (89%), incorporó representaciones gráficas adecuadas de los modelos (78%) y expresó conclusiones bien fundamentadas (92%). Al mismo tiempo, más del 70% de los grupos (entre Logrado y Regular), describió la metodología de trabajo, presentó la expresión algebraica del modelo, adecuó dicho modelo a la situación planteada y utilizó correctamente las herramientas matemáticas. Sin embargo se observaron debilidades en la formulación de hipótesis (42% No logrado), en la adecuación de los modelos al dominio (más de la mitad de los casos en nivel Regular o No logrado) y en la interpretación de los conceptos de derivadas e integrales con desempeños en su mayoría intermedios o bajos.

Estos resultados muestran que la propuesta de aprendizaje con enfoque STEAM favoreció que los estudiantes identificaran fenómenos de interés profesional, recolectaran sus propios datos, construyeran modelos matemáticos ajustados y elaboraran conclusiones fundamentadas en la investigación realizada. No obstante, el análisis detallado evidenció dificultades en varios aspectos. En relación con las hipótesis, algunos grupos realizaron afirmaciones que se desprendían directamente de los resultados o no las retomaron al momento de concluir. La explicitación de la metodología fue en ocasiones parcial, omitiendo los procedimientos empleados en la obtención de los modelos. Si bien la mayoría de los proyectos presentó modelos que representaban la situación, no siempre se mencionó el tipo de modelo obtenido ni se

explicitó el dominio de definición en relación con el fenómeno. También se observaron ajustes con buenos valores de R^2 que, sin embargo, no se correspondían con el comportamiento real del fenómeno. Por último, aunque los cálculos con derivadas e integrales se realizaron en su mayoría de manera correcta, su interpretación se limitó a los conceptos en general y no fue utilizada para profundizar en el análisis de la problemática.

Estas dificultades orientan la necesidad de repensar la implementación futura de la propuesta. Entre las mejoras previstas para el 2025 se considera solicitar con mayor anticipación que los estudiantes lleven a las clases prácticas los datos recogidos y los modelos obtenidos, a fin de acompañar más de cerca su análisis. Asimismo, se proyecta promover discusiones focalizadas sobre la adecuación de los modelos y el sentido del uso de herramientas matemáticas, así como reformular la evaluación final mediante una instancia oral con soporte visual en la que cada grupo presente su proyecto a sus compañeros. Finalmente, se prevé diseñar y entregar a los grupos una rúbrica de autoevaluación elaborada a partir de los mismos criterios considerados en el análisis de los informes-video, de modo de favorecer la reflexión sobre el proceso y la toma de conciencia de los propios aprendizajes.

Los resultados evidencian logros significativos e identifican áreas de mejora para profundizar la integración del enfoque STEAM en la enseñanza de la matemática en la FCA-UNC.

Bibliografía

- Chonillo Sislema, L. O. (2025). La educación STEAM: ciencia, arte y tecnología al servicio del aprendizaje y el conocimiento en Latinoamérica. *Multidisciplinary Latin American Journal (MLAJ)*: 3 (2), 124-129. <https://doi.org/10.62131/MLAJ V3 N2 009>
- Galbraith, P., Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. *ZDM* 38, 143–162. <https://doi.org/10.1007/BF02655886>
- Ministerio de educación. (2024). Educación STEAM ampliada: Ciencias, Tecnologías, Ingenierías, Artes, Humanidades y Matemáticas. Desafíos y oportunidades. Córdoba, Argentina. Disponible en: <https://www.igualdadycalidadcba.gov.ar/SIPEC-CBA/SIDPyTE/publicaciones/2024/Ministerio-de-Educacion-Educacion-para-el-Desarrollo-Sostenible.pdf>
- Muller, E., & Burkhardt, H. (2007). Applications and modelling for mathematics-Overview. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI Study* (pp. 267–274). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_28
- National Research Council. (2011) Assessing 21st-century skill: Summary of a workshop. J.A. Koenig, rapporteur. Committee on the Assessment of 21st Century Skills. Board on Testing and Assessment, Division of Behavioral and Social Sciences and Education, Washington D.C.: The National Academies Press.

PENSAMIENTO PROBABILÍSTICO EN TIEMPOS DE OBSOLESCENCIA: DESAFÍOS PARA LA FORMACIÓN CIUDADANA

Fiorella Dómina, Beatriz S. Marrón, Sandra A. Hernández

Universidad Nacional del Sur (UNS)

Av. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Buenos Aires, Argentina

fired08@hotmail.com

Categoría del Trabajo: Relatos de experiencias (de enseñanza o formación)

Nivel Educativo: Universitario

Palabras claves: alfabetización estocástica, obsolescencia programada, formación universitaria, enfoque STEAM

Resumen: Esta comunicación presenta una propuesta innovadora y su correspondiente análisis, desarrollados por una estudiante avanzada del Profesorado en Matemática en el marco de una beca de estímulo a las vocaciones científicas EVC-CIN cuyo trabajo se centra en el estudio de la obsolescencia programada, la tecnología y el ambiente, abordado desde una perspectiva estadística con enfoque STEAM. La intervención pedagógica tuvo lugar en la asignatura “Probabilidad, variable aleatoria y estadística”, destinada a estudiantes de segundo año de Ingeniería Electrónica e Ingeniería Electricista. Desde esta perspectiva, se impulsa una alfabetización estadística orientada a la responsabilidad ciudadana, que permita comprender la incertidumbre y valorar los datos estadísticos como insumos clave para decisiones éticas en relación con el entorno social y ambiental.

Introducción

Los grandes avances tecnológicos de las últimas décadas han permitido la evolución de diferentes maquinarias y productos de uso cotidiano. En particular, la rapidez con la que aparecen nuevos productos electrónicos en el mercado genera, a la par, una necesidad de consumo masivo y un recambio constante de “lo viejo”. Muchas veces, este reemplazo se ve

motivado por el deterioro de los artefactos por el tiempo de uso, y la necesidad de adquirir uno nuevo que cumpla las funciones de manera adecuada.

La obsolescencia programada puede entenderse como una estrategia empresarial mediante la cual los bienes de consumo son diseñados deliberadamente para tener una vida útil limitada, de modo que, tras un período de tiempo preestablecido, resulten inservibles, obsoletos o poco funcionales, obligando al consumidor a reemplazarlos por nuevos productos. Esta práctica responde a lógicas propias del capitalismo contemporáneo, en tanto incentiva el consumo constante, incrementa la rotación en el mercado y genera, como consecuencia, graves impactos económicos, sociales y ambientales (Polanco Sagastume, 2023).

Dentro de los programas globales que promueven acciones tendientes a lograr un balance entre los hábitos del ser humano y su efecto sobre el ambiente, se encuentran los 17 Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS, 2015) propuestos por Naciones Unidas en la Agenda 2030 (AGNU, 2015). En particular, en el contexto de esta investigación, se consideran importante mencionar el ODS 4, concerniente a la educación de calidad, cuya meta 4.7 específicamente sugiere “de aquí a 2030, asegurar que todos los alumnos adquieran los conocimientos teóricos y prácticos necesarios para promover el desarrollo sostenible...” y el ODS 12 referido a la producción y consumo responsable.

En particular, el ODS 12 destaca la importancia de educar y concientizar no solo a quienes consumen, sino también a quienes producen, distribuyen y comercializan bienes, fomentando decisiones sostenibles en cada etapa de la cadena de suministro.

Pensando a los estudiantes de Ingeniería Eléctrica y Electrónica, no solo como consumidores sino como posibles referentes en industrias o comercios involucrados en actividades tecnológicas, se propone abordar la problemática teniendo en consideración la importancia de la alfabetización estocástica en el desarrollo del pensamiento crítico en relación con el consumo y desecho tecnológico.

Frente a esto, proponemos abordar la problemática desde la estadística, llevando al aula una serie de datos sobre distintos electrodomésticos, su durabilidad, fallos reportados y otra información, con los cuales los estudiantes puedan relacionar sus propias experiencias.

Siguiendo lo planteado por Zapata–Cardona (2018), consideramos fundamental que la enseñanza de la estadística se articule desde contextos que demandan compromiso social y que vinculen el conocimiento académico con la realidad de los estudiantes, favoreciendo tanto el desarrollo de habilidades técnicas como la formación de una conciencia social crítica que permita el uso significativo de herramientas estadísticas en la vida cotidiana.

Además, tal y como exponen Vásquez y Alonso (2020, p. 127).

La Educación Estadística en particular, constituye un conocimiento crucial que todo ciudadano puede utilizar para desarrollar una mejor sociedad, tanto en lo económico, social y medioambiental. Pero es necesario orientar su enseñanza hacia el desarrollo de competencias clave de sostenibilidad que, por su naturaleza, conlleva a la resolución de problemas y hacen que el análisis e interpretación de datos tenga mucho que aportar cuando se vinculan con los ODS...

Hacer frente a los grandes cambios tecnológicos, ambientales y sociales requiere de docentes que se sientan capacitados ante el reto de contribuir con el desarrollo de capacidades cognitivas y socioemocionales. El enfoque educativo STEAM, acrónimo de los términos en inglés Science, Technology, Engineering, Art and Mathematics, es un enfoque interdisciplinar y aplicado, que propone integrar diferentes áreas del conocimiento incorporando contextos y situaciones de la vida cotidiana que permitan explicitar los vínculos entre las disciplinas STEAM. Los procesos de enseñanza y aprendizaje se centran en el estudiantado invitándolo a poner en práctica la innovación, la creatividad, el pensamiento crítico, la autonomía, el trabajo colaborativo y la capacidad de afrontar situaciones nuevas (López Simó, Couso Lagarón & Simarro Rodríguez, 2020).

En este contexto, el desafío docente involucra la selección y el diseño de situaciones problemáticas reales considerando los contenidos (conceptuales, procedimentales y actitudinales).

Consideramos importante mencionar, antes de profundizar en la experiencia realizada, que esta constituye una investigación educativa en tanto implica un diseño metodológico explícito, la recolección y el análisis sistemático de datos (producciones estudiantiles, análisis estadísticos y encuestas), y la obtención de resultados que permiten comprender cómo los estudiantes interpretan y utilizan información estadística en un contexto socialmente relevante. Además, los resultados de esta propuesta, generan conocimiento transferible y aportan evidencia al campo de la Educación Estadística.

Metodología

Presentamos la consigna de elaboración de un trabajo final integrador en el marco de la materia Probabilidad, Estadística y Variable Aleatoria, la cual cuenta con un total de 18 estudiantes inscriptos, pertenecientes a las carreras de Ingeniería Electrónica e Ingeniería Electricista. El mismo tuvo como eje central el análisis de datos teniendo en cuenta la obsolescencia programada: pedimos a los estudiantes que investiguen sobre este concepto y

las implicancias del mismo en diferentes niveles; y que, a partir de un archivo excel con datos sobre diferentes dispositivos electrónicos (e.g., teléfonos inteligentes, laptops, televisores) realicen un análisis descriptivo de las variables de interés, representen gráficamente las distribuciones, y respondan a preguntas teóricas relacionadas a contenidos desarrollados previamente en clase. Por último se les pidió reflexionar sobre la veracidad de las horas de uso declaradas por los fabricantes, comparadas con las expuestas por los usuarios con el propósito de generar criticidad a partir de lo analizado.

Luego de la entrega de los trabajos se realizó una encuesta sobre el desarrollo del mismo para conocer las opiniones de los estudiantes respecto del trabajo realizado.

Como objetivos de esta propuesta podemos mencionar algunos carácter estadístico como analizar los datos mediante herramientas estadísticas, describir y comparar las distribuciones de las variables en cada tipo de dispositivo, realizar pruebas de hipótesis para confirmar o refutar las afirmaciones de los fabricantes respecto a la durabilidad de sus productos, identificar valores anómalos en los datos recopilados que pueden influir en la interpretación de los resultados, y utilizar la herramienta Infostat para la interpretación de datos y la creación de gráficos. Sin embargo, también tuvimos en cuenta otros como reconocer el impacto de la obsolescencia programada en la vida cotidiana y el desarrollo de un pensamiento crítico que promueva los principios de sostenibilidad y el consumo responsable.

Resultados y Discusión

Se presentaron las siguientes consignas para realizar un Trabajo Integrador final, con la posibilidad de ser realizado de forma individual o en parejas:

- Consigna n° 1: Realiza una breve investigación sobre qué es la obsolescencia programada y que factores involucra.
- Consigna n° 2: Realiza un análisis descriptivo de las variables que consideres de interés para el problema. Representa gráficamente las distribuciones de estas variables ¿Se podría suponer que alguna tiene distribución gaussiana? ¿Hay datos que pueden ser considerados anómalos? Justifica tu respuesta.
- Consigna n° 3: ¿Sería adecuado creer en lo que declara un fabricante respecto de las Horas de Uso Esperadas del aparato o dispositivo electrónico analizado? Interpreta los resultados y analiza si los datos obtenidos respaldan o contradicen las declaraciones de durabilidad.

De un total de 12 trabajos entregados, 6 fueron realizados en parejas.

En respuesta a la primera consigna, la mayoría de los estudiantes asociaron a la obsolescencia programada con la corta duración de los productos, intencionalmente establecida por parte de los fabricantes. Además, mencionan factores ambientales, como la alta contaminación generada por los desechos tecnológicos y por la extracción de recursos; sociales, debido al cambio en los hábitos de consumo provocada por la constante actualización de modelos en los dispositivos electrónicos; económicos, en relación a los altos precios de reparación de productos junto con la necesidad de ingresos constantes desde las empresas; y técnicos, asociados a la mala calidad en los componentes de fabricación o componentes de reemplazo difícil o imposible.

En cuanto al segundo punto, los alumnos pudieron realizar diferentes análisis y gráficos a partir de los datos otorgados, con ayuda de la herramienta Infostat. El electrodoméstico más elegido para analizar fue el televisor, seguido por los teléfonos inteligentes; y las variables más analizadas fueron las horas de uso y la calificación otorgada por los usuarios, aunque muchos estudiantes analizaron también los fallos y los costos de reparación.

Los gráficos más utilizados fueron histogramas y diagramas de cajas, aunque también se presentaron algunos diagramas de puntos, gráficos de barras e incluso de regresión lineal. Este último fue presentado por un grupo de estudiantes que comparó las horas de uso con la calificación de los usuarios, tanto para teléfonos inteligentes como para televisores, pero se concluyó que no había relación entre ellas en ninguno de los dos casos. A raíz de esto, remarcan la importancia de fomentar la educación al consumidor respecto a las prácticas de obsolescencia programada, ya que la desinformación de los mismos, afirman, contribuye directamente a perpetuar esta práctica y a brindarle respaldo a los fabricantes.

Los diagramas de cajas asociados a las horas de uso de teléfonos celulares y de televisores, también fueron presentados en varios informes. A partir de ellos, algunos estudiantes señalaron la media, mediana, valor máximo, valor mínimo y los percentiles P25 y P75 asociados a los cuartiles Q25 y Q75. También utilizaron la medida de dispersión SRIC (Semi Rango Inter Cuartílico) para evidenciar aquellos datos anómalos mediante el cálculo de los límites superior e inferior asociados a los percentiles mencionados. Finalmente, concluyeron que tanto en el caso de los teléfonos inteligentes como de los televisores no se presentaban datos anómalos, ya que los valores máximos y mínimos se encontraban dentro de los límites considerados en cada caso.

En función de los histogramas asociados a las horas de uso de teléfonos inteligentes y televisores, respectivamente, los estudiantes concluyeron que ambas siguen una distribución

normal, aunque con ciertas particularidades tales como: muestras de sesgo debido a acumulación de datos y deformación a causa de la repetición de datos.

Para responder a la última consigna, los estudiantes utilizaron la prueba de hipótesis, estableciendo como H_0 que la duración media real μ del electrodoméstico seleccionado es igual o mayor a las horas declaradas por el fabricante, y H_1 que la duración media real μ del electrodoméstico seleccionado es menor a la declarada por el fabricante.

También, realizaron análisis de normalidad de los datos Shapiro-Wilks y análisis gráfico con Q-Q Plot además de la prueba de hipótesis para la media poblacional.

A modo de conclusión

A partir del análisis de los datos y de las conclusiones realizadas, los estudiantes destacan la importancia de reconocer la presencia de la obsolescencia programada en los productos electrónicos de uso diario, así como la responsabilidad de los fabricantes. Asumiendo también su responsabilidad como futuros profesionales con incumbencias en áreas tecnológicas. Si bien sólo el 44% de la clase respondió la encuesta final, la experiencia se considera positiva tanto desde el punto de vista de la docente en formación como de la docente responsable de la asignatura. El 87.5% de los encuestados respondió que logró desarrollar los contenidos de Estadística Descriptiva de forma significativa, pudiendo trabajar los contenidos conceptuales de prueba de hipótesis de manera relevante. El uso de Infostat fue descrito por los estudiantes como un desafío al momento de utilizarlo.

Referencias bibliográficas

- Asamblea General de las Naciones Unidas. (25 de septiembre de 2015). Transformar nuestro mundo: la Agenda 2030 para el Desarrollo Sostenible. Disponible en:
https://unctad.org/system/files/official-document/ares70d1_es.pdf
- González Lankenau, C. & Ortega Rubí, M. (2024) La Acumulación de Capital Impulsada desde el Consumo y la Obsolescencia Programada, Análisis desde la Perspectiva del Desarrollo Sustentable, *Sostenibilidad: económica, social y ambiental*, 6, 47-60.
- Objetivos de Desarrollo Sostenible - ODS (2015). ONU, Nueva York. Disponible en:
<https://www.un.org/sustainabledevelopment/es/objetivos-de-desarrollo-sostenible/1>.
- López Simó, V., Couso Lagarón, D., & Simarro Rodríguez, C. (2020). Educación STEM en y para el mundo digital: El papel de las herramientas digitales en el desempeño de prácticas científicas, ingenieriles y matemáticas. *Revista de Educación a Distancia (RED)*, 20(62). <https://doi.org/10.6018/red.410011>

- Polanco Sagastume, M. L. (2023). La obsolescencia programada. Un estudio sobre sus características en el capitalismo actual, sus repercusiones en el ambiente y las iniciativas adoptadas para evitarla. *Revista Economía*, 237, 46-81
- Vásquez, C., & García-Alonso, I. (2020). La educación estadística para el desarrollo sostenible en la formación del profesorado.. *Revista de Currículum y formación de profesorado*, 24(3), 125-147.
- Zapata-Cardona, L. (2018). Enseñanza de la estadística desde una perspectiva crítica. *Yupana*, (10), 30–41. <https://doi.org/10.14409/yu.v0i10.7695>

LA VARIACIÓN UNIFORME EN EL REGISTRO CARTESIANO: ASUNTOS EMERGENTES DE UN PROCESO DE PLANIFICACIÓN COLABORATIVA

Enrique Di Rico^a, Nicolas Elias Daniel Igolnikov^b, Mariana Matovich^a

^aUniversidad Pedagógica Nacional, Departamento de Ciencia y Tecnología. ^bUniversidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Centro de Formación e Investigación en Enseñanza de las Ciencias (CEFIEC)
nicolas.igolnikov@unipe.edu.ar

Categoría del Trabajo: Relatos de experiencias

Nivel Educativo: Nivel Secundario y Nivel Superior (Formación Docente)

Palabras claves: Investigación Colaborativa, Variación Uniforme, Registros de Representación, Gráfico Cartesiano.

Resumen: En este trabajo se presentan avances de un proyecto de investigación colaborativa del Grupo Lunes, conformado por docentes de distintos niveles y trayectorias, en torno a la enseñanza de las funciones lineales. El eje de análisis de este trabajo se sitúa en el proceso de planificación colectiva, en torno a la decisión novedosa de priorizar el registro gráfico-cartesiano antes de introducir la representación algebraica de estas funciones. Esta decisión permitió problematizar el rol de los gráficos cartesianos como generalización de correspondencias y diseñar actividades que desplazan el foco desde los cálculos puntuales hacia el estudio de la variación en el registro gráfico cartesiano. El estudio que realizamos en este trabajo pone en relieve las potencialidades de la planificación colaborativa como espacio de construcción de lenguaje común, toma de decisiones didáctico-matemáticas y generación de nuevas zonas de indagación. La emergencia de preguntas sobre cómo apoyar procesos de generalización hacia lo simbólico desde el trabajo gráfico orienta la etapa actual de la investigación.

1. Introducción

La presente comunicación se enmarca en un proyecto de investigación colaborativa¹ orientado a explorar posibilidades y límites del trabajo algebraico en el contexto de enseñanza de las funciones lineales. El grupo de investigación Grupo Lunes (de ahora en más, GL) está compuesto por profesorxs de nivel secundario y superior que se reúne quincenalmente. Un subgrupo de este, el Grupo Jueves (de ahora en más, GJ), se reúne con frecuencia semanal, con tareas diferenciadas², entre ellas la de realizar una primera formulación de cada proyecto de investigación, que es dialogada en el GL.

El proyecto actual tiene como preguntas de investigación, entre otras: ¿qué condiciones favorecen la articulación entre la fórmula y otras representaciones (gráfico cartesiano, tablas numéricas, lenguaje natural)? ¿Cómo se vinculan en el aula el gráfico, la(s) fórmula(s) y el contexto que describe la función lineal? Enmarcado en estas preguntas, el proyecto se desarrolla a lo largo de varias etapas, inspiradas en la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1989).

En esta comunicación se hará foco en el proceso de planificación colaborativa. En la sección 2 se dará cuenta del entramado de interacciones y decisiones que posibilitaron la emergencia de

¹ Programación UNIPE (2024-2026) “Posibilidades y límites del trabajo algebraico en el contexto de enseñanza de las funciones lineales. Investigación colaborativa de diseño y análisis”.

² Agradecemos a nuestrxs compañerxs Valeria Borsani, Mara Cedrón, Juan Pablo Luna, Cecilia Pineda y Carmen Sessa por el tiempo dedicado a discutir y profundizar este trabajo.

asuntos matemáticos didácticos durante el proceso de planificación colaborativa. En la sección 3 se desarrollan algunas nuevas preguntas y asuntos de investigación que se habilitaron a partir de la elección de explorar un territorio desconocido para todo el grupo. Se dan elementos que aportan al análisis a priori de dos de los problemas diseñados. La sección 4, finalmente, se dedica a las conclusiones y perspectivas de la investigación.

2. Contextualización

En el inicio del proyecto se incorporaron al GL un número considerable de profesorxs de nivel secundario de distintas zonas del país, configurando un grupo inicial de trabajo numeroso y heterogéneo.

La primera etapa del trabajo de investigación consistió en un estudio colectivo de la propuesta de enseñanza-aprendizaje sobre función lineal descripta y analizada en Borsani y Cedrón (2019). A lo largo de cuatro meses de trabajo, se buscó realizar una lectura reflexiva y profunda, que permitiera indagar en ella, incluyendo como asuntos: el tipo de vínculo promovido entre diferentes Registros de Representación Semiótica (Duval, 1995), la actividad matemática propuesta, el rol anticipado de las interacciones en el aula, entre otros. La experiencia de análisis colectivo del documento permitió, además, la conformación de una dinámica que favoreció la elaboración de acuerdos y consensos y, más en general, de un lenguaje común (Cambriglia y Di Rico, 2023; Joffredo-Le Brun et al., 2018) en el que se fueron expresando las ideas de todxs lxs participantes.

En la propuesta de Borsani y Cedrón (2019) se despliega un trabajo inicial que vincula un contexto extramatemático con el registro numérico como soporte para el despliegue de un trabajo algebraico. La construcción de diferentes fórmulas es el resultado de simbolizar procesos generales de cálculo. Con posterioridad se aborda la representación de las funciones en el registro de gráficos cartesianos. En la formulación original del proyecto de investigación, las preguntas se alojaban bajo esta lógica.

La siguiente etapa, centrada en el proceso de planificación, fue abordada colaborativamente a partir de consensos que siguieron actualizándose a lo largo de las interacciones. A la hora de tomar las primeras decisiones en torno al tipo de entrada a proponer en el aula, algunxs profesorxs del GL -que no habían participado en la elaboración del proyecto- llevaron al espacio colectivo la inquietud por probar una entrada diferente: luego de estudiar algunos contextos de variación uniforme numéricamente, enfrentar a lxs estudiantes con la representación cartesiana de las funciones lineales, como paso previo al abordaje del lenguaje algebraico para expresar una fórmula posible. Lxs profesorxs, ubicados en una posición netamente investigativa, plasmaron su deseo de explorar con otrxs un camino diferente al del documento que acabábamos de estudiar y al de sus prácticas habituales.

Con estas inquietudes planteadas en el GL, el GJ comenzó a estudiar diferentes alternativas para el abordaje del registro gráfico y las propuso en las reuniones grupales para discutir las y profundizar la exploración de esta entrada. En este interjuego entre el trabajo de GJ y GL, se abrieron nuevas zonas de indagación didáctico-matemática relativas a:

- Los procesos de aprendizaje tanto de la lectura como de la producción de gráficos cartesianos.
- El diseño de actividades que permitan poner en juego la variación uniforme en la producción y la lectura de representaciones -parciales y globales- en el registro gráfico.
- La generalidad que comporta el gráfico cartesiano de una función.
- El vínculo entre los asuntos anteriores y la posterior construcción de posibles fórmulas para representar la función.

Estos asuntos, que presentamos aquí separados, emergieron entramados en el proceso de planificación colectiva que llevamos adelante como grupo. En el apartado siguiente nos apoyamos en decisiones que tomamos en el diseño de actividades para desarrollar algunas consideraciones en torno a las tres primeras zonas. En el apartado de conclusiones y discusiones, esbozaremos algunas cuestiones relativas a la última, que es actualmente un terreno de elaboración por parte del GL.

3. Algunos emergentes del estudio colaborativo en la instancia de planificación

Como ya mencionamos, en la propuesta de enseñanza que estamos diseñando -y que queremos estudiar- exploramos una entrada a las funciones lineales apoyada en contextos de variación uniforme y en un temprano abordaje de la representación en el registro gráfico-cartesiano, posponiendo el trabajo en el registro algebraico. Realizamos una búsqueda inicial en diferentes libros de texto de referencia utilizados en escuelas de nivel secundario en la que no encontramos antecedentes de una entrada de estas características. Esta decisión novedosa para el grupo nos enfrentó a un escenario incierto sobre el que no habíamos reflexionado con anterioridad. En este marco, abordamos colectivamente la exploración de dos alternativas: comenzar, o bien con tareas que requirieran producir algunos puntos del gráfico a partir de otros dados, o bien con la tarea de elegir entre varios gráficos aquel que en alguna medida pudiera representar la situación dada. Buscamos que ambas alternativas sostuvieran un trabajo con apoyo en relaciones referidas a la variación uniforme elaboradas a propósito de un contexto extramatemático dado.

En el proceso de planificación colectiva, la discusión en torno a estas alternativas dio lugar a la emergencia de algunos asuntos de investigación de carácter didáctico-matemático que presentamos a continuación.

Condiciones sobre los problemas para que el trabajo de lxs estudiantes permaneciera en el registro de representación gráfico-cartesiano

La decisión de posponer la incorporación del registro algebraico nos llevó a sostener problemas en los que el trabajo a proponer en el registro gráfico permitiera analizar de un modo más global el comportamiento de la función, poniendo un énfasis menor en los valores particulares dados por el problema. Con esto en mente, se diseñó un problema en un contexto extramatemático³ donde la variable independiente discreta se relaciona linealmente con otra, y se representan dos puntos que cumplen esta relación en un sistema de ejes cartesianos sin escala numérica en el eje y (Figura 1). El enunciado del problema consta de dos ítems:

- a-. Si se le agregan 10 vasitos a la torre de 14 vasitos, ¿en dónde ubicarías un punto que registre la altura de la nueva torre de 24 vasitos?
- b-. Ubiquen dos puntos que registren las alturas de dos torres que tengan más de 4 y menos de 14 vasitos.

Tabla 1: Ítems del problema dos de la secuencia diseñada.

³ En el problema anterior a este, el contexto planteado también involucraba apilar vasitos formando torres; los datos eran dados en una tabla y las tareas estaban asociadas al cálculo de la altura.

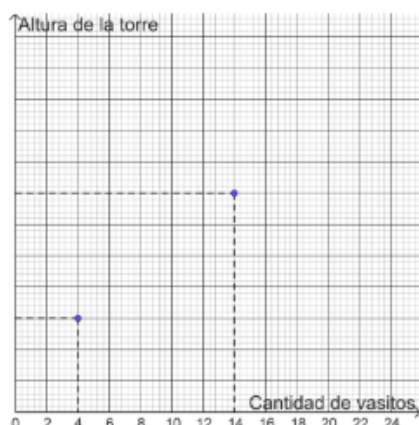


Figura 1: Representación de dos puntos que cumplen la relación dada en el enunciado del problema.

Un punto que se pide es el asociado a $x=24$ y anticipamos que para producirlo los estudiantes pueden poner en juego la variación de la altura correspondiente a una variación de 10 unidades en el eje x , que se puede leer a partir de los puntos dados. En el aula se podría hacer referencia a esta variación en términos de un *escalón*, representado por un segmento horizontal y uno vertical (Figura 2, izquierda). Después, se solicita ubicar puntos que cumplan la relación y se encuentren entre los puntos ya dados, y en ese caso, la búsqueda de variaciones equivalentes puede apoyarse en la consideración de escalones más pequeños (Figura 2, derecha) que guarden la misma proporción que el dado por los dos puntos dato.

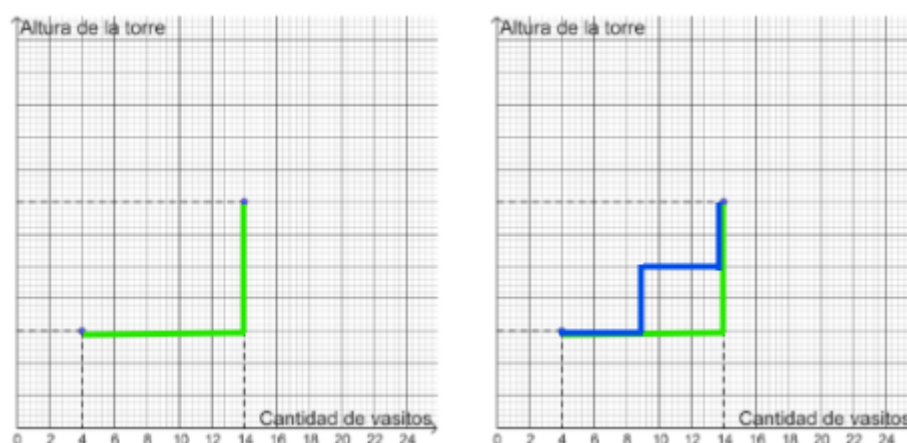


Figura 2: escalón representado mediante dos segmentos (izq) y un escalón más pequeño equivalente al original (der).

Entendemos que las argumentaciones que pueden sostenerse para la ubicación de estos nuevos puntos se encontrarán necesariamente vinculadas con la relación entre variables dada en el contexto. Este vínculo permitiría analizar las producciones de los estudiantes de puntos comprendidos entre los dados y descartar las posibles producciones erróneas.

El proceso de producción de puntos, entendemos, se acompañaría de acciones sobre la cuadrícula: elegir un punto dado o ya producido que funcione como apoyatura, desplazarse horizontalmente a partir de este punto -lo cual supone decidir una cantidad de desplazamiento-, y, en función de ello, decidir cuánto hacerlo en vertical, teniendo como referencia las relaciones de variación dadas por el contexto. Estas acciones espaciales determinan puntos alineados, lo que podría dar buenas condiciones para concluir colectivamente que cualquier otro punto que cumpla la relación entre las variables estará alineado con los demás.

La decisión de omitir la escala en el eje y impediría el uso de los datos numéricos del gráfico cartesiano para construir una tabla de valores desde la cual obtener nuevos pares que luego sean ubicados en el gráfico. De esta manera, las relaciones de variación uniforme que se estudiaron en términos numéricos en el problema anterior planteado en el mismo tipo de contexto extramatemático (ver nota al pie 2) se pondrían en vínculo con aspectos intrínsecos de su representación gráfica.

Desde nuestro punto de vista, la decisión tomada permitiría que la idea de la alineación de los puntos que representan gráficamente una relación de variación uniforme— pueda construirse de manera un tanto independiente de los valores numéricos.

La potencia de vincular la tarea de elección entre gráficos con la producción de puntos que cumplen una relación de variación uniforme

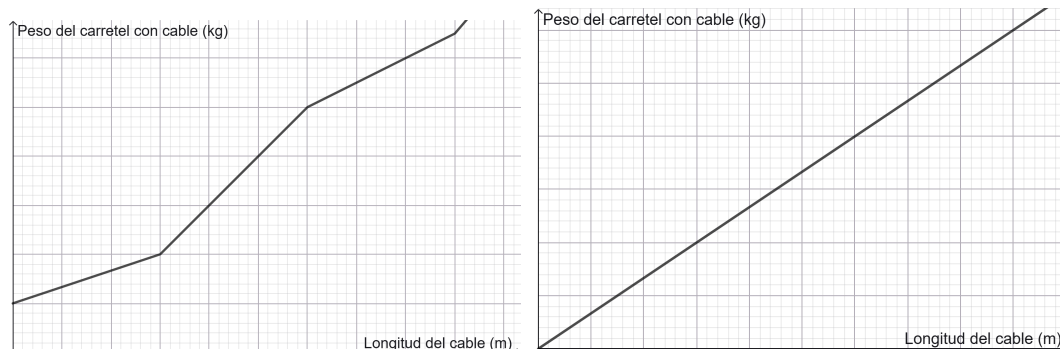
Durante la planificación nos preguntamos cómo abordar una caracterización de todos los puntos de un gráfico que representa una determinada relación de variación uniforme dada en un contexto. Entendíamos que el proceso de producción de puntos alojado en el problema descrito en el apartado anterior podría ser una apoyatura para abordar esta caracterización. Elegimos ponerla en juego en un nuevo contexto en el que, a diferencia del problema anterior, ambas variables fueran continuas. Este escenario trae nuevas complejidades para el trabajo matemático de lxs estudiantes: no existe un escalón que permita generar todos los puntos, y entre dos puntos dados del gráfico hay infinitos que cumplen la relación. Estos dos asuntos están en vínculo con el hecho de que el gráfico cartesiano de una función lineal de variable continua es una recta en tanto objeto geométrico.

Con estas complejidades en mente, optamos por proponer a lxs estudiantes un problema en contexto, con un primer grupo de tareas en el registro numérico que permitiera poner en juego la variación uniforme, para luego presentar diferentes gráficos con la tarea de elegir cuál o cuáles podrían representar la situación abordada. Esta última tarea permite poner el foco en la diferencia cualitativa entre distintos tipos de variación. El enunciado del problema consta de seis ítems, el último de los cuales se subdivide en tres subítems diseñados para alojar momentos de trabajo diferenciados en el aula. Presentamos a continuación el enunciado completo, con excepción de los gráficos del último subítem, para favorecer su lectura.

En una compañía de telefonía usan para las instalaciones un cable que guardan enroscado en carreteles de madera. Los carreteles de madera son todos iguales. La compañía prepara carreteles con distintas longitudes de cable y pesa cada carretel con cable. Esa información se pone en etiquetas en cada carretel. La siguiente tabla muestra los datos de algunas

Longitud de cable (en metros)	Peso del carretel con cable (en kg)
20	11
50	17
90	25
100	
120	31
160	39

1. Completen la tabla para un carretel con 100 metros de cable.
2. ¿Es cierto que si un carretel tiene 80 metros de cable el peso será de 21 kg?
3. Calculen el peso de un carretel con 95 metros de cable.
4. Agreguen una fila más en la tabla para una cantidad de cable menor que 20 m.
5. En un carretel se gastaron 15 mts de cable, ¿cuánto disminuyó su peso?
- 6a. ¿Qué características tienen cada uno de estos gráficos? Escriban las diferencias que encuentran entre los dos.
- 6b. Para cada gráfico, decidan si podrían ser o no el gráfico del peso del carretel en función de la longitud del cable. Y justifiquen su respuesta.



- 6c. Para cada uno de estos tres gráficos⁴, analicen si podría ser o no el gráfico del peso del carretel en función de la longitud del cable. Y escriban una justificación de su respuesta para cada gráfico.

Tabla 2: Enunciado completo del problema 3.

Vemos necesaria la identificación de algunos puntos de cada gráfico para habilitar la reinversión de las estrategias desarrolladas en el problema anterior en el proceso de análisis del tipo de variación que requiere este nuevo problema. Ahora bien, anticipamos la dificultad de lxs estudiantes para identificar puntos dentro de un gráfico continuo dado, que puede ser visto como una totalidad; entendemos que el gráfico poligonal incluido entre las opciones, puede fomentar la identificación visual del punto donde cambia la inclinación gráfico (ver Tabla 2).

Para el resto de los gráficos, queda como tarea para lxs estudiantes la elección de puntos para comparar las variaciones en distintos tramos del gráfico. Una vez analizada la pertinencia de cada gráfico como representación de la función, se propone a discusión un gráfico discreto con puntos alineados. Por un lado, con la intención de identificarlo como una representación posible, aunque parcial, de la situación de variable continua; y por otro, sostenerlo como un gráfico completo cuando el contexto involucra una variable discreta, como en el caso del problema anterior.

4. Conclusiones/Discusiones

El punto de partida tanto de este escrito como de la perspectiva desde la cual enfocamos el trabajo colaborativo es que las necesidades, deseos e intenciones de lxs docentes participantes son insoslayables (Acosta et al, 2025; Grupo Lunes, 2022). Esta posición dio lugar a decisiones y nuevas preguntas durante el proceso de planificación colaborativa, lo que requirió cambiar de posición y de rumbo. Hemos comunicado las razones por las cuales tomamos ciertas decisiones sobre los problemas propuestos con el objetivo de que lxs estudiantes aborden el estudio de la

⁴ No incluidos.

variación uniforme en términos del registro de representación cartesiano, postergando el trabajo en el registro algebraico. Analizamos el aporte del proceso de producción de puntos del gráfico para la conceptualización del carácter alineado de los mismos y su vínculo con la tarea de elegir gráficos cartesianos de funciones lineales. Finalmente, mencionamos cómo esta última tarea habilita la discusión sobre la representación gráfica de funciones lineales de variables continuas y discretas.

En la formulación original del proyecto de investigación asumimos la tarea de considerar procesos de generalización de los cálculos de la imagen de una función en valores particulares, para después ponerlo en juego en la construcción de una fórmula que lo plasme. Ahora, al decidir abordar la representación gráfica con anterioridad, emerge como asunto que el gráfico mismo es una generalización de la correspondencia entre las variables involucradas.

En el presente nos encontramos en una etapa de implementación de los cuatro primeros problemas diseñados. Los registros de las clases nos permitirán analizar la relación entre las decisiones que tomamos, las producciones de los estudiantes y la gestión docente en el aula, con la perspectiva de: enriquecer y profundizar nuestra comprensión de la secuencia, y comprender el papel del registro gráfico en la construcción de una generalidad, teniendo como perspectiva el abordaje del registro algebraico. Nuevas preguntas surgen -y se proyectan como desafío para un futuro cercano- en torno al vínculo entre los problemas ya diseñados, la formulación de procesos generales de cálculo y la construcción de fórmulas que los plasmen.

5. Bibliografía

Acosta, L., Andrés, M., Borsani, V., Brunati, J., Cambriglia, V., Di Rico, E., Hortas, F., Igonnikov, N., Luna, J. P., Matovich, M., Pineda, C. & Sessa, C. (2025). La investigación colaborativa del Grupo Lunes. El rol de las producciones de los estudiantes en las diferentes etapas de nuestro trabajo. *Análisis de las Prácticas*, (4), 1-19. <https://portalrevistas.unipe.edu.ar/index.php/analisispracticas/article/view/399>

Artigue, M. (1989). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des mathématiques*, vol 9/3, 281- 308. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Borsani, V., & Cedrón, M. (2019). Las funciones lineales: una oportunidad para potenciar el vínculo entre lo funcional y lo algebraico. En B. Duarte (Coord.), *Las funciones, el álgebra escolar y la geometría en entornos tecnológicos: Asuntos didácticos para pensar la enseñanza* (pp. 97-139). Universidad Pedagógica Nacional; Gobierno de La Pampa; Consejo Federal de Inversiones.

Cambriglia, V., & Di Rico, E. (2023). La complejidad de un dispositivo de investigación colaborativa: sistema de recursos, nuevas tareas y tipos de conocimientos en juego. *Revista Análisis de las Prácticas*, (2). Recuperado de <https://portalrevistas.unipe.edu.ar/index.php/analisispracticas/article/view/195>

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Berna: Peter Lang.

Grupo Lunes (2022). Una entrada al álgebra en vínculo con la aritmética. *Revista Urania*. 12, 8-20. <https://drive.google.com/file/d/11IZKDOR9tKsLb6cJNm8Y9tAU1GvLYfKB/view>

Joffredo-Le Brun, S., Morellato, M., Sensevy, G., & Quilio, S. (2018). Cooperative engineering as a joint action. *European Educational Research Journal*, 17(1), pp. 187-208.

EXPERIENCIA DE AULA RELACIONADA CON EL PROGRAMA DE ERLANGEN EN FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICA

Ferrero, María Martha⁽¹⁾; Alsina, Jordi^{(1),(2)} y Varela, Bárbara⁽¹⁾

(1) Universidad Nacional del Comahue. Sede Bariloche (2) Instituto Balseiro - UNCuyo

marthaferrero@gmail.com jordi.alsina@ib.edu.ar

Categoría del Trabajo: Relatos de experiencias

Nivel Educativo: Universitario

Palabras clave: transformaciones - determinantes - polígonos - geometrías -

Resumen

Presentamos una experiencia de formación de profesores desarrollada en la cátedra Epistemología e Historia de la Matemática, del Profesorado Universitario en Matemática (UNCo – CRUB). En el transcurso de la clase se implementó una actividad con el objetivo de que se revelen conexiones entre Álgebra y Geometría, siguiendo al Programa de Erlangen propuesto por el matemático Félix Klein. A partir del trabajo con software de geometría dinámica, se propuso al grupo de estudiantes explorar la relación entre el determinante de una matriz y la variación de área de polígonos bajo transformaciones lineales. Se comparten conclusiones respecto de la potencialidad de esta secuencia como formación en el quehacer matemático, desde una perspectiva epistemológica y didáctica.

Introducción

En el presente trabajo daremos cuenta de una actividad realizada en la materia “Epistemología e Historia de la Matemática” de la carrera Profesorado Universitario en Matemática, que se dicta en el Centro Regional Universitario Bariloche de la Universidad Nacional del Comahue, desde las miradas del equipo de cátedra y de una estudiante que participó de la misma. También propondremos algunas cuestiones que surgieron como fruto de la reflexión de la potencialidad de la actividad para el desarrollo del quehacer matemático. La actividad fue implementada en la cursada 2024 con ocho estudiantes que se encontraban entre 3ro y 4to año del Profesorado Universitario en Matemática. Corresponde a la Unidad 3

del Programa de la materia sobre los fundamentos históricos y epistemológicos de la Geometría. La actividad que dimos en llamar “Estudio del efecto de las transformaciones lineales en objetos del espacio geométrico $\mathbb{R}^2$ ” ([Guía disponible](#)) se desarrolló durante una clase de 4hs en la Sala de Informática del Centro Regional, de la cual no se tomaron registros sincrónicos, pero contamos con registros escritos y la programación en GeoGebra provistas por una estudiante (en ese entonces) que es autora de este trabajo. En esta ponencia, nos proponemos presentar las perspectivas del equipo docente y de una estudiante, poniendo en diálogo el potencial didáctico de la experiencia.

Encuadre académico

Desde la Matemática el tema desarrolla contenidos de Álgebra Lineal y de Geometría. No se trata de temas nuevos para los estudiantes, sino de que realicen conexiones entre temas vistos en materias anteriores. Lo nuevo que se aporta es desde la Epistemología, tratando de ofrecer una mirada de la interacción entre Álgebra y Geometría,

Las transformaciones propias de una geometría pueden considerarse como las simetrías del correspondiente espacio y forman lo que se llama un grupo... Por ejemplo, si uno toma $X=\mathbb{R}^n$ y toma G como el grupo de todas las transformaciones lineales invertibles, al estudio de (X,G) no le llamamos «geometría» sino «álgebra lineal». (Camarena, 2025).

Uno de los temas importantes del Álgebra Lineal es el determinante de una matriz y su cálculo. A lo largo del profesorado, se le atribuye al determinante su importancia principalmente por ser el indicador de si una matriz es o no invertible. En esta clase las y los estudiantes estudian el efecto geométrico de las transformaciones lineales biyectivas, representadas en forma matricial, sobre objetos geométricos que habitan el espacio $\mathbb{R}^2$ y el valor absoluto del determinante como indicador de variación de área entre figura original e imagen bajo la transformación.

Propósitos y objetivos de la secuencia

La idea de la actividad propuesta es que cada estudiante pueda resignificar y entender a los “Determinantes” dentro de un contexto histórico, epistemológico y de organización dentro de la estructura matemática en el marco de una “Geometría”. Se trata de un modesto intento de ejemplificar lo propuesto en 1872 por el matemático alemán Félix Klein en el Programa de Erlangen.

Haciendo foco en las conexiones entre Álgebra y Geometría desde lo histórico se solicita a

los estudiantes que investiguen previo a esta actividad dos hitos importantes. El primero se trata de *Descartes y los Sistemas de Coordenadas* (Figuras y Ecuaciones), mientras que el segundo se refiere a *Klein y el programa de Erlangen* (Grupos y Transformaciones).

Objetivos

- Ejemplificar *una geometría* según el programa de Erlangen de Félix Klein, a partir de las transformaciones que constituyen su grupo de base y los invariantes asociados.
- Dar significación y aumentar la comprensión de contenidos, propiedades y relaciones entre objetos matemáticos vistos en las materias Álgebra Lineal y Geometría Analítica. En particular: propiedades de los determinantes, invariantes de las transformaciones lineales con las justificaciones correspondientes.
- Utilizar los elementos y potencialidades de GeoGebra para realizar una producción que muestre un uso creativo de los conocimientos previos y nuevos.

Mirada del equipo docente

La clase se desarrolla en la Sala de Informática y cada estudiante trabaja en un ordenador individual pero compartiendo fila con otros dos estudiantes. Las y los estudiantes dialogan entre sí y con los docentes, y comparten sus producciones mostrando sus pantallas.

La clase comienza compartiendo conocimientos previos y se escriben en el pizarrón los axiomas del determinante con participación activa de los estudiantes (que son avanzados en la carrera). Se recuerdan las fórmulas para calcular determinantes de 2×2 y 3×3 y se verifican algunos de los axiomas. Teniendo en cuenta la interpretación geométrica de una matriz como paralelogramo determinado por los vectores fila, la profesora muestra el efecto que la acción de cada operación elemental ejerce sobre ese paralelogramo y los cambios en el determinante como indicador del área orientada del paralelogramo, sabiendo que $\det(\text{Id})=1$.

A continuación, los estudiantes programan en GeoGebra la aplicación de una transformación lineal biyectiva a los vértices de un polígono. La traducción algebraica consiste en multiplicar una matriz inversible por el vector columna que se obtiene al considerar las coordenadas de dichos vértices, y esto se visualiza en GeoGebra mediante la “Vista geométrica” y la “Vista algebraica”. Al resolver la actividad aparecen no sólo cuestiones matemáticas sino también propias del uso de los sistemas de Geometría Dinámica que merecen un análisis que excede a esta presentación. El trabajo con este software se propone como un terreno de exploración y visualización del efecto de las transformaciones lineales, donde el uso de distintas “vistas” permita la conexión entre un objeto, su imagen y la variación de área mediante estas transformaciones.

Los estudiantes manifiestan expresiones de sorpresa al compartir sus resultados, comparando

los polígonos particulares propios y los de sus compañeros.

Los docentes promueven la búsqueda de invariantes: rápidamente se observa que se conserva el número de lados entre el polígono original y su imagen, que puntos alineados se convierten en puntos alineados, que lados paralelos en el original se transforman en lados paralelos de la imagen (simple resultado de ser funciones biyectivas), y que se conserva la convexidad (o no) entre figuras que se corresponden.

Las y los estudiantes relacionan el área del polígono original P y de su imagen $P1$ bajo la transformación $m1$ (dada por una matriz inversible 2×2) y concluyen que $\text{Área}(P) \cdot |\det(m1)| = \text{Área}(P1)$. Se menciona también el *jacobiano*, determinante estudiado al cambiar sistemas de coordenadas en Cálculo, una conexión intra-matemática interesante.

Se comparten los hallazgos realizados y se promueven algunas cuestiones matemáticas que se ponen en juego: $(0,0)$ como punto fijo, cambio de orientación en los vértices del polígono imagen cuando la matriz tiene determinante negativo, indagación con polígonos que no tengan a $(0,0)$ como vértice.

Para completar con el enfoque epistemológico, se da cuenta de la estructura de grupo de las matrices inversibles con la multiplicación, de Félix Klein y del Programa de Erlangen, así como de la posibilidad de clasificar una geometría en base a sus transformaciones e invariantes.

Como tarea para la siguiente clase se propone la lectura de la disertación [GEOMETRÍA: INTUICIÓN Y RAZONAMIENTO](#) del Dr. Luis A. Santaló.

Mirada de la estudiante

Mediante la evocación de la actividad de nuestro interés con motivo de la escritura de esta comunicación, mostramos a continuación el informe de Bárbara y el enlace al programa de Geogebra realizado en clase:

En una clase, la profesora Martha Ferrero nos preguntó cuál era la relación entre el determinante de una matriz y un polígono. La pregunta nos sorprendió, ya que estábamos en el último año del profesorado y ninguno recordaba haber tratado este tema antes. Para indagar al respecto, se nos propuso realizar la siguiente construcción en Geogebra:

- Construir una matriz de 2×2 y calcular su determinante.
- Construir un polígono cualquiera.
- Aplicar la matriz al polígono, obteniendo un nuevo polígono.

Luego, la idea era explorar con el software, moviendo los vértices del polígono o cambiando valores a la matriz para observar cómo se modificaba el área de ambos polígonos, observando que pasaba con el área de ambos polígonos. A partir de esta experiencia,

concluimos que el área del polígono transformado corresponde al área del original multiplicada por el determinante de la matriz utilizada.

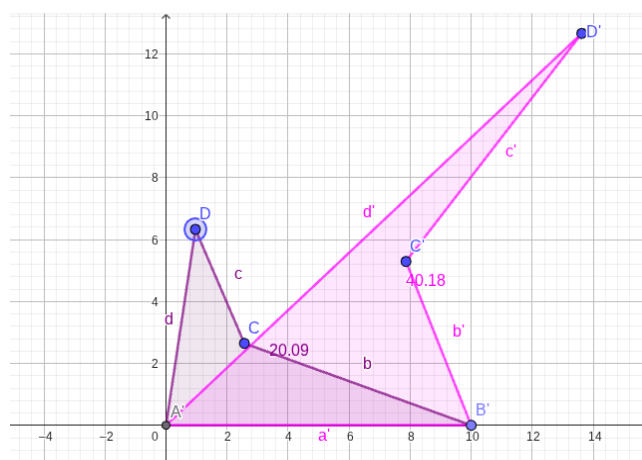


Figura 1- Polígonos homólogos por una Transformación Lineal y sus áreas

Esta experiencia muestra que el software resultó, en palabras de Litwin (2005), más que una herramienta, constituyendo un área de expansión, que trasciende de ser un soporte para dar cuenta de sus posibilidades de uso, incorporando un nivel explicativo diferente y tendiendo puentes que facilitaron y enriquecieron la comprensión. El equipo docente tuvo un papel clave en esta experiencia, pues fueron quienes se encargaron de planificar el uso que se le daría a la herramienta, la ofrecieron a sus estudiantes y la integraron como actividad de aula, ampliando el alcance de la clase respecto al contenido. La construcción de estos polígonos en el software, frente al uso de lápiz y papel, enriqueció notablemente la experiencia, pues “la utilización de representaciones provistas por las tecnologías para favorecer el conocimiento se sustenta en la visibilidad que posibilitan las diferentes representaciones: a veces permiten iniciar la comprensión; en otras oportunidades, expandirla, y, en más de una circunstancia, reconocer con flexibilidad diferentes hechos o conceptos” (Litwin, 2005, p.7), permitiendo una mayor exploración y facilitando la generalización del resultado obtenido, tal como se ejemplifica en la Figura 1.

Compartimos enlace al programa realizado en clase, [producción de esta actividad](#), por parte de Bárbara.

Reflexiones finales

Consideramos que las y los estudiantes han tenido un rol activo en el desarrollo de la actividad: utilizaron conocimientos previos, plantearon inconvenientes, interrogantes y logros que compartieron entre docentes y compañeros. También se discutieron implicaciones didácticas y el rol de la Epistemología en la actividad matemática.

Los términos en los que la estudiante valora la experiencia como enriquecedora, reflejando un punto de vista didáctico sobre el uso de la TIC, no dejan de mostrar cierta distancia entre lo que se propuso originalmente desde la cátedra y lo que finalmente resultó más significativo al momento de evaluarla. Así, la relación matemática entre el Álgebra y la Geometría, y las implicaciones epistemológicas de este vínculo, toman un segundo plano frente a la potencia didáctica de la utilización de herramientas TIC para la exploración de dicha relación. Valorando esta conclusión, nos hace pensar que en próximas implementaciones puede hacerse mayor énfasis en los aspectos epistemológicos durante el intercambio de la instancia de puesta en común.

El reporte de la estudiante refleja su compromiso con la actividad docente que ha resultado en una reflexión acerca del uso de las TIC's. Consideramos que la producción de su informe da muestra del esfuerzo del plantel de docentes del Profesorado de nuestro Centro Regional por lograr un enfoque integral desde varias materias de los campos de formación incluidos en el plan de estudios (Formación Pedagógica y Formación en la Práctica Profesional Docente).

Bibliografía

- Camarena, O. A. (2025). El programa Erlangen. *Instituto de Matemáticas, UNAM*.
<https://www.matem.unam.mx/~omar/geometrias/tema0.html>
- Coxeter, H. S. M. (1971). *Fundamentos de geometría*. Editorial Limusa.
- Ferrero, M. (2024). Programa de epistemología e historia de la matemática.
<https://docs.google.com/document/d/1ytxcMS77DC1sZ2uFdC7S0eeNPswvB7RD/edit?usp=sharing&oid=106268896291672193463&rtpof=true&sd=true>
- Freudenthal, H. (2002). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Springer Netherlands.
- Godino, J., Batanero, C., & Navarro-Pelayo, V. (1995). Epistemology and mathematics instruction: Implications for curricular development. En L. Bazzini (Ed.), *Proceedings of the V Conference on Systematic Cooperation between Theory and Practice* (pp. 15–26).
- Hilbert, D., & Cohn-Vossen, S. (2021). *Geometry and the imagination*. American Mathematical Society.
- Litwin, E. (2005). *Tecnologías educativas en tiempos de internet*. Amorrortu.
- Santaló, L. A. (1992). *Geometría: intuición y razonamiento*.
<https://ciaem-iacme.org/wp-content/uploads/2019/05/Geometria-intuicion-y-razonamiento.pdf>

PROYECTO DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA PARA ESTUDIANTES DE INGENIERÍA DESDE UNA PERSPECTIVA CRÍTICA

Carlos Parodi¹ y Adriana Magallanes²

¹Universidad Nacional de La Pampa - ²Universidad Nacional de Río Cuarto

Calle 9 Nº 820, General Pico, La Pampa - Ruta Nac. 36 - Km. 601

parodic@ing.unlpam.edu.ar

Categoría del trabajo: Relatos de experiencias

Nivel Educativo: Universitario

Palabras claves: modelización matemática, estudiantes de ingeniería, perspectiva crítica y educativa

Resumen

Se comparte un proceso de modelización matemática planificado desde una perspectiva crítica y vivenciado por estudiantes de primer año de Ingeniería durante el ciclo lectivo 2024. Se emplea un ciclo de modelización matemática para describir y analizar lo acontecido en las distintas fases desarrolladas por los estudiantes al involucrarse en dicho proceso. Se muestran resultados del estudio acompañado de reflexiones que incluyen voces de docentes y estudiantes.

Primeras ideas sobre la experiencia educativa

Con este trabajo se presenta una experiencia educativa interesada por la implementación de actividades de modelización matemática (MM) desarrollada con un grupo de estudiantes de primer año en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Pampa (UNLPam) inscriptos para cursar la asignatura Álgebra en el año 2024. El docente responsable de dicha asignatura planifica un encuentro en que se presentan los fundamentos, los objetivos y se invita a los estudiantes a participar de manera voluntaria y de forma extracurricular del proyecto “Arquería”. Se inscriben 43 estudiantes a tal convocatoria. Si bien en la sección contexto educativo se ofrecen detalles sobre este encuentro y sobre el proyecto, antes de esta descripción, presentamos desde qué ideas de MM se ha creado, aplicado y analizado las actividades en aula.

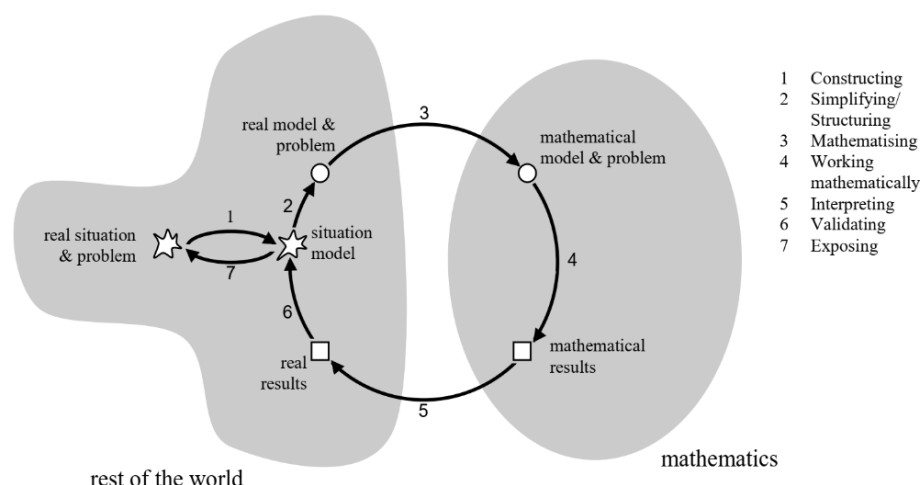
Perspectivas sobre MM para la enseñanza. Antecedentes breves y perspectiva escogida

La modelización matemática ha ganado un lugar importante en distintos países del mundo (Blum et al, 2007). Sin embargo, existe una amplia pluralidad de perspectivas, concepciones y propósitos en torno a lo que es la MM y su manera de introducirse en los sistemas educativos

(Stillman et al, 2020; Kaiser y Sriraman, 2006). Dentro de las perspectivas descriptas por Kaiser y Sriraman (2006), se focaliza el interés en una perspectiva socio-crítica y educativa. En relación a la primera se explicita un propósito es develar el poder formativo de la modelación matemática, en el sentido de crear discursos reflexivos entre los estudiantes, estructurando la crítica y la reflexión en torno al proceso de modelación. En relación a la perspectiva educativa, se explicita un interés es introducir la modelación matemática a la enseñanza como vehículo (Villa Ochoa, 2007). Si bien el ciclo de modelación ha sido estudiado desde diversos enfoques teóricos y para distintos propósitos (Borromeo Ferri, 2018), para describir las fases desarrolladas en la experiencia que se comparte en el presente trabajo se opta por el ciclo propuesto por Blum y Leiß (2007) que se observa en la Figura 1.

Figura 1

Ciclo de Modelización Matemática



Fuente: Blum y Leiß, 2007, p 225

De manera simplificada, el proceso de modelación se inicia con una situación del mundo real (o extramatemático), la situación tiene que ser simplificada, estructurada y precisada por quien resuelve el problema, lo que lleva la creación de un modelo de la situación. Luego y apelando a conocimientos extramatemáticos, el modelo es traducido al lenguaje matemático produciendo un modelo matemático de la situación. El proceso continúa a través de elegir métodos matemáticos adecuados para el modelo, a partir de lo cual se obtienen ciertos resultados matemáticos, que tienen que ser interpretados en relación a la situación original. Si existen discrepancias entre la situación real y los resultados obtenidos, se regresa a revisar la situación y reconsiderar el modelo, con lo cual se inicia un nuevo ciclo.

Contexto educativo

La experiencia se inscribe en el marco del curso de Álgebra que se dicta para todas las carreras de la Facultad de Ingeniería de la UNLPam y corresponde al primer semestre del primer año de los planes de estudio. La cátedra Álgebra se compone de cuatro docentes, siendo el primer autor de este trabajo el docente responsable de la asignatura. Cada año se inscriben para cursarla más de 180 estudiantes, que se encuentran por primera vez, al menos en su mayoría, con contenidos que se acercan a una abstracción poco abordada, introduciendo los primeros conceptos de Espacios Vectoriales en los Reales y Complejos, pero haciendo hincapié en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

El ingeniero en formación, debe adquirir unas competencias específicas, para que en ejercicio de su profesión pueda delinear ideas, dispositivos, sistemas, mecanismos, soluciones, alternativas, etc. En ese sentido, los documentos emitidos por Consejo Federal de Decanos de Ingeniería - CONFEDI proponen las características definitorias de la profesión de la Ingeniería. Atendiendo estas recomendaciones, el docente responsable de Álgebra, se propone introducir una innovación en su aula con el objetivo de que los estudiantes logren recrear la realidad con propuestas concretas presentadas en forma de problemas análogos a los que se enfrentará en su vida laboral como ingeniero. Esta innovación consiste en diseñar y vivenciar un proceso de modelización a partir de una propuesta presentada por el profesor.

Sobre el desarrollo y análisis de la experiencia

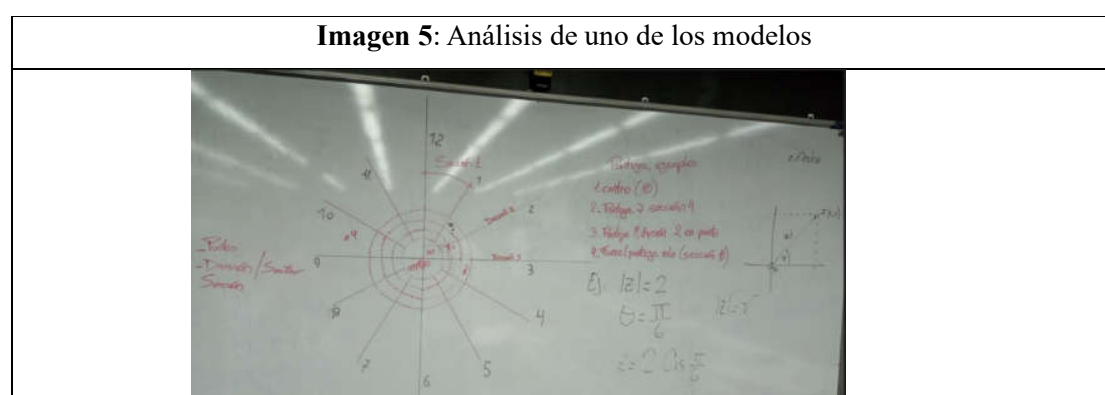
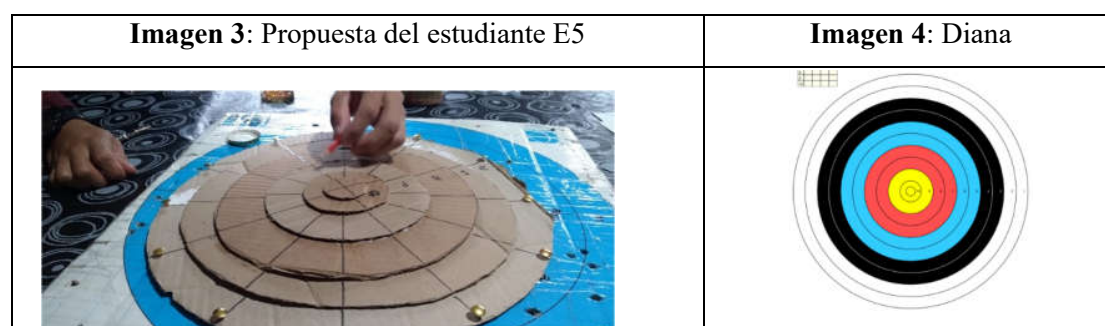
Para dar inicio a la fase 1 del ciclo de MM, el profesor planifica una presentación para todos los estudiantes de Álgebra. En esta presentación se invita a los estudiantes a involucrarse, de manera voluntaria, en un proyecto vinculado al deporte de tiro con arco. Debido al tipo de actividad (por los riesgos que conlleva la práctica del tiro con arco) y recursos disponibles (solo 2 docentes), tiempo planificados para el desarrollo de la actividad y la masividad de la materia es que se toma la decisión de proponerlo como una actividad extracurricular y voluntaria. Se asigna una calificación a los estudiantes que participan y entregan un Trabajo Final sobre el proceso de MM realizado, esta calificación se promedia con el resultado del primer parcial. Se inicia mostrando dos videos cortos, en el primero se presenta un fragmento de una competencia con arco recurvo olímpico modalidad aire libre, en los juegos olímpicos. En el segundo video, un arquero profesional de grupo de arqueros franceses, muestra la dificultad y necesidad de la asistencia permanente para la práctica del deporte hacia un arquero con disminución visual que ganó 11 medallas olímpicas. Nos muestra cómo realiza los tiros y qué papel desempeña su asistente. A partir de estos videos y de puesta en común, el profesor plantea la pregunta que orienta el Proyecto: ¿De qué manera podemos ayudar al deportista interesado en la práctica del tiro con arco con ciegos o disminuidos visuales para que sea lo más autónomo posible al desarrollar dicha actividad? Se explicita que la propuesta es poder abordar este interrogante

desde el conocimiento matemático en relación con otros conocimientos. La pregunta no es natural ya que, para abordarla, primero debería insertarse en el deporte y en particular el tiro con arco adaptado orientado a los deportistas en esta situación. Se deja abierto un espacio en el Campus de la Asignatura Álgebra para que los estudiantes puedan hacer consultas y se puedan ofrecer aquellos interesados en participar en este proyecto. Se ofrecen 43 estudiantes para participar en el proyecto. Se realiza un encuentro semanal durante 6 Semanas. En fase 2 del ciclo de MM, los estudiantes se interiorizan sobre los conocimientos básicos necesarios para la práctica del tiro con arco, diferentes tipos de arcos que se utilizan comúnmente, los elementos periféricos necesarios, las medidas de seguridad, los movimientos que deben adoptar los deportistas para poder efectuar el lanzamiento de la flecha, la técnica que debe realizar el arquero y las reglas principales del deporte. Durante los fines de semana, estudiantes y dos docentes de la cátedra se trasladan al lugar donde se realizan las actividades de tiro con arco (Imagen 1). Se realizan encuentros con el instructor perfeccionado en tiro con arco adaptado. Los estudiantes aprenden sobre los accesorios a utilizar y la especificidad de cada uno, que va desde su instalación hasta su uso. Se incorporan otros elementos adicionales y adaptaciones a los equipos cuando se trata de arqueros con disminución visual (Imagen 2). A partir de estas prácticas los estudiantes reconocen dos situaciones relevantes para abordar la pregunta de indagación: la línea de tiro y la diana.

Imagen 1: Practicas con instructor	Imagen 2: Práctica con disminución visual.
	

Se avanza en la fase 3 con el propósito de definir supuestos, variables y tomar decisiones que les permitan avanzar en la búsqueda de modelos matemáticos que sirvan como medio, para modelar y resolver la consigna planteada. En este punto se proponen nuevos interrogantes: ¿Qué modelo/s matemático/s encuentran en la línea de tiro? ¿Qué modelo/s matemático/se encuentran

en la diana? En los grupos de trabajo surgen dos estrategias. E1: “Yo pensé la diana como un sistema de ejes, como el tablero de ajedrez, que lo dividís por sectores, y más o menos para puntaje, para reconocer el puntaje que ubiqué...” y E3: “Yo lo pensé como una circunferencia trigonométrica, lo podrías dividir en sexto de pi radianes. Para saber el tamaño que tiene que tener cada sección. Lo dividí en sexto pi radianes, lo dividí en doce sextos de pi radianes, entonces cada uno lo podés usar, por ejemplo el reloj.”. En el intercambio, los estudiantes van delimitando las variables, por ejemplo, para E3 además del ángulo (asociado a los números del reloj) se requiere considerar los diferentes círculos concéntricos en que se divide la diana (para saber en qué puntaje cae la flecha dentro del mismo ángulo). Se observan conexiones entre la fase 4, de resolución matemática, con la fase 5 en la que se van produciendo las interpretaciones acordes a la situación. La diana se compone de círculos concéntricos y cada dos círculos consecutivos está en un color diferente. Del centro hacia afuera, y según se puede observar en la Imagen 4, se tiene la puntuación 10 y 9 en amarillo, la puntuación 8 y 7 en rojo, la puntuación 6 y 5 en celeste, la correspondiente al 4 y 3 en color negro y por último en color blanco los puntos correspondientes al 2 y 1. El centro de esas circunferencias concéntricas se marca con una “X” que equivale también a 10 puntos, pero al momento de las definiciones cuenta como el elemento diferenciador. Como podemos apreciar en la Imagen 3.



Como el arquero deberá conocer la ubicación en la diana dónde cae la flecha luego de ser

lanzada para hacer las correcciones en lanzamientos posteriores, surge un análisis de qué manera el arquero ciego se hace de esa información, algunos de los avances se observan en la imagen 5 correspondiente a uno de los modelos. Luego de lo cual se construye un modelo en tres dimensiones (imagen 3) y con intención de facilitar al arquero ciego, a través del tacto, conocer todas las zonas del blanco y la ubicación del impacto. Esta ubicación se muestra físicamente con una chinche que indica esa posición. Es importante destacar que este modelo se encuentra en la línea de tiro y al alcance del arquero.

Entrando en fase 6 y luego de revisiones y reformulaciones, los grupos ponen a prueba sus los modelos construidos en la escuela de tiro. En cada disparo recibe la información de qué resultado obtuvo y luego la decisión del arquero de realizar los ajustes necesarios para un nuevo disparo. Este proceso se repite tres veces por cada modelo. Cabe destacar que el que hace de arquero ciego es un estudiante del equipo contrario al que pone el modelo en práctica. Los estudiantes notan que los modelos le permiten al tirador, al palpar en la maqueta la zona donde le informan que impactó el tiro en la diana y poder hacer las correcciones necesarias para el siguiente tiro.

La propuesta tuvo como cierre la presentación de un trabajo final (TF) que consiste en lo siguiente: Una introducción, marco teórico de lo investigado sobre el tema, una descripción de lo vivenciado durante experiencia, los contenidos y modelos matemáticos que lograron trabajar, las conclusiones a las que llegaron y posibles proyecciones. Para cada una de estas partes del TF, el docente se proporciona algunas preguntas orientadoras. Se presenta en grupos de a lo sumo cuatro participantes y con libre conformación de los mismos. En todos los casos los resultados superaron ampliamente las expectativas.

Reflexiones finales

Mediante esta experiencia los estudiantes aprendieron conocimientos algebraicos (circunferencia trigonométrica, coordenadas cartesianas y polares, entre otros); pudieron vivenciar vínculos entre la matemática y el mundo real y reconocerse como sujetos capaces de producir transformaciones que puedan mejorar la autonomía de un tirador con disminución visual.

Cabe aclarar que este trabajo se limita a compartir la experiencia, su contexto y sus fundamentos teóricos, el análisis sobre los resultados observados en los aprendizajes del grupo participante así como las competencias que desarrollaron son parte de un futuro trabajo Tesis Doctoral. Sin embargo, se reconocen algunas competencias que se hicieron presentes, tales como: involucrarse en la temática específica, indagar sobre el tema, entrar en diálogo con especialista antes de pensar y proponer el modelo matemático, realizar los ajustes necesarios para que la

propuesta que realicen tenga sentido en la realidad, toma de decisiones fundamentadas, trabajo colaborativo, entre otros.

Para los docentes involucrados, la propuesta se presentó como una experiencia innovadora. El trabajo de planificación buscó reducir la incertidumbre y generar confianza tanto en el desarrollo de las clases como, especialmente, en el momento de la práctica deportiva. Entre los principales desafíos que implicó la implementación del proyecto se destacaron la revisión de las actividades antes y después de cada encuentro, la necesidad de realizar ajustes en la planificación para las clases siguientes y la organización de las tareas conforme a las normativas de ambas instituciones.

Al mismo tiempo, voces de los estudiantes reconocen un impacto también en lo actitudinal como la del estudiante E4: "...poder investigar sobre un problema en específico y buscar en parte su solución, fue algo muy interesante y entretenido. También el tiempo que pasamos en el campo de tiro para practicar como una actividad fuera de la facultad me pareció algo innovador al menos para estar proponiendo esto ya desde que somos ingresantes en la facultad. Resulto ser una buena manera de poder llegar a conocer más gente en mi caso, lo que resulta muy grato para mí ya que yo antes de arrancar con este proyecto tenía muy pocos conocidos". Sintetizando, el trabajo con escenarios educativos como el descrito, puede significar por un lado una contribución para promover en los estudiantes no solo el hecho de observar y adaptarse a las condiciones propuestas, sino que les significó reconocer algún cambio mientras aprende y movilizan conocimientos trabajados, donde ellos pueden vivenciar sus capacidades para detectar problemáticas, poder comunicarlas y reconocer que pueden sugerir propuestas de mejora. Este tipo de escenarios pueden contribuir en mejorar sus vínculos, así como las capacidades de realizar trabajos colaborativos entre estudiantes, docentes y especialistas en las temáticas que se aborden. En efecto, los docentes pudieron observar el modo en que los distintos grupos se involucraban en la formulación y desarrollo de las propuestas. Esta experiencia, novedosa también para los estudiantes, favoreció la construcción de vínculos que enriquecieron la relación docente-estudiante y promovieron el empoderamiento tanto de los estudiantes como de los propios docentes (Magallanes, 2021).

Agradecimiento: A la profesora Micaela Alejandra Recchioni Barrio por su participación comprometida y por aceptar involucrarse en este proceso de modelización.

Referencias Bibliográficas

Blum, Werner. y Leiß, Dominik. (2007). Deal with modelling problems. Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics-ICTMA, 12, 222-231.

- Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H.-W., & Niss, M. (Eds.). (2007). *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI study*. New York: Springer.
- Borromeo Ferri, Rita. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Springer.
- Kaiser, G., y Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM*, 38(3), 302–310. <https://doi.org/10.1007/BF02652813>.
- Magallanes, Adriana N. (2021). *Empoderamiento de estudiantes en el contexto de un Escenario de Modelización Estocástico Crítico* [Tesis de Doctorado]. UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA.
- Stillman, G.A., Kaiser, G., Lampen, E. (2020). *Sense-Making in Mathematical Modelling and Applications Educational Research and Practice*. Springer, Cham.
- Villa-Ochoa, Jhony. (2007). La Modelación como Proceso en el Aula de Matemáticas: Un Marco de Referencia y un Ejemplo. *TecnoLógicas*, (19), 63-85.

FUNCIÓN CUADRÁTICA Y USO DE INTELIGENCIA ARTIFICIAL EN LA ESCUELA AGROTÉCNICA

Bruno Racca

Escuela Agrotécnica N° 336 “Mario C. Videla”

agrotecnica336@gmail.com;

brunoracca10@gmail.com

Categoría del trabajo: Relato de experiencias

Nivel educativo: Secundario (Educación Agrotécnica)

Palabras clave: Función cuadrática, inteligencia artificial, modelización, educación agrotécnica

Resumen

La enseñanza de la función cuadrática en secundaria suele ser percibida como abstracta y desvinculada de la práctica profesional, especialmente en escuelas agrotécnicas, donde los estudiantes esperan que los contenidos matemáticos se relacionen con la producción y la gestión agropecuaria (Brousseau, 2007; Chevallard, 1991). En este contexto, se desarrolló una experiencia educativa en quinto año que integró la función cuadrática con inteligencia artificial (IA) para modelizar la relación entre la dosis de fertilizante y el rendimiento de un cultivo. La IA actuó como un entorno experimental virtual, generando datos heterogéneos, simulando escenarios con variabilidad realista y ofreciendo retroalimentación progresiva, lo que permitió que los estudiantes construyeran, ajustaran y validaran sus modelos sin perder protagonismo en la resolución del problema.

La propuesta favoreció la comprensión conceptual de los coeficientes y el vértice de la parábola, vinculando la teoría matemática con la optimización de decisiones productivas. Se observó un aumento significativo en la motivación, la participación activa y las competencias de modelización predictiva. Los resultados confirman que la integración de función cuadrática e IA potencia la pertinencia de la matemática, transformando contenidos abstractos en herramientas de análisis aplicables a la práctica agropecuaria y promoviendo una educación matemática crítica y contextualizada.

Introducción

La enseñanza de la función cuadrática en la educación secundaria enfrenta desafíos persistentes, especialmente en contextos técnicos y rurales, donde los estudiantes tienden a percibir este contenido como abstracto y desconectado de la práctica profesional (Brousseau, 2007; Chevallard, 1991). En las escuelas agrotécnicas, esta brecha se acentúa, dado que los alumnos esperan que los conocimientos matemáticos se vinculen de manera directa con procesos productivos, optimización de recursos y toma de decisiones fundamentadas en datos reales (Skovsmose, 1999; ProFuturo, 2020).

Ante esta problemática, surge la necesidad de diseñar experiencias pedagógicas que integren la modelización matemática con herramientas tecnológicas innovadoras. La inteligencia artificial (IA) se presenta como un recurso de alto potencial, capaz de generar entornos experimentales virtuales, producir datos con variabilidad realista, simular escenarios alternativos y ofrecer retroalimentación progresiva, todo ello sin sustituir el pensamiento crítico del estudiante (Dang, Bui & Nhan, 2023; Shrestha, Adhikari & Lama, 2023). Esta aproximación permite resignificar la función cuadrática, transformándola en un instrumento para optimizar decisiones agropecuarias, identificar dosis óptimas de insumos y predecir rendimientos, mientras se fortalece la comprensión conceptual de parámetros matemáticos complejos.

Desde la perspectiva de la educación matemática crítica, el aprendizaje se concibe como un proceso de interpretación, análisis y acción fundamentada, donde los estudiantes desarrollan competencias para modelizar fenómenos reales y aplicar la matemática como herramienta estratégica en contextos productivos (Skovsmose, 1999; Vergnaud, 1990). Integrar IA y funciones cuadráticas no solo amplía las posibilidades de exploración y experimentación, sino que convierte la enseñanza en un espacio innovador de toma de decisiones, motivación y desarrollo de habilidades cognitivas avanzadas.

En este sentido, la presente experiencia pedagógica propone un enfoque contextualizado, interactivo y crítico, que combina rigor disciplinar, pertinencia técnica y tecnologías emergentes, sentando un precedente para la enseñanza de la matemática en entornos rurales y agrotécnicos.

Desarrollo de la experiencia

La propuesta se implementó en 5.º año de la Escuela Agrotécnica N° 336 “Mario C. Videla” mediante un proyecto titulado “¿Cuál es la dosis óptima de fertilizante?”, cuyo objetivo fue vincular la función cuadrática con la modelización de fenómenos productivos reales. La actividad parte del reconocimiento de que muchos procesos agrícolas presentan una relación no lineal entre insumos y rendimientos: inicialmente crecientes hasta un máximo y posteriormente decrecientes, característica que puede representarse mediante una función cuadrática

(Vergnaud, 1990; Dang, Bui & Nhan, 2023).

La experiencia se estructuró en tres fases articuladas. En la primera, la inteligencia artificial generó conjuntos de datos heterogéneos para cada grupo, simulando experimentos virtuales de rendimiento en función de la cantidad de fertilizante aplicado. Esta variabilidad permitió que los estudiantes enfrentaran situaciones diferenciadas, promoviendo la reflexión crítica y la comparación de resultados, en línea con la noción de “situación adidáctica” de Brousseau (2007).

En la segunda fase, los alumnos representaron gráficamente los datos y construyeron modelos cuadráticos que ajustaran la relación observada. La IA facilitó la verificación del ajuste, la exploración de variantes y la visualización dinámica de la parábola. Este proceso favoreció la interpretación conceptual del vértice como rendimiento máximo y de los coeficientes como reguladores de apertura y simetría, conectando directamente parámetros matemáticos con variables productivas (Chevallard, 1991).

Finalmente, cada grupo analizó el significado agrícola de su modelo, determinando la dosis óptima, el rendimiento máximo y los riesgos asociados al exceso de fertilización. Este análisis permitió articular el conocimiento matemático con la práctica agropecuaria, demostrando que la modelización rigurosa no solo facilita la comprensión conceptual, sino que también respalda decisiones eficientes y sostenibles en el contexto técnico y rural.

Ejemplos y evidencias del aprendizaje

Para interpretar y fortalecer los resultados reportados, se incorporan producciones concretas y voces estudiantiles que muestran cómo la experiencia favoreció la comprensión de la función cuadrática en un contexto agropecuario.

Un grupo de estudiantes construyó el modelo:

$$R(x) = -0,25x^2 + 4x + 20$$

Al analizarlo, explicaron que el coeficiente cuadrático negativo reflejaba la disminución del rendimiento una vez superado el nivel óptimo de fertilización. Tras calcular el vértice, concluyeron que la dosis adecuada era de 8 kg/ha y afirmaron: *“Si usamos más de 8, el rendimiento ya no mejora, al contrario, gastamos de más y podemos dañar el suelo”*. Este comentario evidencia la articulación entre el parámetro matemático y la toma de decisiones productivas.

Otro grupo interpretó que el término independiente (c) representaba el rendimiento de base sin fertilización: *“Aunque no apliquemos nada, el cultivo rinde un poco, porque hay nutrientes naturales en el suelo”*. De esta manera, los coeficientes fueron resignificados más allá de su sentido formal, integrándose a la lectura de fenómenos agropecuarios.

En cuanto a la evaluación, se aplicaron rúbricas que consideraron la capacidad de formular

modelos, la interpretación de los parámetros, la pertinencia de las conclusiones y la argumentación oral y escrita. Las producciones finales mostraron mejoras significativas: en la fase inicial, la mayoría de los grupos representaba gráficamente sin lograr interpretar el significado de los coeficientes; en la fase final, la totalidad pudo vincular el vértice con la dosis óptima y justificar sus decisiones con coherencia técnica.

Asimismo, se recogieron reflexiones en instancias de autoevaluación. Un estudiante expresó: *“Antes hacía las cuentas de memoria, pero ahora entiendo por qué el vértice significa el máximo, y me sirve para decidir la mejor cantidad de fertilizante”*. Este tipo de testimonios, sumados a la calidad de los informes, refuerzan la conclusión de que la integración entre función cuadrática, inteligencia artificial y modelización agropecuaria favoreció aprendizajes profundos, significativos y contextualizados, alineados con las finalidades de la enseñanza de la matemática en escuelas agrotécnicas.

Análisis y resultados

Los resultados de la experiencia indican que la incorporación de la función cuadrática en un contexto de modelización agropecuaria, mediada por inteligencia artificial, favoreció un aprendizaje significativo y contextualizado. Los estudiantes mostraron un elevado nivel de motivación y participación, al reconocer que los modelos construidos reflejaban fenómenos productivos concretos, superando la percepción de la función cuadrática como un contenido abstracto (Brousseau, 2007; Dang, Bui & Nhan, 2023).

El uso de IA permitió generar datos heterogéneos y simulaciones dinámicas, lo que amplió las posibilidades de exploración y facilitó la comprensión conceptual de parámetros clave, como el vértice y los coeficientes de la parábola. La retroalimentación inmediata ofrecida por el entorno digital contribuyó a la corrección de errores conceptuales y al fortalecimiento de competencias de modelización predictiva, alineadas con la noción de milieu didáctico y andamiaje propuesto por Brousseau (2007). Desde una perspectiva didáctica, la experiencia evidenció que la modelización matemática no solo potencia la comprensión de contenidos abstractos, sino que también fomenta la capacidad de tomar decisiones fundamentadas en situaciones productivas reales (Chevallard, 1991; Skovsmose, 1999).

Además, se constató que la propuesta favoreció la comprensión conceptual de los parámetros de la función cuadrática al vincularlos con decisiones productivas. El coeficiente cuadrático (a) dejó de percibirse como un valor abstracto y pasó a interpretarse como la rapidez con la que aumentaba o disminuía el rendimiento al variar la dosis de fertilizante. El coeficiente lineal (b) se resignificó como el aporte inicial del insumo, mientras que el término independiente (c) se entendió como el rendimiento base sin fertilización. El vértice, por su parte, fue comprendido simultáneamente en su sentido matemático (máximo de la parábola) y en su significado productivo (dosis óptima que maximiza el rendimiento).

En este marco, el aprendizaje se tornó significativo y contextualizado porque los estudiantes lograron trasladar conceptos abstractos hacia fenómenos productivos concretos, fortaleciendo la conexión entre matemática y práctica agropecuaria. La motivación y la participación activa se incrementaron al comprobar que los modelos elaborados permitían fundamentar decisiones reales de optimización de recursos. Asimismo, la incorporación de inteligencia artificial aportó datos heterogéneos, simulaciones y retroalimentación inmediata, lo que favoreció la corrección autónoma de errores y la consolidación de competencias de modelización predictiva. La evidencia de este proceso se reflejó en la calidad de las producciones estudiantiles, en la argumentación de las dosis óptimas calculadas y en la capacidad de transferir el esquema de análisis a otros contextos productivos (riego, densidad de siembra, energía), confirmando que la experiencia promovió aprendizajes profundos y aplicables.

Conclusiones

La experiencia confirma que la función cuadrática puede resignificarse en la educación agrotécnica cuando se integra con problemas de optimización productiva y se acompaña con herramientas de inteligencia artificial. La IA se consolidó como un entorno experimental innovador que permitió generar datos con variabilidad realista, validar modelos y enriquecer la discusión conceptual, manteniendo siempre el protagonismo cognitivo de los estudiantes y el rol mediador del docente (Shrestha, Adhikari & Lama, 2023).

Las producciones estudiantiles evidenciaron que los coeficientes y el vértice dejaron de ser nociones abstractas para convertirse en categorías significativas vinculadas con decisiones agropecuarias concretas. El aprendizaje se tornó así más profundo, contextualizado y transferible, en línea con los postulados de la educación matemática crítica (Skovsmose, 1999) y con la teoría de los campos conceptuales (Vergnaud, 1990).

Este enfoque muestra que la matemática, lejos de ser un conocimiento aislado, puede transformarse en una herramienta estratégica para analizar, predecir y optimizar procesos productivos, promoviendo además una reflexión sobre el uso racional de recursos y la sostenibilidad en el medio rural. A la vez, señala desafíos necesarios: la formación docente en el uso pedagógico de IA, la equidad en el acceso a recursos digitales y la evaluación sistemática de los impactos a largo plazo (Chevallard, 1991; Brousseau, 2007).

En conclusión, la integración entre función cuadrática e inteligencia artificial no solo potencia la comprensión de contenidos tradicionalmente complejos, sino que abre un horizonte innovador para la enseñanza de la matemática en escuelas técnicas y rurales. Este tipo de experiencias demuestra que es posible articular rigor disciplinar, pertinencia profesional y sentido pedagógico, aportando al desarrollo de una educación matemática más crítica, inclusiva y contextualizada.

Bibliografía

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Zorzal.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.

Dang, H. T. T., Bui, D. T., & Nhan, T. T. (2023). Enhancing creativity in secondary school mathematics: A quasi-experimental mixed methods study in Vietnam. *Journal of Mathematics Education Research*, 12(3), 45-62.

ProFuturo. (2020). *Realistic Mathematics for All in Peru: Mimate Project*. Madrid.

Project Partners. (2018). *Project: Maths – Ghana. Case study report*. Accra.

Shrestha, R., Adhikari, B., & Lama, S. (2023). A case study of access and use in learning mathematics in secondary schools of Nepal. *International Journal of Educational Technology*, 9(2), 101-115.

Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica*. Madrid: Morata.

Vergnaud, G. (1990). *La théorie des champs conceptuels*. Paris: PUF.

RECORRIDO DEL PROBLEMA ECONÓMICO A LA FUNCIÓN MATEMÁTICA MEDIADAS POR IA GENERATIVAS

Salinas Alejandro Daniel¹; Benítez Velma Marina; Domínguez Lucas Javier; Skrypczuk Mauricio Rene; Benítez Silvia Mabel; Pagnoni Liliana Ruth; Sánchez Esteban David

Universidad Nacional de Misiones (UNaM)

Contacto: alejandro.salinas@fce.unam.edu.ar

Categoría del trabajo: Relato de Experiencia de enseñanza áulica

Nivel Educativo: Universitario

Palabras Claves: Matemática Aplicada. TAD. Inteligencia Artificial. REI

Resumen

La incorporación de la Inteligencia Artificial (IA) en la enseñanza universitaria redefine los procesos de aprendizaje en contextos donde convergen saberes, como la matemática aplicada a la economía. Este trabajo examina la evolución de un Recorrido de Estudio e Investigación (REI) a partir de la pregunta generatriz: *¿con qué tamaño de lote de televisores y con qué frecuencia minimizamos costos?* El problema permitió articular conceptos matemáticos (funciones, derivadas y optimización) y económicos (costo total, costo marginal, costo mínimo, costo de inventario e inventario promedio) dentro de un marco co-disciplinar basado en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 2004). Los hallazgos muestran que la IA, junto con la mediación docente, potencia la participación activa, fortalece la autonomía estudiantil y genera praxeologías emergentes significativas.

1.Introducción

La Inteligencia Artificial se incorpora al aula universitaria como un **facilitador** que redefine los procesos de enseñanza y aprendizaje, especialmente en contextos que requieren la **integración de**

conocimientos, como es el caso de la matemática aplicada a la economía. Siguiendo experiencias previas, este trabajo analiza la evolución del **Recorrido de Estudio e Investigación (REI)** a partir de la **pregunta generatriz Q_0** : *¿con qué tamaño de lote de televisores y con qué frecuencia minimizamos costos?* Este cuestionamiento orientó la **elaboración de un modelo praxeológico**, enriquecido mediante interacciones con IA, dentro de un **marco co-disciplinar** que articula conceptos matemáticos (funciones, número promedio de artículos, derivadas, crecimiento y decrecimiento, optimización) y económicos (costo total, costo marginal, costo mínimo, costo de inventario e inventario promedio).

2. Marco Teórico

Pochulu (2024) subraya la relevancia de considerar la pertinencia didáctica de los problemas matemáticos diseñados con Inteligencia Artificial, tomando en cuenta tanto los conocimientos previos de los estudiantes como el contexto del problema. Asimismo, enfatiza la necesidad de establecer criterios para la gestión del aula, incluyendo la utilización de recursos retóricos, visualizaciones y dinámicas de interacción. Se genera así una sinergia entre docente, estudiante y IA, en la que el profesor aporta su experiencia y saber disciplinar, mientras que la IA personaliza la experiencia de aprendizaje, adaptándola a las necesidades de cada estudiante. Esto favorece la participación activa, la argumentación, la construcción de significados y el desarrollo de la autoestima académica.

En este marco, la IA no se concibe como una herramienta aislada, sino como una aliada estratégica del docente, que posibilita la creación de tareas matemáticas significativas, contextualizadas y motivadoras, potenciando el aprendizaje de todos los estudiantes.

El análisis se fundamenta en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 2004), donde el Recorrido de Estudio e Investigación (REI) funciona como dispositivo para problematizar el conocimiento. La pregunta generatriz actúa como motor que activa praxeologías emergentes, integrando de manera dinámica las organizaciones matemáticas (OM) —conceptos y técnicas como funciones, derivadas, crecimiento y decrecimiento, optimización, número promedio de artículos— con las organizaciones económicas (OE) —costo total, costo marginal, costo mínimo y costo de inventario— dentro de un marco co-disciplinar.

En este contexto, la IA trasciende la mera generación de respuestas, ampliando el espacio de cuestionamiento, facilitando la transición entre la formulación de hipótesis, el cálculo analítico y la interpretación económica, y fomentando la construcción colaborativa del conocimiento en situaciones que combinan matemática aplicada y economía.

3. Problema

Enunciado del problema: “Un distribuidor minorista de electrodoméstico vende 25 unidades (en miles) aparatos de televisor por año. Esto le cuesta USD 0,1 (en miles) de almacenamiento por televisar al año. Para atender los nuevos pedidos, hay un costo fijo de USD 0,2 (en miles) más USD 0,09 (en miles) por cada aparato. ¿con qué tamaño de lote de televisores y con qué frecuencia minimizamos costos?”.

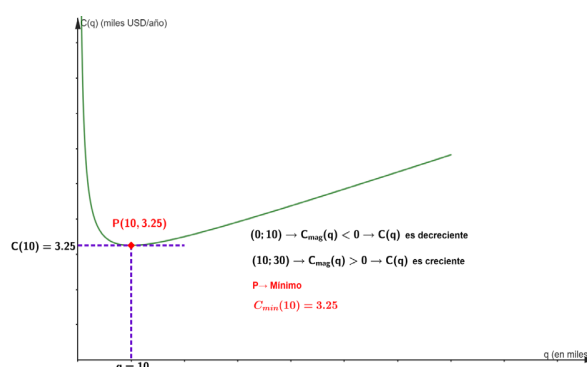


Figura 1. Gráfico de la relación entre los costos.

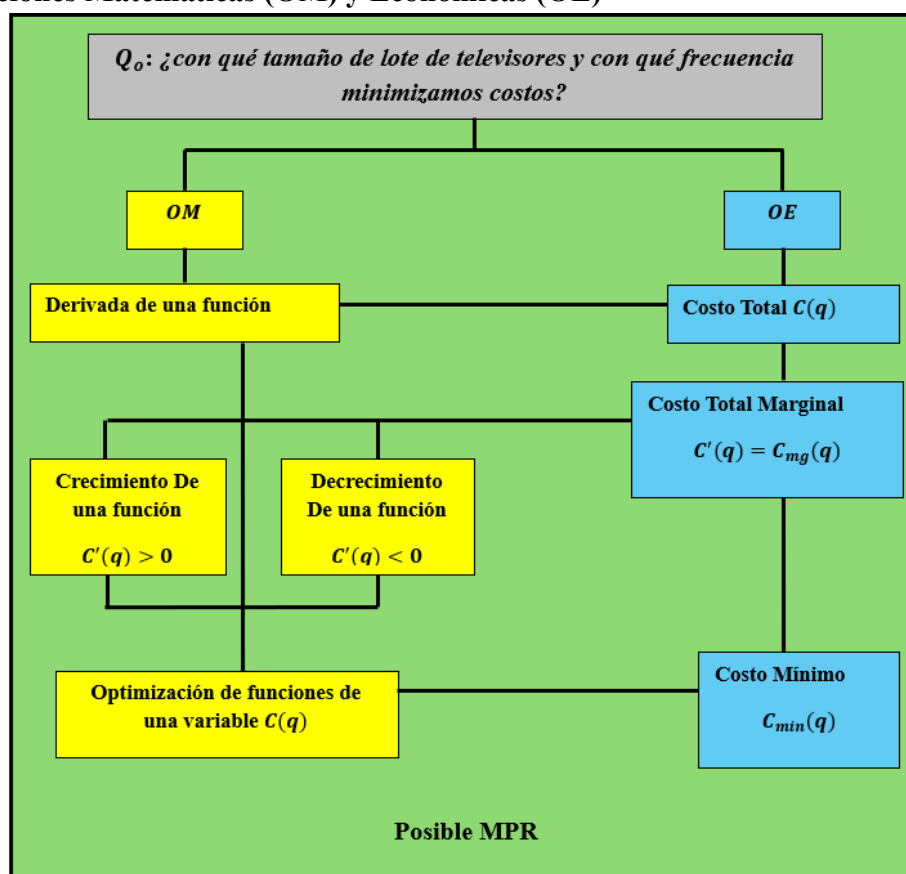
4. Metodología

La experiencia se desarrolló en la cátedra de Análisis Matemático, con estudiantes de primer año de la Carrera de la Licenciatura en Economía y Licenciatura en Administración de Empresas de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Misiones. Se trabajó en grupos que partieron de la misma pregunta generatriz, pero siguieron recorridos diferentes mediados por IA, cuyo objetivo de la clase fue “desarrollar habilidades de modelización y análisis económico-matemático mediante la Inteligencia Artificial, movilizando la construcción de praxeologías económicas y matemáticas ($OE \leftrightarrow OM$)”: algunos grupos plantearon el problema, interactuaron con IA para identificar la relación entre cantidades de televisores vendidos por año, costos anuales

de transporte y de nuevos pedidos. La IA aportó definiciones y ejemplos sobre las relaciones mencionadas, pero omitió cálculos en la primera interacción, lo que motivó nuevos prompts para obtener la resolución analítica. Estos grupos compararon las respuestas de ChatGPT y Gemini, evidenciando diferencias en profundidad conceptual y rigor matemático.

Otros, orientaron sus interacciones hacia la interpretación gráfica y la verificación de resultados. Solicitaron a la IA integrar conceptos de cantidades de televisores vendidos por año, costos anuales de transporte y de nuevos pedidos, logrando una resolución que incluyó derivación, análisis de crecimiento/decrecimiento y justificación económica. Destacando así el valor de la IA para proponer variantes del problema original. Todos los equipos registraron las iteraciones con IA y elaboraron conclusiones sobre el impacto en su aprendizaje. Estas interacciones se alinean con lo planteado por Pochulu (2024), quien resalta la necesidad de gestionar el aula mediante recursos variados y el aprovechamiento de la IA como aliada para crear tareas matemáticas significativas y contextualizadas. En la práctica, esto se materializó en la forma en que los distintos equipos utilizaron la IA no solo como fuente de información, sino como agente mediador que orientó la modelización, favoreciendo la argumentación y el diseño de estrategias de resolución diferenciadas.

5. Organizaciones Matemáticas (OM) y Económicas (OE)



6. Resultados Parciales

El análisis evidencia hallazgos que se alinean con las ideas de Pochulu (2024), quien destaca que la IA, articulada con la intervención docente, potencia la participación activa y promueve la construcción de estrategias propias. Esto se reflejó en la diversidad de enfoques adoptados por los grupos de estudiantes y en su capacidad para reformular preguntas, validar resultados y explorar escenarios alternativos en el contexto de optimización de inventarios.

* La IA facilitó la generación de preguntas derivadas, convirtiendo a los estudiantes en actores activos del Recorrido de Estudio e Investigación (REI) y fomentando la problematización de conceptos matemáticos y económicos.

* Las interacciones con IA potenciaron la argumentación y la exploración conceptual, haciendo más fluido el tránsito entre la resolución algorítmica (cálculo de Q^* , derivadas, optimización) y la interpretación económica (costo total, costo marginal, inventario promedio).

*Se observaron diferencias entre los chatbots: ChatGPT ofreció explicaciones detalladas y cálculos completos, mientras que Gemini priorizó recomendaciones textuales y referencias externas.

*El uso de IA como copiloto cognitivo contribuyó a reducir errores conceptuales, consolidar la autonomía en la modelización y facilitar la integración de las organizaciones matemáticas (OM) con las organizaciones económicas (OE) en un marco co-disciplinar.

7. Conclusiones

La evolución del REI, desde la pregunta generatriz hasta la construcción y consolidación de un modelo analítico completo de inventario, demuestra que la IA es un recurso didáctico potente cuando se utiliza con un enfoque crítico y pedagógico. La combinación de teoría matemática (derivadas, funciones, optimización), análisis económico (costo total, costo marginal, tamaño de lote) y reflexión grupal, mediada por IA, permitió fortalecer la comprensión de la relación matemática-económica y abrir nuevas perspectivas para la enseñanza universitaria en contextos tecnológicos.

Estos resultados refuerzan la idea de que la IA no es una herramienta aislada, sino una mediadora didáctica estratégica, que junto al docente posibilita la creación de entornos de aprendizaje más

participativos, contextualizados y efectivos, consolidando la autonomía del estudiante y favoreciendo la generación de praxeologías emergentes dentro del marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD).

Referencias Bibliográficas

- Campos, O. A. (2021). *La enseñanza de la matemática y su relación con otras ciencias*. Revista Guatemalteca de Educación Superior, 5(1), 127-134.
<https://doi.org/10.46954/revistages.v5i1.80>
- Castillejos López, B. (2022). *Inteligencia artificial y entornos personales de aprendizaje: atentos al uso adecuado de los recursos tecnológicos de los estudiantes universitarios*. Universidad del Mar (Campus Huatulco) – México
- Chevallard, Y. (2004). *Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire*. Journées de Didactique Comparée, Lyon.
- Parra, V. & Otero, M. R. (2017). *Enseñanza de la matemática por recorridos de estudio e investigación: indicadores didáctico-matemáticos de las “dialécticas”*. Educación Matemática. 29(3), 9-50.
- Pochulu, M. D. [Marcel David]. (2024, mayo 8). *Seminario Latinoamericano de Colaboración sobre el Enfoque Onto-Semiótico* - Edición del 8 de mayo de 2024 [Video]. YouTube.
<https://m.youtube.com/watch?v=rkEBxwu-GMc>
- Bittinger, M. L. Cálculo para Ciencias Económico-Administrativas. Pearson Educación de Colombia Ltda, 2002.
- Novelli, A. y Elli, E. Cálculo con aplicaciones a la economía. Impreso en Argentina, 2003. ISBN: 987 – 43 – 5795 – 9

PRÁCTICAS MATEMÁTICAS ESCOLARES SOBRE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

M. Paula Trillini - Mauro F. Nicodemo

Universidad Nacional de Hurlingham

Tte. Manuel Origone 151. Villa Tesei

Escuela Secundaria Scholem Aleijem

Gurruchaga 358, C1414DHH Cdad.

Autónoma de Buenos Aires

maria.trillini@unahur.edu.ar

Categoría del trabajo: Relatos de experiencias de enseñanza

Nivel educativo: Secundario

Palabras claves: Transposición Didáctica - Simetría - Periodicidad - Gestión docente

Resumen

En esta comunicación nos proponemos describir y caracterizar algunas producciones de estudiantes realizadas en el marco de un recorrido de enseñanza sobre Funciones Trigonométricas. Uno de nuestros objetivos es reflexionar acerca de las prácticas matemáticas que dicho recorrido favoreció desplegar, en relación a las prácticas matemáticas académicas. Para esto se considerará la situación específica sobre la que tratan los problemas, la gestión del docente y el contexto institucional, elementos esenciales para analizar un proceso transpositivo. Las producciones de los estudiantes que se analizan fueron realizadas a propósito de una situación de evaluación al finalizar un tramo del trayecto de enseñanza.

Introducción y elementos teóricos de referencia

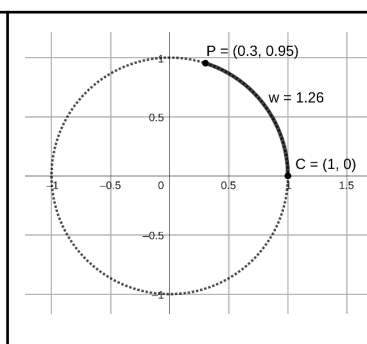
En este trabajo se describen y caracterizan algunas prácticas matemáticas producidas por estudiantes en el marco de un recorrido de enseñanza sobre Funciones Trigonométricas. En dicho recorrido se trabajó sobre una secuencia de problemas¹ con una característica distintiva: todos ellos se refieren a una situación con componentes dinámicos definida en el plano cartesiano, construida con la intencionalidad didáctica de resignificar y/o construir las nociones de simetría y periodicidad para el estudio de las funciones trigonométricas. Si bien

¹ Esta secuencia fue diseñada sobre la base de distintas producciones de materiales para el aula y de formación docente, todas ellas tomaron como referencia el capítulo 2 del libro *Trigonometry: a functional approach*. (Ambrose, 1973).

esta situación fue diseñada en referencia a una de las maneras como se suelen definir académicamente estas funciones², consideramos que resulta necesario detenerse a analizar las relaciones que guardan la situación y la definición, así como a identificar las que existen entre las producciones que realizaron los estudiantes y las prácticas matemáticas académicas de referencia. A su vez, nos proponemos reflexionar acerca de cómo las características de la situación, enmarcada en ciertas condiciones didácticas, permitieron el despliegue de las prácticas matemáticas de los estudiantes.

La situación se describe inicialmente antes del primer problema de la secuencia.

Se presenta una circunferencia centrada en el origen de coordenadas, cuyo radio mide 1 unidad. A partir del punto $C = (1;0)$, se desplaza el punto P sobre la circunferencia en sentido antihorario, como si se enrollara un hilo de longitud w alrededor de la circunferencia.



Luego de esta presentación, en una primera parte, la secuencia propone el estudio de la relación entre distintos valores de w y las coordenadas del punto P correspondiente. A continuación, en una segunda instancia, el estudio se orienta sobre la variación de las coordenadas del punto P en función de la variación de la longitud del arco. El objetivo general es definir y estudiar las funciones trigonométricas y sus características fundamentales: la simetría y la periodicidad.

No es nuevo señalar que los saberes enseñados son el resultado de procesos transpositivos. Los saberes de referencia u objetos de saber sufren transformaciones al convertirse en objetos a enseñar y, posteriormente, en objetos de enseñanza (Chevallard, 2009). En acuerdo con lo que propone Chevallard, consideramos que es necesario realizar una vigilancia epistemológica de los procesos transpositivos, estudiar la “distancia” que existe entre el objeto de enseñanza y el objeto matemático de referencia. En palabras del autor, debemos hacernos y responder la pregunta “¿El objeto de enseñanza es *verdaderamente* diferente del objeto de saber al que responde?” (Chevallard, 2009, p. 47).

La situación sobre la que se propuso el trabajo en el aula y la manera en la que habitualmente se definen las funciones trigonométricas tienen similitudes y diferencias. En los dos casos se establecen relaciones sobre longitudes de arco de la circunferencia unitaria centrada en el

² Se definen las funciones trigonométricas en $\mathbb{R}$ coseno(x) y seno(x) como la abscisa y la ordenada, respectivamente, de un punto P perteneciente a la circunferencia unitaria centrada en el origen de coordenadas, siendo x la longitud del arco de la circunferencia comprendido entre los puntos $(1;0)$ y P . Si el valor de x está fuera del intervalo $[0;2\pi)$, $\cos(x)=\cos(x_0 + 2\pi \cdot k)$ con $k \in \mathbb{Z}$ y $x_0 \in [0;2\pi)$.

origen del plano cartesiano y las coordenadas de sus puntos terminales. Sin embargo, mientras que la definición académica se realiza por medio de una relación “punto a punto”, que podemos caracterizar como estática, la situación propone considerar el desplazamiento de un punto sobre la circunferencia y la longitud del arco que recorre, lo que le imprime características dinámicas³. Como ya mencionamos, en este trabajo nos proponemos analizar cómo estas características se constituyeron como puntos de apoyo fructíferos para el aprendizaje de los estudiantes.

Pero en los procesos transpositivos operan otros factores además de los problemas, entre los que se encuentran las decisiones didácticas del docente, los recursos disponibles, el grupo de estudiantes y las condiciones institucionales. En este sentido, para poder comprender por qué el recorrido de enseñanza favoreció el despliegue de las prácticas matemáticas que nos proponemos analizar, pasamos a realizar una descripción del contexto matemático institucional y de la gestión del docente en el aula.

Las producciones de los estudiantes se realizaron en un aula del último año del colegio Scholem Aleijem, escuela secundaria de gestión privada de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires. En esta institución los profesores del área de matemática conforman un equipo de trabajo que se propone construir criterios didácticos compartidos sobre la enseñanza, la evaluación y el acompañamiento de las trayectorias. Uno de los objetivos prioritarios de la escuela es promover un rol activo de producción matemática por parte de los estudiantes, para lo cual el coordinador y los docentes buscan que la enseñanza se focalice en situaciones de generalización, de deducción y de validación a partir de la resolución de problemas.

En particular en el recorrido de enseñanza que nos ocupa, para el análisis de las producciones de los estudiantes, resulta relevante destacar que el docente restringió el uso de la calculadora y sostuvo de manera constante la utilización de la circunferencia trigonométrica y la acción de enrollar o desplazarse sobre ella, con la convicción de que se constituirían como un apoyo para construir conocimientos sobre la simetría y la periodicidad.

Análisis de las producciones

Las producciones que se exhiben más adelante forman parte de un conjunto de datos más amplio que fue registrado durante el recorrido de enseñanza. En una primera etapa, se hicieron observaciones de las clases, en las cuales se tomaron notas para luego poder identificar episodios que fueran relevantes para el análisis. En una segunda etapa, se recopilaron producciones de los estudiantes mediante el registro fotográfico, las cuales fueron

³ Los términos “estático” y “dinámico” los utilizamos en el sentido en el que Ruiz Higuera (1994) los utiliza para caracterizar diferentes concepciones de las funciones.

realizadas a propósito de una situación de evaluación escrita que se realizó al terminar de trabajar con la primera parte de la secuencia.

Problema 1

a) Proponé una longitud de arco en la Circunferencia Trigonométrica que tenga el mismo coseno que $\frac{7}{6}\pi$.

b) Sin usar calculador, determiná cuáles de estos valores son positivos y cuáles son negativos.

i) $\sin\left(\frac{5}{4}\pi\right)$

ii) $\cos\left(-\frac{7}{4}\pi\right)$

iii) $\sin\left(\frac{8}{5}\pi\right)$

iv) $\cos\left(\frac{14}{5}\pi\right)$

Nos proponemos analizar cuatro producciones desde una perspectiva cualitativa de carácter descriptivo–interpretativo. Nuestro análisis se focaliza en identificar cómo los estudiantes ponen en juego las características dinámicas de la situación en relación con nociones de simetría y periodicidad al resolver. Para ello consideraremos el uso de representaciones en las que se apoyaron los estudiantes.

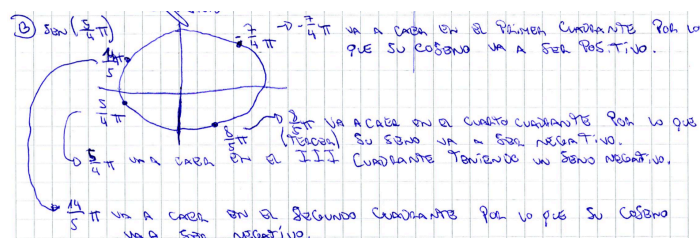


Imagen 1

En la producción correspondiente a la Imagen 1, a partir del texto “ $-\frac{7}{4}\pi$ va a caer en el primer cuadrante por lo que su coseno va a ser positivo” se puede interpretar que el estudiante deduce el signo de $\sin\left(-\frac{7}{4}\pi\right)$ poniendo en juego nociones vinculadas a movimientos, ya sea enrollando un hilo o desplazando un punto, en relación con la frase “va a caer en”. Otra cuestión a destacar es que la precisión con la que el estudiante dibujó la circunferencia y marcó los puntos le resulta suficiente para que se constituyan como un apoyo para realizar razonamientos válidos y obtener conclusiones correctas.

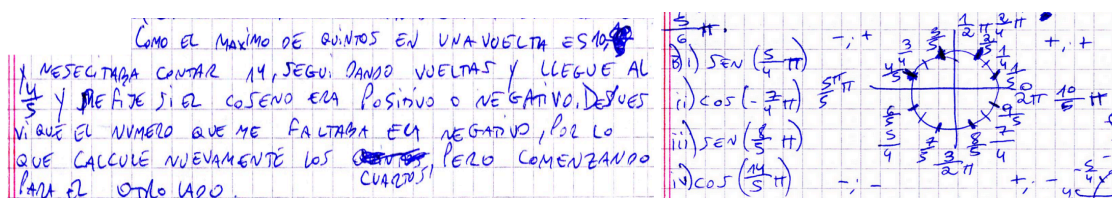


Imagen 2

En la producción de la imagen 2 también se utiliza un dibujo como apoyo, pero en este caso pareciera, por las marcas sobre la circunferencia, que el estudiante considera que es necesario que tenga una mayor precisión, en particular para determinar en qué cuadrantes se ubican los quintos de π . En el texto describe que para determinar el signo del coseno de $\frac{14}{5}\pi$, “como el

máximo de quintos en una vuelta es 10 y necesitaba contar 14, seguí dando vueltas y llegué al $\frac{4}{5}$ ”, lo que se constituye como evidencia de que para resolver puso en juego nociones vinculadas a la periodicidad apoyado en la idea de movimiento. Para validar su resolución utiliza que al “contar 14” “llega” “al $\frac{4}{5}$ ” y determina el signo de $\cos\left(\frac{14}{5}\pi\right)$ según el signo de $\cos\left(\frac{4}{5}\pi\right)$, al identificar que los arcos $\frac{14}{5}\pi$ y $\frac{4}{5}\pi$ tienen el mismo punto terminal. Con respecto al uso del dinamismo de la situación, también se puede destacar la estrategia que emplea para el valor negativo $-\frac{7}{4}\pi$: “después vi que el número que me faltaba era negativo, por lo que calculé nuevamente los cuartos, pero comenzando para el otro lado”.

Las siguientes dos producciones corresponden a otro tema de la misma evaluación. En el ítem a), en lugar del coseno de $\frac{7}{6}\pi$ se solicitaba hallar un arco con el mismo seno que $\frac{7}{6}\pi$. En el ítem b), se pedía determinar el signo de los valores que se ven en la imagen.

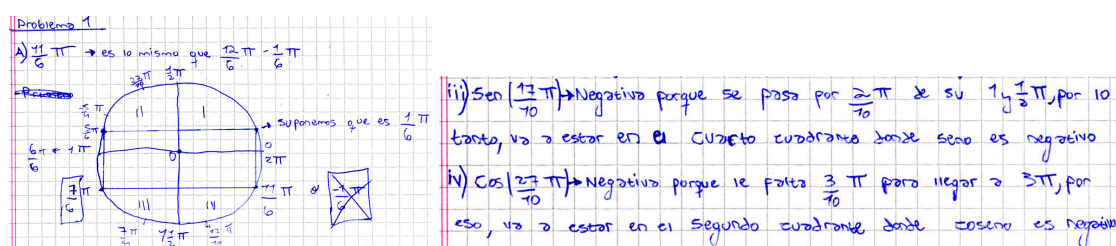


Imagen 3

La producción de la Imagen 3 es otro caso en el que se puede reconocer que un estudiante pone en juego nociones vinculadas a la periodicidad. En la respuesta del ítem iv) expresa que a $\frac{27}{10}\pi$ “le falta $\frac{3}{10}\pi$ para llegar a 3π ”, deduce que “por eso, va a estar en el segundo cuadrante” y valida que su coseno es negativo. Sin embargo, no hace referencia a la posición del punto correspondiente a 3π , lo que permite interpretar que considera de manera implícita que se trata del $(-1, 0)$ debido a que los arcos de longitud π y 3π son coterminales. El estudiante podría estar reconociendo esto como un caso particular de una generalización realizada durante las clases: todos los arcos cuyas longitudes son “múltiplos impares” de π son coterminales.

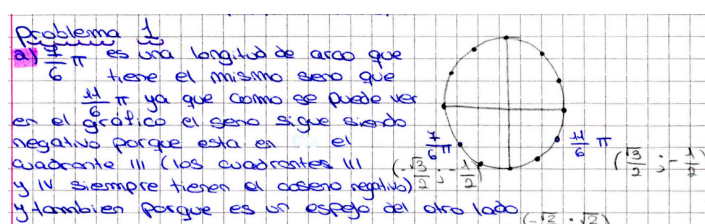


Imagen 4

En la producción que se muestra en la Imagen 4 el estudiante hace uso de la noción de simetría vinculada a la idea de reflejo sobre un espejo, lo que explicita en su discurso. Sin embargo, este hecho no permite descartar que también haya puesto en juego alguna idea asociada al movimiento de manera implícita al resolver. También podría ser que haya elaborado conclusiones generales sobre la simetría del seno y del coseno a partir del trabajo con los movimientos.

Reflexiones finales

En primer lugar, consideramos que en las producciones de los estudiantes se pueden identificar prácticas matemáticas epistemológicamente próximas a las académicas vinculadas a las Funciones Trigonométricas. Por ejemplo, los estudiantes utilizaron nociones de simetría y periodicidad sobre circunferencias para calcular senos y coseno, para determinar sus signos y para validar sus respuestas por medio de estimaciones, deducciones y generalizaciones. Si bien esta proximidad entre ambas prácticas se puede explicar en parte por las relaciones que guarda la situación sobre la que se proponen los problemas y la definición académica de referencia, creemos que son las condiciones didácticas las que completan dicha explicación. Por ejemplo, fue la gestión del docente sobre la base de los conocimientos disponibles y el dinamismo de la situación lo que permitió que los estudiantes adaptaran a la circunferencia trigonométrica conocimientos sobre la suma y la resta como “avance” y “retroceso” en la recta numérica. En este mismo sentido, consideramos que los estudiantes pudieron utilizar las representaciones en el modo en el que se emplean las figuras de análisis gracias a sus conocimientos sobre ellas y a la reflexión que promovió el docente durante las clases.

En conclusión, afirmamos que la proximidad epistémica se dio bajo ciertas condiciones didácticas en cuanto a la secuencia de problemas, la gestión del docente, los conocimientos de los estudiantes y el contexto institucional.

Bibliografía de referencia

- Ambrose, W. (1973). *Trigonometry: a functional approach*. Merrill Publishing.
- Chevallard, Y. (2009). *La transposición didáctica*. Aique Grupo Editor.
- Ruiz Higuera, L. (1994). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función. Análisis epistemológico y didáctico*. [Tesis de doctorado, Universidad de Granada]. https://www.ugr.es/~fqm126///tesis/Tesis_LRuiz-Higuera.pdf.

EL CONCEPTO DE ÁREA EN LA FORMACIÓN DE DOCENTES PARA LA EDUCACIÓN PRIMARIA: UNA EXPERIENCIA MÁS ALLÁ DE LA APLICACIÓN DE FÓRMULAS

Cinthia Noelia del Valle Vides

Universidad Nacional de Salta- Facultad de Cs. Exactas

Av. Bolivia 5150-Salta Capital

cinthia.vides@exa.unsa.edu.ar

Categoría del Trabajo: Relatos de experiencias (de enseñanza o formación)

Nivel Educativo: Superior no Universitario

Palabras clave: Área, material concreto, formación docente, enseñanza de la medida.

Resumen

En la formación docente para la Educación Primaria, resulta fundamental que los futuros maestros comprendan los conceptos matemáticos más allá del uso mecánico de fórmulas. Esta comunicación presenta una experiencia realizada en la asignatura *Matemática y su Didáctica II* del Profesorado de Educación Primaria, carrera que se dicta en el IES N°6017 de la provincia de Salta. El objetivo de la experiencia fue que los estudiantes diseñaran actividades para enseñar el concepto de área utilizando material concreto. Para ello, se trabajó inicialmente con la obra *Superficie y Volumen: ¿algo más que el trabajo con fórmulas?* de Editorial Síntesis.

La consigna planteada buscó promover entre los estudiantes del profesorado la comprensión del área como magnitud, favoreciendo la argumentación y la exploración en contextos variados, evitando reducir la enseñanza a la simple aplicación de fórmulas sin cuestionar su fundamento. Durante la experiencia, los estudiantes de nivel superior trabajaron en grupos, diseñaron consignas para el aula de primaria y reflexionaron sobre sus decisiones didácticas. Se describen el proceso de trabajo, algunas de las producciones obtenidas y los aportes y desafíos que emergieron.

Introducción

La enseñanza del área en la escuela primaria suele centrarse en la aplicación directa de fórmulas, lo que limita la comprensión profunda de este concepto. Por eso, en la formación de futuros docentes es importante fomentar estrategias que promuevan la exploración y el uso de

materiales concretos para construir significados, de manera que ellos mismos puedan comprender el concepto de área como magnitud más allá de aplicación de fórmulas de cálculo. Los participantes de esta experiencia fueron los estudiantes de la asignatura Matemática y su Didáctica II, correspondiente al segundo año de la carrera Profesorado de Educación Primaria del IES N° 6017 de la provincia de Salta. A dichos estudiantes se les pidió diseñar actividades para enseñar el concepto de área con recursos manipulativos, evitando el uso prematuro de fórmulas, en consonancia con marcos teóricos analizados en la asignatura. El objetivo fue incentivar una reflexión crítica sobre las prácticas didácticas tradicionales entre los estudiantes del profesorado y generar a partir de ella propuestas más significativas para el nivel primario. De manera que los estudiantes de este nivel pudieran comprender el concepto en cuestión más allá de la mera resolución de cálculos que implican el uso de las fórmulas de área de las figuras planas más conocidas.

Fundamentos teóricos

La Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau analizada por Panizza (2003) sostiene que el aprendizaje matemático se construye cuando el alumno enfrenta una situación problemática que lo desafía a buscar estrategias y validar sus respuestas. Esta teoría distingue diferentes procesos, entre ellos la institucionalización, en la cual el docente retoma las producciones de los estudiantes y las vincula con el saber matemático oficial. En el caso del área, este momento permite pasar de procedimientos informales, como el conteo de unidades, a la introducción y justificación de las fórmulas, evitando que aparezcan como reglas descontextualizadas. Por su parte, en Sadovsky (2005) Brousseau enfatiza en la noción de interacciones, particularmente la interacción entre el estudiante y el docente en relación a una situación-problema. Teniendo en cuenta esto, se acompañó el desarrollo de las propuestas de los estudiantes de nivel superior, por medio de preguntas y sugerencias que los llevaran continuamente a preguntarse si los problemas seleccionados para el nivel primario realmente permitían construir el concepto que ellos pretendían.

En sintonía con este enfoque, el Diseño Curricular de Educación Primaria de la provincia de Salta plantea que la enseñanza de las magnitudes y medidas debe promover experiencias que permitan a los alumnos comprender qué significa medir, explorar diferentes estrategias y reconocer la función de las unidades antes de trabajar con fórmulas estandarizadas. Por su parte, el Diseño Curricular del Profesorado de Educación Primaria para la provincia de Salta (Res. 1229/19) enfatiza que los futuros docentes deben desarrollar capacidades para analizar, seleccionar y diseñar propuestas didácticas que favorezcan la construcción conceptual y la diversidad de estrategias en la resolución de problemas. Estas orientaciones justifican que,

durante la formación docente, se propongan experiencias que impliquen el diseño de actividades coherentes con los lineamientos de la educación primaria.

Por otra parte el libro de Del Olmo, Moreno y Gil (1993) ofrece ejemplos concretos en esta dirección: cubrir figuras con cuadrados u otras unidades para estimar y calcular áreas, comparar resultados según el tamaño de la unidad, y descomponer figuras complejas en otras más simples para analizar equivalencias de áreas. Estas propuestas favorecen la argumentación y la reflexión sobre las propiedades del área, más allá del uso mecánico de fórmulas dadas de antemano por el docente.

Desarrollo de la experiencia

Esta propuesta de trabajo se desarrolló dentro del *Trabajo Práctico N° 2: Perímetro y área de figuras planas. Volumen de Cuerpos geométricos. Equivalencias de unidades*, en tres instancias:

1. Lectura del Capítulo 2: Indicaciones para la enseñanza del área de Superficie y Volumen ¿Algo más que el trabajo con fórmulas? Las preguntas orientadoras para realizar la síntesis fueron las siguientes:

- ¿Cómo se construye el concepto de superficie más allá del uso de fórmulas?
- ¿Qué dificultades tienen los alumnos al comparar o medir superficies?
- ¿Qué actividades o recursos concretos se proponen para trabajar el área desde lo visual y lo manipulativo?

En clase se socializaron las ideas escritas por los estudiantes de nivel superior. En general, el grupo resaltó las ideas mencionadas en los fundamentos teóricos de esta comunicación.

2. Diseño de una actividad para la enseñanza del área. La consigna de la actividad evaluativa pretendía que los alumnos:

- Organizados en grupos, seleccionen un contenido vinculado al tema *Área de figuras planas y equivalencia de áreas*, para ser enseñado partir de una actividad en la que utilice material concreto (por ejemplo, fichas de cartulina, recortes, cuadrículas u otros recursos manipulativos).
- Realicen un plan de clase para enseñar el contenido elegido, en el que se incluya: una breve fundamentación, el objetivo específico de la clase, los recursos que son necesarios para el desarrollo de su clase, el eje y el año al que pertenece el contenido según el DCJ, las actividades a desarrollar por los alumnos de primaria (UN problema o actividad), la resolución de dicha actividad indicando los momentos de acción, formulación y validación

y una descripción de como realizarían la institucionalización explicitando la teoría que quedará registrada en las carpetas de los alumnos.

Los estudiantes trabajaron en equipos, seleccionando materiales y definiendo la consigna dirigida a los alumnos de educación primaria. La siguiente tabla presenta tres propuestas junto con algunas observaciones, las cuales están diseñadas para resolverse en grupo.

Enseñanza de la fórmula del área del rectángulo

Cada grupo recibe un trozo de cartulina junto con cuadraditos de 1cm de lado como se muestra en la parte de arriba de la imagen.

Actividad

Mariela quiere hacer un mosaico rectangular usando cuadrados de color, cuyos lados miden 1cm.

La región rectangular que quiere cubrir con los cuadrados tiene 9 cm de largo y 6 cm de ancho. Realicen el mosaico en la cartulina y determinen cuantos cuadraditos tendrá el mosaico de Mariela.

Observaciones: En esta actividad se busca institucionalizar la fórmula $A = b \cdot a$. Fue propuesta para un 5to grado.

Se les hizo la observación de que si lo que se busca es que los estudiantes de primaria armen su mosaico rellenoando el rectángulo con los cuadraditos de 1cm de lado y vean cuantos cuadraditos entran a los largo y a lo ancho, deberían darle una cartulina lisa con el rectángulo dibujado. Luego, que ellos armen el mosaico y que mediante el procedimiento que consideren conveniente encuentren la cantidad de cuadraditos que entran en el rectángulo sin darles los datos de las medidas del lado del rectángulo.

El grupo destacó en su fundamentación que se toma como saber previo la “multiplicación en problemas de organización rectangular”, teniendo en cuenta los aportes de Broitman e Itzcovich (2001). Estos autores plantean una entrada a la multiplicación en 3er o 4to grado, por medio de problemas de baldosas, de filas y columnas (como los de asientos del cine, butacas para un acto escolar, departamentos en un portero eléctrico, etc.) y además mencionan, precisamente, que este tipo de problemas posteriormente pueden servir para la enseñanza del área

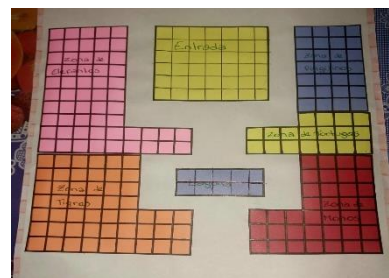


Introducción a las fórmulas del área del cuadrado y del rectángulo

Actividad

La hoja asignada a cada grupo constituye el plano de un zoológico realizado a escala (cada cuadradito tiene 1cm de lado, equivalente a 1m de lado).

- ¿En cuántas zonas se divide el zoológico en total?
- ¿Pueden reconocer algunas figuras geométricas en las distintas zonas? ¿Qué figuras?
- ¿Cuántos cuadraditos contaron en cada zona del zoológico? ¿Cómo realizan los cálculos?



Observaciones: Esta actividad fue planteada para un 5to grado y permite institucionalizar las fórmulas de área del cuadrado ($A = l^2$) y del rectángulo ($A = b \cdot a$)

Enseñanza de la fórmula del área del hexágono

Actividad

- Recorta el hexágono de cartulina dado
- Mide el lado del hexágono y anótalo.
- Divide el hexágono en 6 partes iguales y recórtalas.
¿Qué formas tienen esas figuras resultantes?
- Calcula el área de cada una de las figuras resultantes.
- A partir de lo anterior ¿Cuánto vale el área del hexágono?



Observaciones: Esta actividad fue planteada para un 7mo año. Con este problema se busca institucionalizar la fórmula de área del hexágono $A = \frac{Pa}{2}$ (P =perímetro, a =apotema) a partir de la descomposición de la figura en figuras mas simples (6 triángulos equiláteros) cuya área pueda calcularse. Para ello fue necesaria la medición con regla y estimación de la altura de los triángulos.

3. Devolución y desarrollo de una microclase: Cada grupo recibió su devolución de manera personalizada (por correo electrónico) y se escogió una de las propuestas (la primera que se describe en este documento) para que el grupo que la propuso desarrolló su microclase con el resto del grupo clase en el papel de alumnos de escuela primaria. Para ello, tomaron en cuenta las sugerencias recibidas.

Evaluación de la propuesta y desafíos emergentes

La experiencia permitió que los futuros docentes reflexionaran sobre la importancia de abordar el concepto de área como magnitud, evitando reducir su enseñanza a la aplicación de fórmulas, y generó propuestas valiosas e interesantes. Sin embargo, en algunos grupos persistió una concepción arraigada: considerar que el docente debe presentar la fórmula y luego proponer ejercicios para aplicarla. Esto pudo deberse a la forma en la que ellos recuerdan haber trabajado el área en el nivel primario y secundario y a cómo presentan el tema muchos libros de texto para el nivel primario, particularmente los distribuidos por el gobierno de la provincia de Salta.

Otro desafío detectado fue la dificultad para describir el proceso de institucionalización, es decir, cómo retomar y formalizar las producciones de los estudiantes de educación primaria para construir el saber matemático. Sin embargo, la realización de la microclase logró despejar bastantes dudas y los estudiantes tendrán la oportunidad de seguir trabajando en este aspecto en el resto del cursado.

Por otro lado, se observó una marcada preferencia por actividades centradas en la fórmula del área del rectángulo entre los grupos de trabajo, sin explorar otras posibilidades, pese a que el texto abordado presenta una amplia variedad de opciones para trabajar. Esto pudo deberse a que en internet son las propuestas que más abundan. En futuras experiencias podría considerarse la asignación de temas para diversificar las propuestas.

Finalmente, surgió la idea de incorporar instancias de análisis colaborativo entre pares, mediante la implementación de una dinámica en la que cada grupo publique su actividad en un espacio virtual (por ejemplo, Padlet) y reciba comentarios de otros grupos que incluyan, entre otras cosas, la resolución de dicha actividad. También podría pensarse en un espacio donde los grupos suban sus propuestas y que a cada uno de ellos le toque un documento para corregir siguiendo criterios previamente consensuados. Esta retroalimentación permitiría enriquecer las producciones y fortalecer la reflexión colectiva sobre las decisiones didácticas.

Bibliografía

- Broitman, C., & Itzcovich, H. (2001). *Orientaciones didácticas para la enseñanza de la multiplicación en los tres ciclos de la EGB* (Documento N.º 4). Ministerio de Educación de la Nación.
- Del Olmo, M., & Moreno, M. (1993). *Superficie y volumen: ¿algo más que el trabajo con fórmulas?* Editorial Síntesis.
- Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la Provincia de Salta. (s. f.). *Diseño curricular para la educación primaria de la Provincia de Salta*.
- Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la Provincia de Salta. (2019). *Diseño curricular del Profesorado de Educación Primaria* (Resolución 1229/19).
- Panizza, M. (2003). Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas. En M. Panizza (Comp.), *Enseñar matemática en el nivel inicial y el primer ciclo de la EGB* (pp. 59–71). Paidós.
- Sadovsky, P. (2005). La teoría de situaciones didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. En H. Alagia & A. S. Bressan (Eds.), *Reflexiones teóricas para la educación matemática* (pp. 13–68). Libros del Zorzal.

INTRODUCCIÓN AL TRABAJO CON MATRICES Y GRAFOS EN CIENCIAS EMPRESARIALES: UNA EXPERIENCIA BASADA EN REDES SOCIALES

Marcela Villagra^{1 2}, Rodrigo Moreno¹, Lucila Montaos¹

¹ **Facultad de Ciencias Empresariales, Universidad Austral**

² **Instituto de Ciencias, Universidad Nacional de General Sarmiento**

MVillagra@austral.edu.ar, RMoreno@austral.edu.ar, LMontaos@austral.edu.ar

Categoría del trabajo: Relatos de experiencias (de enseñanza o formación)

Nivel educativo: Universitario

Palabras Clave: Matrices, Grafos, Redes Sociales, Resolución de problemas

Resumen

Este trabajo presenta la implementación de una estrategia pedagógica innovadora para la introducción al trabajo de matrices y grafos en la asignatura de Álgebra y Geometría, materia inicial en las carreras de Ciencias Empresariales de la Universidad Austral. La propuesta busca abordar la problemática de la desmotivación estudiantil hacia la matemática mediante una metodología que vincula conceptos fundamentales del Álgebra Lineal con situaciones en contextos cercanos a los estudiantes.

La experiencia se centra en el abordaje de los conceptos de matrices y grafos a partir del análisis de redes sociales y redes de contactos como motivación inicial, lo que permite articular la teoría con ejemplos próximos a la realidad de los estudiantes. De este modo, se favorece la comprensión del valor práctico y aplicativo del Álgebra Lineal en contextos concretos, propiciando un aprendizaje más significativo y motivador de la disciplina. Los resultados preliminares basados en encuestas y en el rendimiento en los exámenes, evidencian una mejor apropiación de los conceptos abstractos. Además, también se observó que la modelización matemática contribuyó a modificar la percepción de la matemática como abstracta y alejada de la realidad profesional en los estudiantes de Ciencias Empresariales.

Introducción

La Matemática es una herramienta clave para estructurar el pensamiento, desarrollar la abstracción y reconocer patrones. Su valor radica en la capacidad de resolver problemas y diseñar estrategias que respondan a los desafíos actuales. En las Ciencias Empresariales,

resulta especialmente relevante ya que permite analizar la información, modelizar situaciones como así también fundamentar la toma de decisiones, aportando herramientas esenciales para la práctica profesional. Sin embargo, a pesar de su relevancia, en las aulas, nos encontramos con una cantidad significativa de estudiantes que manifiestan apatía y desmotivación frente al estudio de materias de matemática. Esto da signos de que la matemática suele ser percibida por los estudiantes como abstracta, lejana o poco vinculada con sus intereses. En la Facultad de Ciencias Empresariales de la Universidad Austral, esta problemática se intensifica cuando se abordan conceptos de Álgebra Lineal como matrices y grafos, fundamentales para el análisis de datos y la optimización de procesos organizacionales. La desconexión entre la presentación formal de estos contenidos y sus aplicaciones prácticas genera dificultades en la apropiación conceptual y limita el desarrollo de competencias analíticas necesarias en el ámbito profesional.

Frente a este escenario, durante el primer cuatrimestre del año 2025 se implementó una estrategia pedagógica innovadora que utiliza redes sociales como un contexto significativo para la enseñanza de matrices y grafos, articulando teorías constructivistas del aprendizaje y el aprendizaje por resolución de problemas con situaciones problemáticas cercanas a la experiencia de los estudiantes.

Marco teórico

Las clases fueron planificadas para lograr el objetivo de transmitir los contenidos matemáticos de matrices y grafos, como herramientas útiles para el análisis de datos y relaciones entre ellos, dirigidas a estudiantes de Ciencias Empresariales. Para su diseño se consideraron los enfoques de la didáctica de la matemática: Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) y la de Resolución de Problemas (TRP).

La TSD, desarrollada por Brousseau (1997) explica la construcción del conocimiento matemático a partir de la interacción con situaciones problemáticas diseñadas intencionalmente. Estas situaciones deben ser adidácticas, de modo que puedan resolverse a partir de conocimientos previos, mientras que la interacción docente se limita a la propuesta inicial. La TSD distingue situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización, con el objetivo de favorecer la construcción de un conocimiento autónomo y significativo.

La TRP sistematizada por Polya (1945) se centra en el desarrollo de habilidades de pensamiento crítico mediante la resolución activa de problemas, en lugar de la aplicación memorística de fórmulas o algoritmos. Según Polya, el aprendizaje ocurre cuando quienes

aprenden enfrentan situaciones desafiantes que requieren movilización de saberes previos y construcción de estrategias propias. Además, la teoría enfatiza la reflexión metacognitiva sobre los procesos de resolución, facilitando la transferencia de conocimientos a nuevas situaciones. En el ámbito universitario, Schoenfeld (1985) amplió estos principios, mostrando que la enseñanza centrada en la resolución de problemas favorece la autorregulación del aprendizaje y una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos.

Desarrollo de las clases

La secuencia se implementó en 5 cursos de la materia inicial Álgebra y Geometría de la mencionada institución y fue desarrollada en dos clases. La primera clase se inició con el problema de la "Red Social Viva La Amistad" que presenta un escenario relatable y concreto para los estudiantes. De acuerdo con Polya (1945) trabajar a partir de este escenario se vuelve motivador y facilita la comprensión de los conceptos abstractos, tales como, en nuestro caso, grafos. En esta clase a partir del problema, se trata de introducir la noción de grafos y los conceptos asociados al mismo. En la segunda, considerando el problema, se trabaja con la noción de matriz de adyacencia y se refuerzan los conceptos vistos anteriormente.

En el inicio de la primera clase se presenta la siguiente situación:

Abel, Betina, Carlos, Diana, Enrique y Florencia, son usuarios de la red social Viva La Amistad.

- 1 Entre estas personas sucede que cualquiera que sigue a otra es a su vez seguida por ella.
- 2 Abel, Carlos y Enrique se siguen entre sí porque participan de un grupo de fabricación de pan de masa madre.
- 3 Diana y Florencia se siguen entre sí por ser fans de Kevin Arnold.
- 4 Florencia, la más popular del grupo, sigue y es seguida por los otros cinco.
- 5 Diana se sigue con Carlos porque fueron compañeros del secundario.
- 6 Betina se sigue con Enrique porque son hermanos.

Con esto en mente, podemos plantear varias preguntas acerca de cómo se relacionan estas personas:

- ¿A quién nos convendría escribirle si queremos difundir una promoción?
- Según cómo se comuniquen entre ellos: ¿Podemos hacer que el mensaje llegue a toda la red sin tener que comunicarlo a cada uno por separado?, ¿Cuál es la mejor forma de hacerlo?
- ¿Cuánto puede tardar en llegar el mensaje de una persona a otra con la que no está directamente conectada?

Al comenzar con la resolución y tratando de organizar de una forma más visual la información, algunos estudiantes rápidamente representaron a los usuarios como puntos o identificándolos con la letra inicial de su nombre, y los conectaron con líneas o flechas, para señalar las relaciones entre ellos. En una de las comisiones, en cambio, apareció un cuadro de doble entrada con los usuarios en filas y columnas, marcando con cruces aquellos que estaban conectados. A partir de esta primera aproximación, observamos que comienzan a surgir implícitamente los conceptos de vértice y aristas, y la noción de matriz de adyacencia. Aparecen diferentes esquemas y conexiones, y se establecen algunos parámetros para la construcción de los mismos, reforzando la necesidad de procesar y sistematizar la información de manera eficiente, como por ejemplo planteando que las aristas no se crucen.

Luego se proponen diferentes preguntas para que el estudiantado pueda trabajar los conceptos, hacer hipótesis y contrastar con las nociones que se formalizarán al final de la clase.

La pregunta: *¿A quién nos convendría escribirle si queremos difundir una promoción?* introduce la noción de camino y su longitud, medida en cantidad de pasos para llegar de un nodo a otro. En el proceso de lectura del esquema del grafo surge la necesidad de encontrar, quién tiene mayores conexiones, cuáles son los caminos más cortos y qué nodos están más interconectados.

Las siguientes preguntas: *¿Podemos hacer que el mensaje llegue a toda la red sin tener que comunicarlo a cada uno por separado? ¿Cuál es la mejor forma de hacerlo?* fomentan un mayor análisis para identificar quienes son los usuarios más conectados o centrales dentro de la red. Estas cuestiones permitieron trabajar la noción de grado, la conectividad y la centralidad de cada vértice.

La última *¿Cuánto puede tardar en llegar el mensaje de una persona a otra con la que no está directamente conectada?* Sigue profundizando la noción de Caminos mínimos y el concepto de subgrupos ó Clustering qué son interesantes porque representan comunidades más cerradas dentro de la red.

Finalizando, se proponen ejercicios para aplicar y afianzar los conceptos aprendidos, tales como construir un grafo sin aristas que se crucen, identificar grafos isomorfos, determinar el grado de vértices y encontrar caminos entre vértices.

En la segunda clase, con la misma lógica, se retoma el problema planteado anteriormente pero se presenta desde otra perspectiva: las interacciones que proponen los grafos son representadas ahora en forma matricial. Se plantea la pregunta disparadora: *¿Cómo representarías las relaciones de seguimiento en un esquema sencillo?*

Desde un principio, al indicar que existen otras formas de representación además de los grafos, los estudiantes proponen una tabla de doble entrada que organiza la interacción entre los usuarios del problema planteado. Entonces, el concepto de matriz de adyacencia surge como un elemento práctico e intuitivo de cómo representar con 0 y 1 la conexión entre los vértices. Al analizar las particularidades de esta matriz, se trabaja el concepto de caminos de 1_trayectoria y se analiza la simetría de la misma, característica de los grafos no dirigidos. Para esto nos apoyamos en la visualización del grafo y cómo ver los caminos entre los vértices. Surge entre los estudiantes, la duda de si existen matrices que indiquen otros posibles caminos entre nodos, no necesariamente de un solo paso, planteándose así las potencias de la matriz de adyacencia.

Por último se trabaja con la matriz de adyacencia para grafos dirigidos y no dirigidos, así como también la matriz de accesibilidad y la noción de grafos conexos.

Con diferentes ejercicios propuestos en otros contextos, se muestra el alcance de estos conceptos en situaciones diversas que nos permiten sistematizar información de forma matricial lo cual nos simplifica el trabajo con grandes volúmenes de datos.

Descripción y resultados de la encuesta

Para evaluar la implementación de la secuencia didáctica, se realizó una encuesta a los estudiantes (160 encuestados), que tuvo por objetivo relevar sus percepciones sobre el trabajo con grafos y matrices, así como valorar la metodología de enseñanza utilizada. El instrumento combinó preguntas cerradas, orientadas a identificar conocimientos previos y apreciaciones generales sobre los contenidos, con preguntas abiertas que permitieron recoger valoraciones cualitativas sobre la utilidad y aplicabilidad de los temas abordados.

Podemos mencionar que el 89,9% de los encuestados no había tenido contacto con la noción de grafo previamente. Respecto de la utilidad de los grafos, las respuestas fueron diversas. La utilidad principal mencionada es la de representar y analizar relaciones (30,77%). El resto de las utilidades se centran en su uso para el análisis y la toma de decisiones estratégicas (13,61%), la visualización de datos complejos (11,83%) y la optimización de rutas y logística (10,06%). Con menor frecuencia se destacó su valor para la organización de la información (8,88%) y sus aplicaciones específicas en marketing y redes sociales (8,28%). Y un 16,57% manifestó poco conocimiento sobre los casos de uso.

En cuanto a la utilidad de las matrices, el consenso principal, reflejado en un 33% de las respuestas, es su función primordial para la organización y estructuración de datos en filas y columnas. Esta estructura ordenada es valorada por su capacidad para simplificar y visualizar la información (13%), permitiendo "ver los datos de una manera más clara". Más allá de la simple visualización, se destaca su rol para realizar cálculos y operaciones (11%) y, de forma muy específica, para resolver sistemas de ecuaciones lineales (10%). El propósito final de estas capacidades, según un 17% de las opiniones, es el análisis de datos para la toma de decisiones. Por otra parte, un 16% de las respuestas mostró desconocimiento sobre su valor. Respecto al interés sobre los grafos, un 56% afirmó que les resultó interesante el tema. Mientras que un 29,5% respondió "Tal vez", y un 14,5% que no.

Sobre las opiniones relacionadas al formato de la clase y el abordaje de los temas, el análisis de las respuestas muestra una aprobación mayoritaria del 49,1% hacia el formato teórico-aplicado, calificándolo como "interesante y llevadero". Por otra parte, al menos un

34,6% de los participantes expresó una demanda explícita de más aplicaciones y abordaje práctico. A estos grupos principales se suman minorías que preferirían una metodología diferente (8,8%) o un enfoque principalmente teórico (5%).

Conclusión

Este trabajo presentó una experiencia pedagógica diseñada para abordar con un enfoque contextualizado los elementos básicos del Álgebra Lineal en carreras de Ciencias Empresariales. A través de una secuencia de dos clases fundamentadas en las teorías de Resolución de Problemas y Situaciones Didácticas, se utilizó una situación contextualizada en redes sociales para introducir los conceptos de grafos y matrices. La evaluación, basada en una encuesta a 160 estudiantes, arrojó resultados mixtos pero esclarecedores: una mayoría valoró el formato como "interesante" (49,1%) y el tema atractivo (56%).

El uso de contextos significativos es una estrategia válida y efectiva para mejorar el interés y la motivación inicial de los estudiantes hacia temas matemáticos tradicionalmente percibidos como abstractos. En particular favorece la comprensión del valor práctico y aplicativo del Álgebra Lineal en contextos conocidos, generando un aprendizaje significativo que permite la apropiación de conceptos complejos.

Paralelamente, se observó que un contexto motivador favorece el aprendizaje, aunque surgieron demandas de mayor cantidad de situaciones contextualizadas donde se pongan juego los contenidos trabajados. Los estudiantes demandan abordar distintas situaciones de modelización y resolución de problemas, para mejorar su percepción de utilidad de la herramienta, un hallazgo que refuerza la importancia de la "Situación de Acción" de Brousseau.

Consideramos que el desafío no reside sólo en encontrar situaciones apropiadas para la aplicación de los conceptos, sino en diseñar experiencias donde se profundice el componente práctico. El refinamiento de este balance entre situaciones modelizables y una posterior ejercitación adecuada es ideal para transformar el interés inicial de los estudiantes en un aprendizaje significativo y duradero.

Bibliografía

- Brousseau, G. (1997). *Teoría de las situaciones didácticas*. Ediciones La Salle.
- Polya, G. (1945). *Cómo plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Resolución de problemas: El trabajo de Allan Schoenfeld*. Revista Educación Matemática, 4(2), 1-14.

Publicaciones de la REM: Reportes de Investigación

Esta sección contiene los trabajos que fueron presentados para ser expuestos durante la REM - UMA 2025 en la Sesión “Reportes de Investigación” y fueron aceptados por evaluadores para ser publicados.

El proceso de evaluación fue realizado por un conjunto de docentes e investigadores/as de todo el país y coordinado por el Comité Científico REM.

DISEÑO DE UNA GUÍA PARA ANALIZAR TAREAS PRESENTES EN LIBROS DE TEXTO DE MATEMÁTICAS DESDE EL ANÁLISIS DIDÁCTICO

Bolaños-González¹, H; Moreno², A. y Cruz³, M. F.

¹Universidad Nacional, Costa Rica. ²Universidad de Granada, España. ³Universidad de Córdoba. España

hellen.bolanos.gonzalez@una.cr

Categoría del trabajo: Trabajo de investigación

Nivel educativo: Primaria

Palabras claves: guía, tareas, libros textos, primaria

Resumen:

El propósito de este trabajo es describir el proceso de elaboración y validación de una guía de análisis de tareas de libros de texto de matemáticas en primaria utilizando como herramienta el análisis didáctico. Este es un estudio cualitativo de carácter descriptivo. El resultado es una guía de análisis de libros de texto de matemáticas que permite al docente reflexionar y cuestionar sus distintas tareas matemáticas. Para su elaboración se han empleado indicadores y descriptores del Análisis Didáctico. Durante la elaboración de la guía se implementaron ajustes en el formato y la estructura para mejorar su comprensión, incorporando además modificaciones derivadas de la revisión del marco teórico.

Introducción

El profesorado de muchos países emplea los libros de texto para fundamentar sus decisiones curriculares (Hooper et al., 2015; Castillo et al., 2021). El análisis didáctico (Rico y Fernández, 2013) de las tareas presentes en el libro de texto es, por tanto, relevante ya que juega un papel principal en la planificación docente y su posterior puesta en práctica. Además, la selección de la tarea está influenciada por la confianza de los docentes en sus habilidades matemáticas y por su conocimiento de la materia (Sullivan et al., 2010). De acuerdo a lo anterior se considera que es necesario plantear una guía que permita analizar la tarea presente en el libro de texto, de tal manera que el docente pueda evaluar la pertinencia de dicha tarea según el currículo y la realidad de aula. Nuestro objetivo es describir el proceso de elaboración y validación de una guía de análisis de tareas de libros de texto de matemáticas utilizando como herramienta el

Análisis Didáctico (Rico y Fernández, 2013) con el propósito de aportar al docente una herramienta que permita reflexionar sobre la tarea. Cabe mencionar que este trabajo aporta también al campo de la investigación en educación matemática una herramienta metodológica que describe los pasos a seguir para crear guías que permitan analizar libros de texto utilizando el Análisis Didáctico.

Marco teórico

Para la elaboración de la guía de análisis de tareas presentes en los libros de texto empleamos algunos de los análisis incluidos en el marco teórico del Análisis Didáctico (Rico y Fernández, 2013). Para estos autores, el Análisis Didáctico se ocupa de “aquellos textos que surgen de los campos conceptuales de la educación matemática, organizan sus ámbitos de actuación y regula su práctica” (p.13). Rico (2012) menciona que la “noción de análisis didáctico aporta un método de trabajo y reflexión para el estudio ordenado de los problemas didácticos, singularmente los problemas de la Didáctica de la Matemática” (p. 59).

El presente estudio se enfoca en los primeros tres análisis (contenido, cognitivo e instrucción) que se ocupan del diseño de la tarea. Rico et. al., (2013) menciona que “el análisis de contenido, el cognitivo y el de instrucción son análisis a priori, mientras que el de actuación es a posteriori” (p. 82). Es importante mencionar que el análisis de contenido se ocupa de los significados de los contenidos matemáticos, el contexto y el modo de uso del concepto matemático. Mientras que el análisis cognitivo se refiere a los organizadores del curriculum y finalmente, el de instrucción se vincula a la planificación e implementación.

Construcción del instrumento

Para la construcción del instrumento se consultó el trabajo de Rodríguez et al. (2021) en donde se propone un modelo basado en tres pasos, el primero es la revisión de la literatura, para vincular los indicadores del referente teórico con las variables del estudio. El segundo paso es el diseño del instrumento que se realiza a partir de la revisión de la literatura, creando un borrador en términos del constructo que se quiere analizar. Finalmente el tercer paso es la validación del contenido. Sin embargo para profundizar en esos tres pasos nos basamos en el trabajo de Maldonado-Suárez y Santoyo-Telles (2024) quienes profundizan y detallan más el proceso de construcción, lo que nos permite describir la construcción del instrumento llamado guía de análisis de tareas por medio del esquema propuesto en la Figura 1.

Para la definición del constructo se selecciona el tema y subtemas relacionados del contenido matemático específico, además se hace una revisión de los programas de estudio para tener claridad de la propuesta curricular, si este tema o contenido se desarrolla y en qué niveles escolares, cuál o cuáles son las expectativas de aprendizaje, entre otros elementos curriculares.

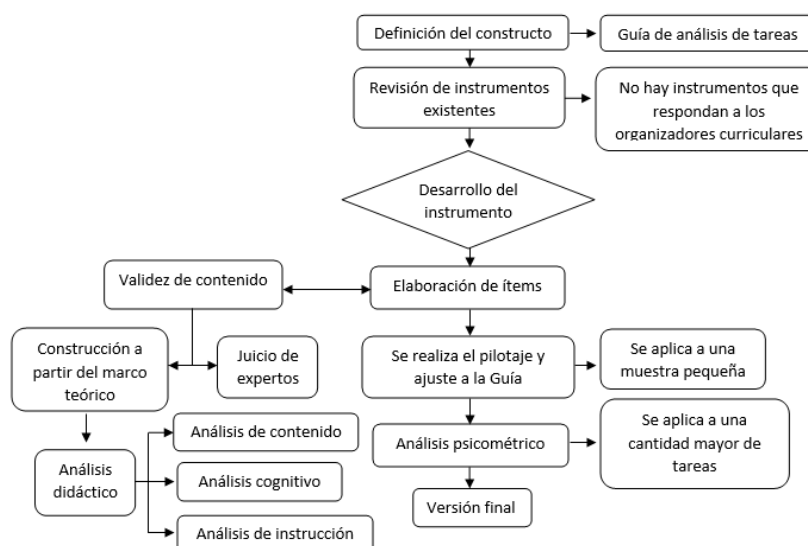


Figura 1. Esquema de construcción del instrumento

Fuente: Adaptación de Maldonado-Suárez y Santoyo-Telles (2024)

El siguiente paso es la revisión de la literatura para verificar si existen trabajos previos que nos permitan identificar posibles rutas de investigación e identificar instrumentos que respondan a los organizadores curriculares, en el caso de no identificar instrumentos que podamos utilizar, se continúa con la construcción del instrumento a partir del marco teórico, en este caso desde el Análisis Didáctico, ya que este emplea los organizadores curriculares y nos permite evaluar el ajuste curricular de las tareas presentes en los libros de texto.

El diseño del instrumento llamado guía de análisis de la tarea, tiene un primer apartado de datos generales como por ejemplo, el nombre del libro que se ha seleccionado, el nivel educativo, la unidad seleccionada, entre otros.

Los siguientes apartados de la guía tienen relación con los organizadores curriculares. En el diagrama de la Figura 2, se muestran los elementos de cada uno de los análisis, de tal manera que logremos identificar aspectos en la tarea que nos permita describirla. Es importante indicar que en la versión final de la Guía cada indicador tiene respuestas cerradas, lo que facilita la aplicación de la misma y posterior análisis de datos. Para crear estas respuestas cerradas se requiere revisión previa de las tareas, revisión del programa de estudios así como revisión del referente teórico del Análisis Didáctico descrito en apartados anteriores.

Al definir este paso, se hace una revisión previa de las tareas presentes en los libros de texto relacionadas con el contenido matemático y se seleccionan las tareas que se analizarán según el interés del investigador.

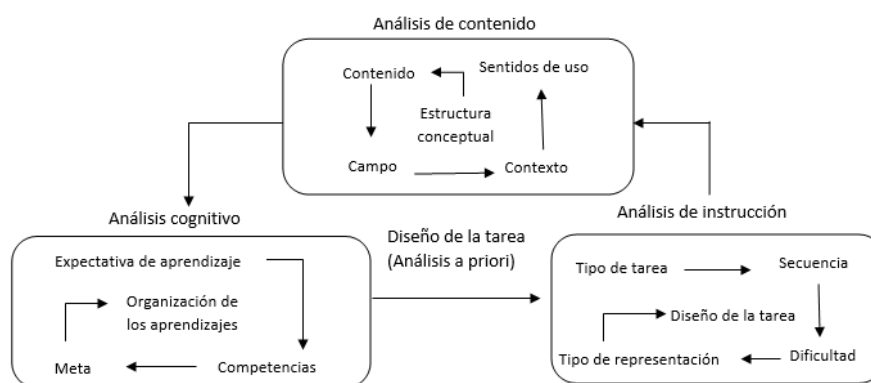


Figura 2. Indicadores del Análisis Didáctico descrito en la Guía

Fuente: Elaboración propia

Validación del instrumento

Parte del proceso de validación del instrumento es el pilotaje, el cual permite identificar y corregir detalles de redacción en los ítems a partir de la aplicación de la guía a una muestra pequeña de tareas. Como resultado de este proceso, se determinó la necesidad de definir con mayor precisión el referente teórico, lo que permitió mejorar la guía a través de las modificaciones realizadas. En este punto, se iniciaron los primeros cambios considerados necesarios a partir de la aplicación de la guía a una muestra de tareas seleccionadas del libro de texto de matemática en primaria. Estos cambios corresponden al formato y presentación de la guía, así como a fortalecer la base teórica del instrumento.

Desde el análisis psicométrico, la guía se adapta a una unidad de temática específica con el propósito de aplicar a un mayor número de tareas seleccionadas de un libro de texto de primaria en matemática tomando en consideración una unidad completa del libro, lo que nos permite reflexionar sobre la importancia de definir de una mejor forma cada indicador al que responde cada ítem, delimitando así cada respuesta, lo que facilita la aplicación de la guía a un mayor número de tareas. En consecuencia de ello, la guía se construye con respuestas cada vez más cerradas y contextualizadas al currículo específico.

En la siguiente etapa para garantizar la validez de la guía, se somete a la revisión de cinco expertos en el área. Según Maldonado-Suárez y Santoyo-Telles (2024) en la etapa de validación por juicio de expertos, se destacan algunos pasos que permiten guiar este proceso de validación de forma estructurada. De acuerdo a estos referentes se realiza una adaptación a nuestro propósito de estudio. A continuación se detalla cómo se aplicó el juicio de expertos para validar la Guía de Análisis de tareas presentes en libros de texto.

El primer paso consistió en definir el perfil de los expertos que examinaron el instrumento, el segundo paso consistió en valorar y contactar a potenciales expertos que cumplieran con nuestro

perfil ideal. Una vez identificado a los expertos, el tercer paso consiste en proporcionar el instrumento a evaluar, además se elabora un cuestionario para el juicio de expertos donde se detalla el objetivo de la investigación y el propósito del cuestionario, así como el referente teórico necesario para comprender la guía. Dicha guía tiene una sección de observaciones que el experto podría proporcionar en términos de suficiencia, claridad, coherencia o relevancia u otro aspecto que considere oportuno.

Finalmente, los resultados obtenidos en el juicio de expertos se organizaron en una hoja de cálculo de Excel, registrando las respuestas de cada experto en el cuestionario. Esto permitirá analizar las similitudes y diferencias entre las respuestas de cada ítem, identificando los puntos en los que los jueces coinciden, así como las discrepancias y las justificaciones ofrecidas por cada experto. Además, se destacan algunos aspectos relacionados con la relevancia, coherencia y claridad, señalados por los expertos para ser considerados en la mejora de la guía.

Consideraciones finales

Es importante evidenciar el proceso de construcción y validación de la Guía, el cual debe ser riguroso en cada una de las etapas donde los ítems son revisados, modificados o eliminados de acuerdo con los resultados obtenidos en cada una de ellas, siempre en busca de medir el constructo. En este trabajo se ha descrito la construcción de una guía de análisis de tareas presentes en los libros de texto implementando la teoría del Análisis Didáctico. Se ha logrado identificar indicadores y descriptores que permiten conocer el tipo de tarea presente en el libro de texto en concordancia con la propuesta curricular, por lo que amerita realizar adaptaciones el contexto del país donde se desee aplicar, es importante tener en cuenta las expectativas de aprendizaje, objetivos y competencias que las tareas deben reflejar.

En el proceso de construcción de la guía se evidenciaron cambios importantes tanto en el formato como en la estructura, con el propósito de favorecer una mejor comprensión. Asimismo, se realizaron ajustes basados en la revisión del marco teórico.

El poder aplicar la guía planteada en este trabajo requiere total adaptación al contexto en términos de análisis de contenido y cognitivo al considerar las demandas educativas de cada país. Otro aspecto de relevancia de esta publicación radica en que este tipo estudios permite verificar el grado de coherencia entre propuesta curricular y la propuesta de tareas que se presenta en los libros de texto.

En concordancia con Castillo et al. (2021) es importante el desarrollo de guías para el docente en las fases de diseño, implementación o evaluación que permita una didáctica orientada, así como abordar el análisis de un libro de texto no desde una perspectiva pedagógica sino del Análisis Didáctico de forma general y brindar insumos para la posterior adaptación a un

contenido matemático en concreto. Por lo anterior, se puede concluir que la guía de análisis de tareas se puede adaptar a cualquier tema matemático, así como al contexto país que se desee aplicar, lo que permite ser implementado por diversos docentes e investigadores según su realidad educativa.

Referencias bibliográficas

- Castillo, M. J., Burgos, M., & Godino, J. (2021). Elaboración de una guía de análisis de libros de texto de matemáticas basada en la teoría de la idoneidad didáctica. *Educação e Pesquisa*, São Paulo, 48, 1-25.
<https://www.scielo.br/j/ep/a/NXbLBWFwzFpfTSp97gYRjsh/?format=pdf&lang=es>
- Hooper, M., Mullis, I. V., & Ma, M. O. (2015). TIMSS 2015 context questionnaire framework. International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). TIMSS and PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.
https://timssandpirls.bc.edu/timss2015/downloads/T15_FW_Chap3.pdf
- Maldonado-Suárez, N., y Santoyo-Telles, F. (2024). Validez de contenido por juicio de expertos: Integración cuantitativa y cualitativa en la construcción de instrumentos de medición. *Revista d'innovació i Recerca En Educació*, 17(2).
<https://doi.org/10.1344/reire.46238>
- Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la matemática. AIEM. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1, 39-63.
<https://doi.org/10.35763/aiem.v1i1.4>
- Rico, L. y Fernández, A. (2013). Análisis Didáctico y Metodología de Investigación. *En Análisis Didáctico en Educación Matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 1-22). Comares.
- Rico, L. Lupiáñez, J. L., y Molina, M. (Eds.). (2013). Análisis didáctico en educación matemática. Comares.
- Rodríguez-Medina, M. A., Poblano-Ojinaga, E. R., Alvarado Tarango, L., González Torres, A., y Rodríguez Borbón, M. I. (2021). Validación por juicio de expertos de un instrumento de evaluación para evidencias de aprendizaje conceptual. *RIDE Revista Iberoamericana Para La Investigación y El Desarrollo Educativo*, 11(22).
<https://doi.org/10.23913/ride.v11i22.960>
- Sullivan, P., Clarke, D., Clarke, B., y O'Shea, H. (2010). Exploring the relationship between task, teacher actions, and student learning. *PNA*, 4(4), 133-142.
<http://hdl.handle.net/10481/4449>

MODELIZACIÓN ESPACIAL Y TECNOLOGÍAS DIGITALES: UNA INVESTIGACIÓN ACERCA DEL USO DE BLUE-BOT EN LA FORMACIÓN DOCENTE

Ana Inés Cocilova y Rafael Adrián Cornejo Endara

**Departamento de Matemática, Departamento de Ciencias de la Educación, Universidad
Nacional del Sur (UNS), Bahía Blanca, Argentina.**

cocilova@uns.edu.ar

Categoría del Trabajo: Trabajos de investigación

Nivel Educativo: Nivel Superior

Palabras Claves: educación superior, tecnología, medio didáctico, espacio sensible y espacio geométrico.

Resumen

Este trabajo presenta resultados parciales de una investigación orientada a analizar los efectos de la incorporación de tecnologías digitales en el medio didáctico, particularmente en relación con los procesos de estudio de la matemática en el nivel superior. El estudio se realizó en el marco de un taller desarrollado con estudiantes del Profesorado de Educación Inicial de la Universidad Nacional del Sur, centrado en una tarea de orientación espacial mediada por el robot educativo Blue-Bot. Desde la Teoría de las Situaciones Didácticas y los aportes de Salin y Berthelot, se analizaron los registros de las interacciones de las estudiantes en tres fases sucesivas. Los resultados muestran una evolución desde una modelización espacio-analógica, vinculada a la exploración corporal y topológica del espacio, hacia una modelización espacio-geométrica más estructurada, en la que emergen propiedades como el paralelismo y la perpendicularidad. Asimismo, se identificaron procesos de coordinación entre distintas representaciones (corporal, gráfica y digital) favorecidos por las retroacciones del medio. El

uso del Blue-Bot se reveló como un artefacto didáctico potente, que propicia la articulación entre acción, representación y codificación, promoviendo la validación autónoma y la ampliación espontánea de la tarea.

Introducción

Este trabajo está enmarcado en el proyecto de investigación titulado: “Análisis de la incorporación de las TIC en el medio didáctico y sus efectos en la constitución de comunidades de estudio en aulas de nivel superior y primario de la ciudad de Bahía Blanca”, el mismo está radicado en el Departamento de Ciencias de la Educación de la Universidad Nacional del Sur (UNS).

Para el proyecto nos hemos planteado como objetivo general: analizar los efectos que tiene la incorporación de las tecnologías en el medio didáctico. Ya que concebimos, al igual que autores como Balacheff (2000), Acosta Gempeler (2007) y Villarreal (2012), que el rol mediador de las tecnologías plantea nuevos modos de comunicación y de conocimiento, que posibilitan y afectan modos de ser, de vincularse, de pensar y de resolver problemas.

Particularmente en esta oportunidad abordaremos el siguiente objetivo específico: Caracterizar los procesos de estudio de la matemática de nivel superior cuando se incorporan al medio didáctico tecnologías. Para avanzar con este objetivo, hemos analizados los datos recolectados en el marco de un taller de formación propuesto a estudiantes del PEI de la UNS, que versa sobre tareas relativas al estudio del espacio, con mediación de Blue-Bot¹, propuesta a un grupo de diez estudiantes del PEI de la UNS. La socialización de estos análisis constituye el propósito del presente escrito.

Marco teórico

El trabajo se enmarca en la tradición francesa de la didáctica de la matemática, utilizando los aportes de la teoría de las situaciones didácticas (TSD) desarrollada por Brousseau (Fregona y Báguena, 2011). Particularmente hemos tomado los aportes de Salin (2004) y de Ruiz-Higueras, et al (2013) en relación con el estudio de la geometría y del espacio sensible.

En el trabajo presentado por Ruiz-Higueras, et al (2013) se expone que Berthelot y Salin (1992) distinguen los conocimientos espaciales como aquellos que permiten anticipar, controlar y comunicar informaciones sobre el espacio, fundamentales para que los individuos se puedan desenvolver de manera pertinente en el entorno físico. Estos saberes se manifiestan en situaciones cotidianas, como orientarse en una ciudad o estimar distancias sin medición

¹ <http://www.bnm.me.gov.ar/giga1/documentos/EL007135.pdf>

directa. A su vez estos autores diferencian el “espacio sensible”, accesible por los sentidos, del “espacio geométrico”, en tanto construcción teórica.

Por otra parte, se retoma de Ruiz-Higueras et al (2013) la clasificación propuesta por Berthelot y Salin (2005) sobre dos posibles perspectivas para la modelización del espacio: por un lado, la modelización espacio-analógica; por otro, la modelización espacio-geométrica.

El objeto empírico

Este estudio adopta un enfoque etnográfico de tipo descriptivo (Hernández Sampieri et al., 2006), orientado a caracterizar los quehaceres matemáticos y las interacciones didácticas surgidas en un taller en el que se proponen tareas espaciales que incorporan el Blue-Bot al medio didáctico. Para la construcción del objeto empírico se observó y registró (en formato de: audio, imágenes y video) un taller desarrollado con un grupo de diez estudiantes del PEI. Este taller fue seleccionado por constituir un escenario significativo en el que se ponen en juego procesos de exploración, representación y validación vinculados a la construcción del espacio geométrico.

El taller se inició con la presentación de una tarea mediante una diapositiva elaborada en PowerPoint (ver Figura 1).

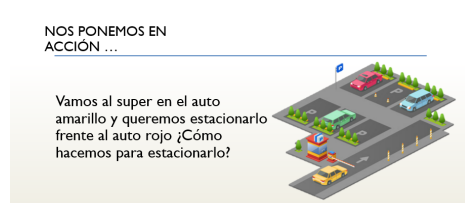


Figura 1: Captura de pantalla de la tarea propuesta.

En una primera fase, se propuso a las estudiantes representar la situación planteada mediante un croquis en el piso del aula, utilizando cinta de papel (Figura 2).



Figura 2: Representación de la situación realizada por las alumnas

Durante esta instancia, las alumnas exploraron corporalmente la situación, simulando ser autos en un estacionamiento. Algunas permanecieron en posiciones fijas, representando los vehículos estacionados, mientras que otra estudiante asumió el rol del “auto amarillo”, desplazándose desde el ingreso hasta ubicarse frente al “auto rojo”.

Una vez concluida esta representación corporal, se propuso un nuevo desafío: comunicar la trayectoria que resolvía el problema, utilizando una cuadrícula de 4×5 (proporcionada en una hoja A4) y fichas con flechas que simbolizaban los movimientos posibles del Blue-Bot.

En pequeños grupos, las estudiantes decidieron la ubicación del punto de partida y de los autos estacionados sobre la cuadrícula, y codificaron la trayectoria mediante las fichas de movimiento otorgadas por los docentes.

En la fase final, se invitó a trasladar la situación al entorno del Blue-Bot. Para ello, se les proporcionó un papel afiche con una cuadrícula de 4×5 (cuyos cuadrados medían 15 cm de lado), junto con imágenes de autos, una caseta de control y conos viales. Con estos materiales, las participantes representaron el estacionamiento y tradujeron las trayectorias diseñadas en comandos del robot, lo que les permitió poner a prueba, verificar y ajustar sus modelos de desplazamiento.

Primeros análisis

En la fase 1 cuando las alumnas se aprestan a realizar la subtask de modelizar con cinta de papel sobre el piso del aula, el croquis del estacionamiento, tomaron como referencias principales la ubicación del auto rojo y la barrera. A partir de las discusiones registradas, se advierte que, en un primer momento las alumnas se centraron en aspectos de la modelización espacio-analógica, con intercambiando ideas en torno a la posición relativa de los objetos: que elementos estaban más cerca o lejos, dentro o fuera del recinto entre otros. Estas consideraciones remiten a nociones topológicas vinculadas con la vecindad en el espacio.

En un segundo momento, el grupo ajustó el croquis atendiendo a propiedades geométricas, particularmente el paralelismo y perpendicularidad entre las líneas que delimitaban el estacionamiento. Consideramos que este pasaje del razonamiento topológico al geométrico evidencia una evolución en el tipo de relaciones espaciales que las estudiantes movilizaron durante la tarea.

En la fase 2, se observó que uno de los grupos, luego de modelizar el desplazamiento en la cuadrícula en papel, realizó una validación empírica de su modelo, al utilizar el croquis construido en el piso. Esta acción puede ser leída en clave de coordinación de las dos representaciones construidas hasta ese momento. El desplazamiento sobre el croquis les permitió realizar algunos ajustes a la modelización propuesta en papel. Esto lo podemos interpretar como una retroacción del medio “croquis” en términos de la teoría de las situaciones didácticas.

En la fase 3 se distinguen dos momentos relevantes. En primer lugar, las estudiantes programaron al Blue-Bot para que efectúe el recorrido programado en el modelo en papel.

Observamos que en algún caso cuando el robot no realizó el desplazamiento esperado, las alumnas reajustaron los comandos hasta lograr la trayectoria prevista, evidenciando así un proceso de validación mediada por la retroacción del artefacto.

En segundo lugar, surgieron nuevas formulaciones de problemas por iniciativa de las propias estudiantes, quienes se propusieron extender la tarea inicial. Por ejemplo, uno de los grupos planteó que el robot debía estacionar, permanecer unos segundos detenido y luego regresar al punto de partida. Este tipo de ampliación autónoma de la situación puede considerarse un indicio de funcionamiento a-didáctico, en tanto las estudiantes asumen la responsabilidad del control y la validación de su propia producción.

Frente a esta dinámica, el docente intervino solicitando el registro de los nuevos recorridos. Uno de los grupos, para hacerlo, abandonó la cuadrícula y elaboró una representación simbólica de los desplazamientos (ver Figura 3), lo que podemos interpretar como un avance en el proceso de codificación y abstracción del sistema de representación empleado.

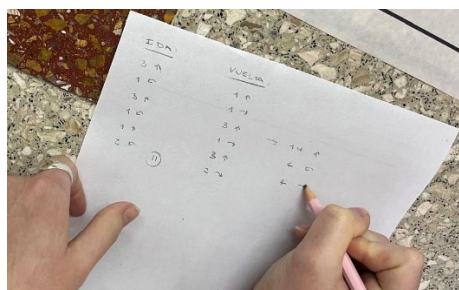


Figura 3 Representaciones simbólicas propuesta por alumnas

Reflexiones finales

El análisis de las tres fases del taller permite reconocer la dinámica evolutiva de las relaciones espaciales que las estudiantes movilizaron al resolver la tarea. En un comienzo, las acciones se apoyaron en una experiencia corporal y topológica del espacio, centrada en la continuidad, la proximidad y el adentro/afuera. Posteriormente, esta primera organización dio lugar a una modelización geométrica más estructurada, en la que emergieron propiedades como el paralelismo y la perpendicularidad.

La coordinación entre las distintas representaciones, el croquis corporal, la cuadrícula en papel y la programación del robot, evidenció un proceso progresivo de descontextualización y simbolización. Cada medio (el cuerpo, el papel, el artefacto) ofreció retroacciones específicas que contribuyeron a la construcción de significados espaciales: el croquis actuó como mediador entre la acción y la representación, mientras que el Blue-Bot posibilitó la verificación y la explicitación de las trayectorias a través de la codificación.

Desde la Teoría de las Situaciones Didácticas, se reconoce que el robot operó como un medio que produjo retroacciones significativas, promoviendo un funcionamiento a-didáctico en el que las estudiantes asumieron la validación de sus propias producciones. Los aportes de Salin (2004) y Ruiz Higuera et al (2013) permiten interpretar estos procesos como una reconstrucción progresiva del espacio geométrico: las alumnas pasaron de una relación vivida con el espacio a una relación representada y finalmente codificada.

En este sentido, el uso del Blue-Bot se muestra como un artefacto didáctico potente para la enseñanza de la geometría en la formación docente, en tanto propicia la articulación entre acción, representación y validación, y favorece la emergencia de distintos registros de modelización del espacio. Estos resultados invitan a seguir explorando propuestas basadas en robots educativos que, más allá del componente tecnológico, promuevan situaciones de estudio ricas en interacciones, argumentaciones y construcción de significados geométricos.

Bibliografía

Acosta Gempeler, M. (2007). La teoría antropológica de lo didáctico y las nuevas tecnologías. En L. Ruiz Higuera, A. Estepa Castro & F. J. García García (Coords.), *Sociedad, escuela y matemáticas: Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico* (pp. 85–100). Servicio de Publicaciones, Universidad de Jaén.

Balacheff, N. (2000). Entornos informáticos para la enseñanza de las matemáticas: Complejidad didáctica y expectativas. En M. Colén, Y. Fraile & C. Vidal (Eds.), *Matemática y educación: Retos y cambios desde una perspectiva internacional* (pp. 91–108). Graó.

Fregona, D., y Báguena, P. (2011). *La noción de medio en la teoría de situaciones didácticas: Una herramienta para analizar decisiones en las clases de matemática*. Libros del Zorzal.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., y Baptista Lucio, P. (2006). *Metodología de la investigación* (4.^a ed.). McGraw-Hill.

Ruiz-Higuera, L., García, F. J., y Lendínez, E. M. (2013). La actividad de modelización en el ámbito de las relaciones espaciales en la educación infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 2(1), 95–118.

Salin, M. H. (2004). La enseñanza del espacio y la geometría en la enseñanza elemental. En M. C. Chamorro (Ed.), *Números, formas y volúmenes en el entorno del niño* (pp. 37–82). Ministerio de Educación y Ciencia.

Villarreal, M. (2012). Tecnologías y educación matemática: Necesidad de nuevos abordajes para la enseñanza. *VEsC*, 5, 73–94.

VIDEOS PRODUCIDOS POR FUTUROS PROFESORES EN ESCENARIOS DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA: CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADOS

Araceli Coirini, Jonathan Alonso, Mónica Villarreal, Iris Dipierri

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación, UNC

Av. Medina Allende s/n , Ciudad Universitaria, CP:X5000HUA Córdoba, Argentina

araceli.coirini@unc.edu.ar

Categoría del trabajo: Trabajo de investigación

Nivel educativo: Universitario

Palabras claves: Video, Discurso Multimodal, Formación de profesores, Modelización matemática

Resumen:

En esta comunicación se presentan avances de una investigación sobre la producción de videos por futuros profesores de matemática en el marco del curso *Didáctica Especial y Taller de Matemática* de la Universidad Nacional de Córdoba. El propósito es indagar qué significados se construyen en escenarios de modelización matemática abierta cuando los estudiantes elaboran un video como parte de un proyecto formativo.

El estudio se inscribe en un enfoque cualitativo e interpretativo, presenta un dispositivo de análisis y toma como caso ilustrativo un video que aborda la problemática de un comedor comunitario para poner a prueba su aplicación. El análisis permite reconocer cómo la producción audiovisual se convierte en un espacio de apropiación de la modelización y de construcción de significados que articulan lo educativo con lo social.

Introducción

Las contribuciones del uso y la producción de videos en el ámbito educativo han sido destacadas en diversas publicaciones (Canedo Júnior et al., 2025, Schünemann y Borba, 2024) ya sea para comunicar contenidos específicos o para evidenciar aprendizajes. En el caso de la formación docente, videos de clases suelen ser utilizados para analizar prácticas de enseñanza propias o de otros profesores (Esteley et al., 2021). En esta comunicación proponemos centrar la atención en el análisis de videos producidos por futuros profesores de matemática (FPM) al desarrollar proyectos de modelización matemática (MM) abierta en el curso de Didáctica Especial y Taller de Matemática (DEyTM) del Profesorado en Matemática de la UNC. En este curso se estudia la MM como una tendencia en educación matemática. Se discuten nociones de modelo y modelo matemático y se estudian las fases de un proceso de MM utilizando diferentes ciclos

como el propuesto por Bassanezi (2002)¹. Se presentan criterios para decidir si una cierta tarea es de MM o no, se analizan experiencias en diferentes contextos educativos y se resuelven tareas de diferente naturaleza. Como cierre del estudio de esta tendencia, los estudiantes reunidos en grupos llevan adelante un proyecto de MM abierto a partir de la elección libre de un tema de su interés. En ese escenario, se les propone que realicen un video, que no supere los dos minutos, presentando algún aspecto del proceso de MM desarrollado.

Con el fin de identificar y examinar las contribuciones que la producción y el uso de videos ofrecen al desarrollo profesional de FPM, se diseñó un dispositivo de análisis multimodal para su estudio. En esta comunicación se presenta su aplicación en el análisis de un video, a fin de responder la siguiente pregunta de investigación: ¿Cuáles son los significados construidos en un proceso de MM, que pueden identificarse en un video producido por FPM?

Marco teórico

Los videos producidos por FPM son considerados como textos multimodales, conformados por diversos modos semióticos -imagen, lenguaje oral y escrito, música, gráficos, animaciones, entre otros-. Estos modos se integran en configuraciones multimodales coherentes que, a través de decisiones de selección y combinación, orientan la construcción de significados en relación con un receptor y un contexto particular (Kress, 2010). En este trabajo, la construcción de significados se estudia a partir del análisis de los videos producidos, sin recurrir a la interpretación explícita de sus autores. Para identificar los significados construidos, se diseñó un dispositivo de análisis que se fundamenta en un entramado teórico que articula aportes de la lingüística sistémico-funcional propuesta por Halliday (1978) y de la teoría socio-semiótica de la multimodalidad desarrollada por Kress (2010), quien extiende dicho enfoque al análisis de múltiples modos más allá del lenguaje (escrito o hablado).

En este marco, consideramos las tres funciones del lenguaje -ideacional, interpersonal y textual- propuestas por Halliday (1975) y las reformulamos como tipos de significado para el análisis de textos multimodales. El *significado ideacional* incluye los temas abordados, las representaciones del mundo que se elaboran y los significados matemáticos que se ponen en juego, así como la manera en que se organiza la información y el tipo de lenguaje utilizado para presentarla, atendiendo también a la perspectiva asumida por el autor. El *significado interpersonal* se relaciona con las formas en que se construyen los vínculos con el receptor, los

¹ Un ciclo de MM comienza con la selección de un tema, situación o fenómeno del mundo real relevante para el estudiantado que permite la formulación de problemas. Posteriormente, se inicia un proceso de búsqueda o recolección de datos, y se seleccionan variables que dan lugar a un proceso de matematización para obtener un modelo que luego es interpretado, validado y, si es necesario modificado en función de los problemas planteados.

posicionamientos adoptados y las estrategias discursivas que buscan implicar al otro en la problemática presentada. El *significado textual*, por su parte, remite a la organización coherente del mensaje, a la articulación de los distintos modos y a la construcción global de sentido, considerando los efectos que esta configuración produce en el receptor.

Metodología

El estudio se desarrolla bajo un enfoque cualitativo e interpretativo (Denzin & Lincoln, 2017). El corpus está conformado por 10 videos producidos por FPM en un escenario de MM abierta, en el marco del curso de DEyTM, en las cohortes 2022-2024.

Con el fin de registrar la información básica presente en cada video y orientar el análisis para identificar los significados construidos, se diseñó el dispositivo que presentamos en la Tabla 1. Éste contempla datos descriptivos iniciales y tres dimensiones de análisis, cada una de ellas guiada por preguntas orientadoras, que se sustentan teóricamente en los aportes de Halliday (1978) y Kress (2010).

Nombre del video:	
Integrantes:	Año de realización:
Duración:	Soporte:
Dimensión	Descripción
Significado ideacional	¿Cuál es el tema del texto? ¿El tema es matemático? ¿Qué información se presenta? ¿Cómo se organiza la información? ¿Qué tipo de lenguaje se utiliza para presentar la información? ¿Cuál es la perspectiva del autor?
Significado interpersonal	¿A quién está dirigido el texto? ¿Cuál es la relación entre el autor y el lector? ¿Cómo se construye la voz del autor en el texto? ¿Qué estrategias se utilizan para involucrar al lector? ¿Qué tipos de actos de habla se distinguen?
Significado textual	¿Cómo se organiza el texto? ¿Qué recursos lingüísticos se utilizan para crear cohesión y coherencia? ¿Cómo se construye el significado en el texto? ¿Qué efecto tiene el texto en el lector?

Tabla 1: Dispositivo de registro y análisis de videos producidos por FPM

Para la implementación del dispositivo se definió un protocolo de análisis. En un primer momento, para cada video, todos los integrantes del equipo completan individualmente la ficha mostrada en la Tabla 1. Posteriormente, se realiza una discusión colectiva de los análisis y la puesta en común de interpretaciones hasta llegar a un consenso. Finalmente, a partir de las fichas individuales, se elabora una única ficha que organiza y sistematiza el estudio del video, tarea que se lleva a cabo con apoyo de herramientas de inteligencia artificial.

A continuación, se presenta la descripción de un video, titulado “Comedor comunitario”, objeto de análisis para esta comunicación, para poner a prueba la aplicación del dispositivo.

El video “Comedor comunitario”

El video seleccionado corresponde a un proyecto en el que un grupo de tres estudiantes estudia, a través de un proceso de MM, la situación de un comedor comunitario de la ciudad de Córdoba que asiste a 53 personas, con el objetivo de calcular, en primer lugar, cuánto cuesta alimentarlas de manera saludable y, luego, analizar qué proporción de ese gasto es cubierto por los aportes del estado. En el video se reconocen cuatro momentos centrales: I) Planteo del problema (Figura 1A), II) Presentación de datos y resultados (Figuras 1B, C y D), III) Cuestionamiento sobre el rol del Estado (Figura 1E), y IV) Llamado final a la acción solidaria (Figura 1F). Luego de este llamado, el video continúa con una secuencia de placas que apelan a la solidaridad comunitaria y, al mismo tiempo, denuncian la insuficiencia del apoyo estatal. Además, se ofrece información de contacto del comedor como una convocatoria a donar alimentos o dinero, y se combinan otras expresiones (por ejemplo, fotografías del comedor) que buscan sensibilizar y movilizar al espectador a que se involucre en la problemática.



Figura 1: Placas que capturan fragmentos del video del “Comedor comunitario”

Resultados y conclusiones

A continuación se presenta la ficha que sistematiza el análisis del video:

Nombre del video: Comedor comunitario	
Integrantes: E1, E2 y E3	Año de realización: 2022
Duración: 2' 07''	Soporte: Video digital
Dimensión	Descripción
Significado ideacional	El video aborda como tema central la incidencia de los aportes estatales en los gastos de un comedor comunitario, enmarcado en la problemática del derecho a la alimentación y la solidaridad social. La matemática no constituye el eje principal del mensaje, pero se utiliza como recurso de apoyo para legitimar la argumentación (porcentajes, gráficos, montos necesarios). La información presentada combina datos concretos (90 mil pesos, 53 personas, porcentajes de aportes) con valores sociales (solidaridad, derecho a la alimentación), organizados mediante recursos gráficos y discursivos que buscan impactar al espectador. El lenguaje oscila entre lo formal y lo apelativo, con un tono de denuncia hacia la insuficiencia estatal y un llamado a la acción comunitaria. La perspectiva adoptada es crítica y concientizadora, visibilizando la tensión entre responsabilidad estatal y compromiso solidario.
Significado interpersonal	El video se dirige a un público amplio, interpelando tanto a la ciudadanía como a posibles donantes y al Estado. La relación autor-lector se construye en un registro apelativo y crítico, que combina la exposición de datos con un llamado a la acción. Los autores adoptan una voz enfática y comprometida, apoyada en la oralidad y en recursos visuales, que busca generar empatía y movilizar al espectador. Se emplean estrategias de involucramiento como preguntas retóricas, invitaciones explícitas a colaborar, uso de cifras y gráficos, y frases de tono solidario y reivindicativo, lo que refuerza el doble propósito del mensaje: denunciar la insuficiencia estatal y convocar a la solidaridad comunitaria.
Significado textual	El video organiza su discurso en una secuencia narrativa clara: planteo del problema, exposición de datos, cuestionamiento al rol del Estado y llamado final a la acción solidaria. Para ello recurre a placas dinámicas, voz en off, música de fondo, gráficos de barras y de torta (con diseño creativo de plato con alimentos) y textos destacados por color, tamaño y movimiento. Estos recursos generan cohesión y coherencia al entrelazar la información numérica con mensajes apelativos y valores sociales. El significado se construye a partir de la articulación entre datos concretos y una perspectiva crítica, produciendo en el espectador un efecto de sensibilización, crítica al Estado y motivación para colaborar.

El análisis del video permitió reconocer que los significados construidos en sus tres dimensiones no se limitan a la comunicación de datos obtenidos en el proceso de modelización, sino que expresan una apropiación más amplia de la tarea formativa.

En la dimensión ideacional, los estudiantes muestran la situación de un comedor comunitario con datos y representaciones matemáticas, pero estos aparecen entrelazados con valores sociales vinculados al derecho a la alimentación y la solidaridad. En la dimensión interpersonal, asumen una voz crítica y apelativa que los posiciona como agentes comprometidos, al tiempo que interpelan al espectador como potencial agente de cambio. En la dimensión textual, la organización multimodal del discurso refuerza este doble propósito: informar y movilizar.

De este modo, los FPM otorgan a la MM un significado que trasciende el plano instrumental y se orienta hacia el compromiso con la realidad social. En el proceso de producción del video se observa que se apropiaron de la MM como una herramienta para analizar la realidad y, al mismo tiempo, como un medio para interpelar a otros. El significado construido se produce así en un doble entorno: educativo, por tratarse de una producción académica en el marco de un curso de formación docente, y social-político, en tanto se inscribe en un contexto de crisis económica y de insuficiencia estatal. En este cruce, el video refleja tanto la práctica formativa de futuros docentes que vinculan la matemática con problemáticas sociales, como una intervención crítica que interpela al Estado y moviliza a la sociedad hacia la acción solidaria. Al mismo tiempo, la agencia se distribuye entre los estudiantes -quienes deciden cómo organizar y comunicar los datos-, la comunidad del comedor -representada como protagonista del esfuerzo cotidiano- y los espectadores -interpelados como agentes potenciales de cambio-.

Por último, el dispositivo de registro y análisis permitió identificar y sistematizar los significados producidos en el video “Comedor comunitario” reconociendo el papel de la matemática en su configuración; sin embargo, la implementación en el resto del corpus documental podría incorporar modificaciones y/o nuevas dimensiones de análisis.

Bibliografía

- Bassanezi, R. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: Uma nova estratégia*. Editora Contexto.
- Canedo Junior, N.d.R., Borba, M.C., & Villa-Ochoa, J.A. (2025). Contributions of digital videos in mathematical modelling practices: semiotic meanings and resources. *ZDM Mathematics Education*, 57, 473–488. <https://doi.org/10.1007/s11858-025-01681-4>
- Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (2017). *The SAGE Handbook of Qualitative Research* (5ta ed.). Thousand Oaks: SAGE.
- Esteley, C., Villarreal, M., Mina, M., & Coirini, A. (2021). Uso de videos en la formación inicial de profesores de matemática como recurso para observar clases. *Revista Científica EFI DGES*, 7(12).
- Halliday, M.A.K. (1978). *Language as Social Semiotic: The Social Interpretation of Language and Meaning*. London: Edward Arnold.
- Kress, G. (2010). *Multimodality: A Social Semiotic Approach to Contemporary Communication*. London: Routledge.
- Schünemann, T.A., & Borba, M.C. (2024). A produção de vídeos digitais como uma possibilidade de prática avaliativa. *Revista BOEM*, V. 12, n. 22, p. e0301. <http://doi.org/10.5965/2357724X12222024e0301>

GEOGEBRA Y LA DECONSTRUCCIÓN DIMENSIONAL: ANÁLISIS DE ALGUNAS HERRAMIENTAS DIGITALES EN EL ESTUDIO DE LA GEOMETRÍA

Rafael Adrián Cornejo Endara y Ana Inés Cocilova

**Departamento de Matemática, Departamento de Ciencias de la Educación, Universidad
Nacional del Sur (UNS), Bahía Blanca, Argentina.**

rcornejo@uns.edu.ar

Categoría del Trabajo: Trabajos de investigación

Nivel Educativo: Nivel Superior

Palabras Claves: representaciones semióticas, deconstrucción dimensional, tecnología, GeoGebra.

Resumen

Este trabajo de investigación se enmarca en un proyecto más amplio sobre procesos de estudio de la matemática y la formación docente inicial. En particular, se centra en analizar los aportes del software GeoGebra a los procesos de estudio de la geometría. Se adopta como marco teórico la teoría de los registros de representación semiótica, la cual nos permite indagar cómo el uso de GeoGebra modifica la actividad geométrica. Se analizan específicamente el desplazamiento, la herramienta recta y el compás. El análisis permite reflexionar sobre el papel del software como medio didáctico lo cual consideramos que contribuye a desnaturalizar el uso de la tecnología educativa en los procesos de estudio de la matemática.

Introducción

Podemos comenzar preguntándonos ¿por qué problematizar el GeoGebra? Adherimos a las ideas expuestas en Mathe et al (2021) respecto a la mirada de que los instrumentos en el estudio

de la geometría juegan un papel crucial en las concepciones que estudiantes desarrollan, esto debido en parte a que las tareas que se proponen al iniciar estudios en geometría implican la utilización de *ostensivos*¹.

El trabajo que presentamos en esta ocasión se enmarca en un proyecto de investigación más amplio². Particularmente se encuadra en algunas acciones que permiten concretar el objetivo específico “Analizar aportes a la formación docente inicial de la incorporación del software GeoGebra en el estudio de la geometría y de su enseñanza”.

En este escrito se presenta un análisis del software GeoGebra, a partir de algunos constructos teóricos que desarrollaremos en la próxima sección. Algunas de las preguntas que motivan este trabajo, son las siguientes: ¿qué formas de ver y actuar sobre los objetos geométricos se facilitan con esta herramienta?, ¿qué características adquiere la actividad geométrica cuando la misma es mediada por el GeoGebra? Estas preguntas recuperan algunas preocupaciones comunes a los trabajos de tesis desarrollados por los autores de esta comunicación en el marco de la maestría en Procesos Educativos mediados por Tecnología de la UNC.

Marco teórico

Partimos de concebir a los objetos matemáticos como entes abstractos, lo que supone que la actividad que se puede realizar sobre dichos objetos requiere del empleo de *ostensivos*, particularmente nos centraremos en los constituidos por *representaciones semióticas*.

Es así que, para este análisis adoptamos como marco teórico las ideas expuestas por Duval (2017), quien sostiene que el aprendizaje de la matemática requiere de dos tipos de transformaciones: los *tratamientos* que son internos a un registro de representación y las *conversiones* que corresponden a la articulación entre distintos registros. Particularmente la actividad geométrica se desarrolla en “dos registros: el correspondiente a las figuras y el del lenguaje natural” (Duval, 2017, p. 195).

Consideramos parte del registro de las figuras aquellas marcas que, al generarse por contraste sobre un soporte homogéneo (papel, pantalla, etc.), permiten destacar algo desde la percepción. Estas marcas pueden ser categorizadas según dos tipos de variaciones visuales:

- Variaciones dimensionales: 0D (punto), 1D (línea) o 2D (superficie), que remiten al modo en que la representación es percibida por el sujeto.

¹ El término ostensivo es usado por Bosch, M. y Chevallard, Y. (1999) para referirse a los objetos que tienen una materialidad y pueden ser manipulados por los sentidos.

² “Procesos de estudio de la matemática y formación de profesores/as: Entre la formación inicial y las dificultades del oficio docente” dirigido por el Dr. José Nicolás Geréz Cuevas (Proyecto Formar SECYT-UNC s/Res. SECYT-UNC 258/23).

- Variaciones cualitativas: forma (rectas o curvas, abiertas o cerradas), tamaño, color, entre otras.

De acuerdo con Duval, “toda figura aparece como la combinación de valores para cada una de las variaciones visuales de estos dos tipos, **dimensional** y **cualitativo**.” (Duval, 2017, p. 197). En tanto concebimos que la actividad geométrica involucra la articulación de al menos dos registros: el del lenguaje natural y el de las figuras, resulta pertinente atender a lo que advierte Duval:

En el registro de las figuras hay predominancia perceptiva de las unidades de dimensión 2 sobre las de dimensión inferior. En el registro del discurso en lengua natural en que son definidos los objetos representados por la figura, hay predominancia de los objetos representados por las unidades figurales de dimensión 1 o 0. (Duval, 2017, p. 200)

Es así que la conversión entre representaciones en estos dos registros, requiere que las representaciones en el registro de las figuras puedan ser pensadas como tramas de subunidades figurales de dimensión 1 o 0, lo que Duval denomina *deconstrucción dimensional*. Sobre la base de estas ideas, se desarrollará un análisis del software GeoGebra, con especial atención al número de dimensiones que destaca³ una figura representada en este entorno.

El GeoGebra

En esta sección se presentan algunas herramientas del software y un análisis de estas, que se consideran importantes para nuestra investigación, cabe mencionar que se ha tomado como objeto de estudio la versión GeoGebra⁴ Classic 5.2.

Las figuras en el entorno del software

Las figuras construidas en GeoGebra se vinculan mediante una relación de dependencia entre ellas, lo que permite distinguir entre: *objetos libres* (que no dependen de otros), y *objetos dependientes*, que han sido construidos a partir de ciertas relaciones de dependencia con otros. Es el caso de, por ejemplo, “el punto medio de un segmento”, “la mediatriz de un segmento”, o al utilizar la herramienta *Punto en objeto*.

El desplazamiento

Una característica que poseen las figuras en este entorno es que pueden ser manipuladas por el usuario a partir de diferentes herramientas de desplazamiento: al arrastrar un *objeto libre*, todos los *objetos dependientes* se desplazan manteniendo las propiedades bajo las cuales fueron

³ Utilizamos este término en el sentido que el software induce una cierta forma de ver una figura en término de sus dimensiones al usuario.

⁴ GeoGebra es un software matemático interactivo libre desarrollado por Markus Hohenwarter, en la Universidad Johannes Kepler de Linz (Austria) en su tesis de máster (Hohenwarter y Lavicza, 2007).

construidos. El desplazamiento permite categorizar los objetos en: *objetos desplazables*, que pueden desplazarse en cualquier sector de la vista gráfica; *objetos semidesplazables* creados con la herramienta *Punto en objeto*: pueden desplazarse únicamente sobre dicho objeto; y *objetos indesplazables*, que no pueden ser desplazados directamente, sino a partir de desplazar los objetos de los que dependen.

La herramienta recta

Para su uso, según es indicado se debe “seleccionar dos puntos o ubicaciones”. Al seleccionar el primero de los puntos o ubicaciones, automáticamente se visualiza en la pantalla una representación 1D/2D⁵, que funciona a modo de regla que rota con centro en el punto ya seleccionado y que quedará fija una vez seleccionado el segundo punto o ubicación. Es decir que al determinar la primera unidad de dimensión 0 (primer punto), el software ya exhibe la unidad figural de dimensión 1 (recta), la cual quedará fijada recién al seleccionar la segunda unidad figural de dimensión 0 (segundo punto). En contraposición, al utilizar el instrumento regla en el entorno de lápiz y papel, para el trazado de rectas, la misma se emplea habitualmente como una herramienta de subrayado, sin necesidad de determinar previamente unidades figurales de dimensión 0.

En tanto que en el entorno del software se requiere identificar dos puntos para el trazado de la recta, consideramos entonces que constituye un apoyo para la *deconstrucción dimensional* necesaria en la conversión al lenguaje natural. Puesto que en este último predominan las unidades figurales de dimensión 0, como podemos observar, por ejemplo, en la enunciación que hace Tirao (1979) del siguiente axioma “Dados dos puntos a y b de un plano existe una única recta del mismo a la cual ellos pertenecen.” (p. 8).

La herramienta compás

Para su uso es necesario contar con un segmento, o los puntos extremos del mismo, y un punto o ubicación que será el centro de la circunferencia, cabe mencionar que el segmento remite al radio de la circunferencia. Al determinar el radio, ya se puede ver y manipular en la pantalla la representación 2D/2D de la circunferencia, la cual quedará fija una vez determinado el centro. Creemos así, que, en cierto tipo de tareas, esta representación no hace necesario que el usuario movilice una *deconstrucción dimensional*, ya que la representación funciona a modo de plantilla o molde. Es así que consideramos que esta representación puede generar algún tipo de interferencia al ponerla en diálogo con la definición “dado un punto o y un segmento R de π , el

⁵ Utilizamos esta notación indicando dimensión figural ejemplo 1D representada en 2D. Así 3D/2D implica que se está representado una unidad figural 3D (por ejemplo, una esfera) sobre una pantalla u hoja de papel.

conjunto de puntos p de π tales que $\overline{op}$ es congruente con R se llama circunferencia de centro o y radio R ” que aparece en Tirao (1979, p. 35), en la cual la circunferencia está definida a partir de un elemento de dimensión 0, el caso del centro, y un elemento de dimensión 1, el segmento radio.

Cabe resaltar que en términos de los instrumentos tradicionales que se utilizan para construir circunferencias (compás moderno) el mismo, al igual que la definición, requiere para su utilización distinguir unidades figuralas de dimensión 0D y 1D. Si bien el producto final al usar ambos instrumentos es una representación 2D/2D, consideramos que el *proceso de deconstrucción dimensional* que se pone en juego es diferente en cada caso. En el caso del compás físico, por ejemplo, en una tarea de copiado de circunferencias, el usuario debe determinar el centro y el radio antes de efectuar la acción de trazado. Mientras que, en el entorno del software, la tarea puede ser resuelta mediante sucesivos ajustes perceptuales.

¿Qué acciones de desplazamiento se pueden efectuar sobre estas figuras? Para el caso de la circunferencia, se la puede trasladar, al trasladar su centro o alguno de sus puntos. También se puede modificar su tamaño, como efecto de mover alguno de los puntos que determinan el radio de la circunferencia. En este caso el efecto es el de una homotecia de centro en el centro de la circunferencia, y cuyo factor de escala coincide con el factor de escala aplicado al radio. Para el caso de la recta, la misma puede ser trasladada como efecto de aplicar la herramienta Mueve y seleccionar la recta. También es posible mover uno solo de los dos puntos usados para “crearla”, lo que genera por efecto una rotación de la recta con centro de rotación sobre el punto que no se está moviendo.

¿Qué designaciones de estas figuras se sugieren desde el entorno del software? La designación de los objetos en geometría es fundamental para el trabajo en el registro del lenguaje natural. En el caso del uso de la herramienta Compás, al clicar sobre la circunferencia se exhibe una etiqueta que indica, por ejemplo, “circunferencia c” lo que no denota el centro y radio de la misma. Mientras que, para el caso de la recta, la leyenda expuesta indica, por ejemplo, “Recta f: Recta G H”, donde f es el rótulo usado por GeoGebra, y G y H son los puntos que definen la recta. Así, consideramos que, en el caso de la recta, en la designación propuesta por el software se resaltan los elementos de dimensión 1 y 0, lo que no sucede para el caso de la circunferencia, donde se enfatizan las formas de dimensión 2.

Reflexiones finales

En este trabajo comenzamos preguntándonos: ¿qué formas de ver y actuar sobre los objetos geométricos facilita esta herramienta? y ¿qué características adquiere la actividad geométrica cuando es mediada por GeoGebra? Luego del análisis realizado podemos distinguir algunas cuestiones que consideramos relevantes para el estudio de la geometría. En primer lugar, notamos que la herramienta Compás del entorno enfatiza el uso de la dimensión 2D en el tratamiento de las formas en el registro de las figuras. Consideramos que esta característica puede convertirse en un escollo a atender ante la necesaria conversión requerida para la resolución de cierto tipo de tareas de conversión ya que en el registro de la lengua natural, tal como hemos observado en las definiciones tomadas de la literatura, en las que predomina el uso de la dimensión 1 y 0. Sin embargo en el caso de la herramienta Recta, su utilización podría aventajar al uso de la regla física en tanto exige determinar previamente unidades figurales de dimensión 0. Finalmente hemos recuperado el uso del desplazamiento, el cual permite analizar la solidez de las construcciones realizadas, lo que a su vez abre la posibilidad de que el control sobre los tratamientos efectuados en el registro de las figuras trascienda lo meramente perceptual. Sostenemos que estos análisis tienen implicancias relevantes para el estudio de la geometría. En particular, permitiría abordar la siguiente cuestión: ¿en qué medida las formas de ver y actuar sobre las figuras a partir del uso del software dialogan con las relaciones institucionales que se construyen con las matemáticas en el ámbito de la formación inicial de docentes de nivel inicial y primario? En nuestras tesis de maestría en curso continuamos explorando estas cuestiones, con el propósito de contribuir a un enfoque crítico, reflexivo y didácticamente fundamentado sobre la integración de tecnologías digitales en la enseñanza de la geometría.

Bibliografía

- Bosch, M. y Chevallard, Y. (1999), La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Objet d'étude et problématique*, Recherches en Didactique des Mathématiques, 19/1, 77-123.
- Duval, R. (2017) *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle.
- Mathé, A., Maillot, V. y Ribennes, J. (2021). Enjeux langagiers, situations de formulation et de validation en géométrie un exemple de travail autour du cercle en ce2. *Grand N*, 108, 27-57.
- Tirao, J. (1979). *El Plano*. Buenos Aires: Docencia

INVESTIGACIÓN COLABORATIVA: EL POTENCIAL DE LOS DIÁLOGOS DE CLASE

Betina Duarte; Cecilia Lamela; Cecilia Montes de Oca; Uriel Kasman; Carolina Benito

Universidad Pedagógica Nacional – UNIPE

betina.duarte@unipe.edu.ar; cecilia.lamela@unipe.edu.ar; maria.montes@unipe.edu.ar;
uriel.kasman@unipe.edu.ar; maria.benito@unipe.edu.ar

Categoría del Trabajo: Trabajo de investigación

Nivel Educativo: Nivel Secundario

Palabras clave: Diálogos de Clase – Investigación colaborativa

Resumen

En el proyecto de investigación “Interpelar la práctica docente a través de dispositivos de estudio colaborativo: alcances, límites y condiciones de modelos para la formación continua”, PI UNIPE 2024-2025/5 estudiamos el potencial de un dispositivo para promover en los docentes del grupo de estudio una reflexión sobre su práctica. Uno de los recursos considerados, los Diálogos de Clase, comporta la escritura de escenarios de enseñanza para momentos de una clase hipotética. A través de experiencias desarrolladas señalamos el potencial de este recurso para concebir intervenciones docentes que comanden un aula donde la actividad matemática está impulsada por la producción de los y las estudiantes.

Una problemática: anticipar escenarios de enseñanza

Aunque usualmente la planificación es comprendida como una tarea burocrática orientada a cumplir con exigencias institucionales, desde nuestra perspectiva constituye una herramienta para que el docente pueda anticipar no sólo qué contenidos va a enseñar, sino también cómo los va a enseñar -por medio de qué tareas y situaciones- qué técnicas pondrá en juego, lo cual incluye considerar qué condiciones se necesitan en la clase y qué intenciones didácticas se postulan. En este sentido, en sintonía con el planteo de Tarasow (2007), planificar implica realizar un análisis didáctico del contenido a enseñar para elegir situaciones que incluyan

actividades que den lugar a resoluciones correctas, erróneas e incompletas, en tanto estas constituyen oportunidades para la reflexión y el debate en el aula. Se trata, en definitiva, de proponer problemas que permitan hacer emerger formas locales del contenido que se desea enseñar. Aun cuando no es posible controlar todo lo que sucederá en el desarrollo de una clase, esta planificación permite al docente contar con un marco para tomar decisiones, intervenir y gestionar los intercambios de acuerdo con los objetivos propuestos.

Ahora bien, muchos de los modelos de planificación que circulan en las instituciones suelen diferir de esta descripción recién bosquejada. Bajo una apariencia de sencillez, podrían transmitir una sensación de control de la clase basada en el despliegue de actividades. Incluso parecen funcionar en cualquier clase. Sin embargo, esta prescripción de contenidos suele verse desafiada por los hechos de la clase, lo que provoca un desajuste respecto de lo planificado y exige al docente tomar decisiones “en caliente” ante escenarios no previstos.

Burbules (1999) modeliza *escenarios de clase* enfocando la descripción en distintas *formas de diálogos* que ocurren en el aula. Distingue cuatro tipos de diálogo: *conversación, indagación, debate y enseñanza*. Cada uno de ellos resulta de la combinación de dos dimensiones de análisis: la concepción del conocimiento (se puede asumir como hipótesis la posibilidad de converger hacia un consenso o no) y la actitud hacia el interlocutor (se puede concebir como inclusiva o crítica respecto de las afirmaciones que se hacen circular). El docente puede anticipar y elegir entre estas formas de diálogo según su propósito didáctico. El diálogo se configura entonces como una relación construida entre los participantes que puede cambiar su forma en el transcurso mismo de la interacción. En estas circunstancias nos preguntamos: ¿es posible estar preparado de forma anticipada para estos escenarios?

Diálogos de Clase

Los *diálogos de clase* nacen de la voluntad de trabajar en la anticipación de escenarios de clases con fines didácticos específicos. A partir de observaciones de clase de futuros docentes, Zazkis, Sinclair y Liljedahl (2013) notaron que, a pesar del diseño de buenas planificaciones, las interacciones reales con alumnos llevaban a conversaciones en las cuales: se da prioridad al aspecto procedimental de las resoluciones por encima del tratamiento de las ideas y conceptos involucrados; las intervenciones docentes se enfocan en formas concretas de resolución sin poder formular preguntas que inviten al razonamiento matemático; para dirimir alguna cuestión se tiende a ubicar al docente o al libro de texto como la autoridad matemática en el aula limitando así la oportunidad de hacer emerger las concepciones de los/las estudiantes.

Los *diálogos de clase* se proponen como un escrito en el cual los docentes, en ejercicio o en formación, recrean un momento de una *clase hipotética* donde se produce una interacción a propósito de la resolución de un problema. Se trata entonces de elaborar un diálogo que capture una escena hipotética en la cual se incluyan tanto las intervenciones e intenciones del docente como así también su forma de gestionar los emergentes de la clase. Quienes escriben deben dar voz a los y las estudiantes y para ello tienen que considerar con cierta precisión desde qué lugar hablan los interlocutores, cuál es el motor de sus explicaciones, preguntas, afirmaciones, y también, sus inconsistencias o contradicciones.

En términos de Zazkis (2018) los *diálogos de clase* se vinculan con un futuro hipotético, algo que puede suceder como *real*. También tienen el potencial de revelar preferencias y enfoques personales acerca de la enseñanza de la matemática, de destacar la relación de los personajes del diálogo con la disciplina (por ejemplo, el lugar que un docente otorga a las definiciones), además de introducir o profundizar un conflicto, y al trabajar en su resolución, los autores ofrecen evidencia acerca de “su comprensión de las matemáticas, así como su repertorio de estrategias pedagógicas que conducen a una resolución prevista” (Zazkis, 2018, p. 394, la traducción es propia).

Los diálogos de clase: un recurso en nuestro proyecto de investigación

En nuestro proyecto “Interpelar la práctica docente a través de dispositivos de estudio colaborativo: alcances, límites y condiciones de modelos para la formación continua” construimos un dispositivo con la intención de sostener en el tiempo a un grupo colaborativo de estudio de investigadores y docentes que analiza su propia práctica. Tomamos en cuenta los aportes del desarrollo profesional (da Ponte et al., 2022), la investigación colaborativa y el marco de la didáctica de la matemática. Desde nuestra perspectiva la actividad docente entrama acción y reflexión y abarca tanto aquello que se hace visible en una clase como así también el diseño del proyecto de enseñanza para una institución determinada y estudiantes con características específicas.

Da Ponte et al. (2022) consideran necesarias algunas condiciones para que un entorno de estudio y análisis de las prácticas promueva la evolución de las prácticas docentes. Entre ellas destacamos: la extensión en el tiempo con varios ciclos de planificación-puesta en práctica-reflexión, la fundamentación de la propuesta apoyada en producciones del campo de la investigación y un espacio seguro para lograr conversaciones productivas entre los participantes. Asumimos para nuestro proyecto de investigación un ciclo de diseño en el que se consideran posibles escenarios de enseñanza, implementación de actividades y análisis que se

nutra del estudio de los hechos de la clase, un nuevo diseño y nueva implementación donde cada docente esté acompañado por colegas con quienes ha concebido el diseño de dos o tres clases. La factibilidad de esta propuesta reside en la duración de dos años del proyecto. Actualmente el grupo está conformado por 7 docentes de Matemática del Ciclo Básico de la Escuela Secundaria, convocados por la Supervisión de Pilar, Provincia de Buenos Aires, lo que asegura que la actividad ocurre en su jornada de trabajo. El diseño de clases y las implementaciones se realizan en 1er y 2do año de escuelas secundarias de gestión estatal del mismo distrito.

Hemos puesto en funcionamiento los *diálogos de clase* como recurso, entre otros, con vistas a tratar expectativas y concepciones acerca de la matemática, su enseñanza, los estudiantes y los fenómenos del aula. Como punto de partida analizamos colectivamente *diálogos* escritos por otros. La experiencia parte de una actividad de clase¹ sobre fórmulas para contar, estudiada en el grupo colaborativo, lo que incluye concebir: diferentes resoluciones correctas, incompletas y erróneas junto con las razones que las motorizan. Examinamos los datos del problema en tanto variables didácticas y ensayamos variaciones del enunciado para abrir a otros escenarios posibles para la actividad. En este proceso reflexionamos acerca de diferentes gestiones de la clase y su potencial para hacer avanzar el conocimiento de la clase. Luego, el análisis de un diálogo escrito por un investigador del equipo (donde un estudiante comparte una propuesta de conteo incorrecta y la docente pone el procedimiento a consideración de la clase) nos permitió hacer foco en una tarea docente frecuente y compleja: cómo tomar las producciones de sus estudiantes como punto de apoyo para hacer avanzar la clase. Este proceso de análisis de una actividad y de un diálogo de clase se consolidó con la producción de un diálogo a cargo de los docentes del grupo colaborativo. Pedimos a cada docente poner en vínculo dos métodos de conteo² producidos por estudiantes en una clase en la cual la actividad adoptó una forma ligeramente diferente: luego de considerar varios cuadrados concretos, se propuso a la clase

¹ La actividad comienza pidiendo a los estudiantes contar cuadraditos del borde de un cuadrado de 5 cuadraditos de lado; luego aumenta el número de cuadraditos del lado del cuadrado tensando hacia la generalización y finalmente la actividad deriva en la producción de una fórmula. Un análisis se puede encontrar en Sessa, C. (2005) *Iniciación al estudio Didáctico del Álgebra*. Libros Del Zorzal.

² Los métodos de conteo de la clase hipotética fueron los siguientes: (1) “Contar dos filas enteras, y contar dos filas con dos cuadraditos menos (los que están en las esquinas que ya contamos antes), (2) Contar cuatro veces la fila de cuadraditos menos uno. De esta manera quedan 4 filas del mismo tamaño. La consigna mencionada fue la siguiente: “Les proponemos producir una narración del momento de la clase en la que ustedes deciden comunicar a toda la clase estas dos producciones. Algunas cuestiones que nos interesa queden registradas son: por cuál de las dos producciones comienzan, a quién le dan la palabra, si consideran adecuado realizar alguna pregunta y en ese caso cuál y a quiénes, qué les interesa que quede registrado en el pizarrón.”

escribir métodos de conteo como un modo de introducir las fórmulas para contar. Compartimos un escrito y su análisis a continuación.

- 1.-Docente: Empecemos por la producción 2, veamos cómo lo pensaron, contaron 4 veces la fila de cuadraditos menos uno, ¿por qué le restaron ese uno?
- 2.-Grupo 2: porque si no, esos cuadraditos se superponen y los volveríamos a contar.
- 3.-Docente: ¿cómo sería si tengo 5 cuadraditos de lado?, ¿podrían explicarlo en el pizarrón?
- 4.-Grupo 2: Si tenemos 5 cuadraditos de lado cuento arriba cinco, en el costado son 5-1 que ya lo conté arriba y así con los demás, por eso directamente pensamos 4 veces la fila de cuadrados menos uno.
- 5.- Docente: Y observando la Producción 1, la forma de pensarlo ¿es la misma?
- 6.- Grupo 2: Sí, porque si cuentan dos filas con dos cuadraditos menos, son esos cuatro que le restamos nosotros.
- 7.- Docente: ¿el resto piensa lo mismo? Entonces, dos formas distintas de pensarlo... ¿podemos llegar a un mismo resultado? ¿Habrá otra forma de resolverlo aparte de esas dos?

La docente genera un escrito donde el diálogo se establece entre un colectivo conformado por un único grupo de estudiantes y la propia docente. No intervienen otros actores. Ella toma a su cargo explicar a toda la clase cuál es el método de conteo que el grupo pensó, dejando a cargo del grupo justificar una de las cuentas que incluye su método. Esto señala una intención y posicionamiento de la docente de asegurar la claridad de la explicación para toda la clase, aunque tiene como contrapartida que su intervención limita la participación de los estudiantes del grupo. En términos de Burbules, se organiza un modo de diálogo con una inclusión parcial de los estudiantes. Interpretamos que la docente pide explicación sobre lo que imagina que no es evidente (por qué restaron uno a todos los lados) y procura reunir la atención de toda la clase. Los estudiantes que ella concibe justifican correctamente esa operación de forma genérica y frente a esta validación la docente decide poner a prueba al grupo o bien colaborar en la comprensión del resto de la clase cambiando el dato y consultando cómo pondrían en juego el método explicado cuando el cuadrado tiene 5 cuadraditos. La respuesta grupal no es correcta y la docente no corrige la explicación, lo que nos hace preguntarnos qué intenciones comandan el escrito que no quedan reflejadas en el diálogo. Seguramente, la novedad de poner en palabras las explicaciones de sus estudiantes generó una tensión en la docente. El diálogo continúa con el mismo grupo, pero ahora considerando el otro método de conteo. Esto pone de manifiesto un recurso docente cuya intención pareciera nuevamente la de ahondar en los argumentos de los estudiantes: explicar cómo otro pensó un problema. Para ello indaga si el grupo ve a este método como el fruto de “la misma forma de pensar el conteo”. Desde nuestra perspectiva, estos dos métodos de conteo son el resultado de diferentes formas de pensar el problema de contar. Sin embargo, el grupo que esta docente imagina compara las operaciones involucradas y concluye que, dado que restar cuatro es lo mismo que restar dos veces dos, la forma de pensar el problema

es la misma. En el escrito de la docente notamos un deslizamiento o ruptura entre lo que el grupo afirma “es el mismo modo de pensarlo” y lo que la docente concluye para toda la clase: “Entonces dos formas distintas de pensarlo pueden llevar a un mismo resultado”. Finalmente, deja flotando una pregunta abierta como un modo de invitar a seguir pensando en el problema.

Conclusiones

A través de esta comunicación buscamos compartir un resultado en proceso de nuestra investigación: los diálogos de clase constituyen una herramienta valiosa al ofrecer un acceso privilegiado a las representaciones que los docentes tienen de su práctica y los impulsan a poner especial atención a las escenas que ellos mismos conducen y desarrollan. El acto de escribir es, en sí mismo, movilizador mientras que su análisis permite poner de manifiesto múltiples aspectos constitutivos de las prácticas docentes. Además, el análisis de las escenas de clase concebidas por los propios docentes ofrece una oportunidad para comprender, por ejemplo, la necesidad de alojar en la clase momentos de escritura colectiva capturando evoluciones locales del conocimiento puesto en juego, o ampliar los roles que los docentes conciben para sí mismos. Los diálogos, en tanto reconstrucciones ficcionales pero verosímiles de la clase, permiten acceder a significados que orientan la acción y abren la posibilidad de revisar, junto a otros, decisiones que habitualmente se toman en soledad. Este análisis colabora en la apertura de los docentes a nuevos escenarios y formas de sostener el aprendizaje de sus estudiantes.

Referencias

- Burbules, N. C. (1999). *El diálogo en la enseñanza: Teoría y práctica*. Amorrortu.
- da Ponte, J., Quaresma, M. y Mata-Pereira, J. (2022). Teachers’ learning in lesson study: insights provided by a modified version of the interconnected model of teacher professional growth. *ZDM. The international journal on mathematics education*, 54, 373-386.
- Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra*. Ed. Zorzal
- Tarasow, P. (2007). La Tarea de Planificar. Enseñar Matemática en la escuela primaria - Serie Respuestas. Tinta Fresca.
- Zazkis, R., Sinclair, N. & Liljedahl, P. (2013). *Lesson Play in Mathematics Education. A tool for research and professional development*. Springer.
- Zazkis, R. (2018). On the Use of Dialogues: Looking Back and Looking Forward. En R. Zazkis & P. Herbst (Eds) *Scripting Approaches in Mathematics Education: Mathematical Dialogues in Research and Practice* (pp. 389-398). Springer

EL CÁLCULO DE ÁREAS EN LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA: MARCAS EN EL DESARROLLO DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Nicolás Igolnikov

Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Centro de Formación e Investigación en Enseñanza de las Ciencias (CEFIEC)

nicolas.igolnikov@unipe.edu.ar

Categoría del trabajo: Trabajo de Investigación

Nivel Educativo: Nivel superior

Palabras Clave: Análisis Histórico-Epistemológico; Historia del Cálculo; Educación Matemática Superior; Conceptos Matemáticos Avanzados

Resumen: El presente trabajo se propone anticipar algunos elementos de un análisis histórico-epistemológico del concepto de integral definida, en el marco del trabajo de tesis doctoral del autor. Se analizan algunas producciones históricas y se proponen preguntas en relación con la enseñanza-aprendizaje de esta noción.

Introducción, problema de investigación y metodología

El presente trabajo se enmarca en la elaboración de una tesis doctoral titulada “Construcción de autonomía en el trabajo matemático de los estudiantes a propósito del aprendizaje de conceptos matemáticos avanzados: desafíos y tensiones para la enseñanza en el nivel superior”. En ella abordaré el estudio de procesos de enseñanza y aprendizaje en aulas de nivel superior donde los docentes -en función tanto de su formación y experiencia profesional, como de las características de la propuesta didáctica de la institución- tienen el proyecto de organizar el aprendizaje de nuevos asuntos matemáticos partiendo de problemas que plantean a los estudiantes, cuyas producciones -a propósito de la resolución de estos problemas- se discuten colectivamente en el aula y se construye teoría o se elaboran técnicas -con plena participación de los estudiantes y de la docente- anclada en estas interacciones. Ubicamos nuestro estudio en una carrera de Profesorado en Enseñanza Media en Matemática de una Universidad del Conurbano Bonaerense, en la segunda materia de Análisis Matemático en una variable del plan de estudios, cuyo objeto principal de trabajo es la noción de Integral. Si bien en mi estudio se considera la propuesta de enseñanza desarrollada por los docentes, el recorte y análisis de episodios de aula a realizar toma elementos metodológicos del enfoque de Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995), especialmente en cuanto compete a la realización de estudios previos al análisis de la propuesta y su desarrollo en el aula, que contemplen, entre otros, al plano de génesis histórica del concepto de Integral.

En esta comunicación expondré un recorte de un análisis histórico-epistemológico de las nociones y técnicas que son objeto de trabajo en el aula, con el fin de proporcionar “una

historicidad a los conceptos matemáticos que la enseñanza usual tiende a presentar como objetos universales tanto en el tiempo como en el espacio... [y]... a la vez, una historicidad a las nociones matemáticas.” (Artigue, 1990, P.1).

La subpregunta de investigación que orienta este análisis histórico-epistemológico es por producciones históricamente situadas que permitan construir categorías matemático-didácticas para estudiar procesos de enseñanza-aprendizaje a propósito del concepto de Integral

Para realizar este análisis, considero fuentes de dos tipos: aportes bibliográficos especializados (de los cuales destacamos por ejemplo Sonar (2021), Heath (2010), Kline (1972)) en los que los autores ya habían realizado un recorte sobre el desarrollo histórico del cálculo, y versiones digitalizadas de los documentos originales publicados por los diferentes autores.

Desde un punto de vista matemático contemporáneo a la escritura de este artículo, el verbo “Integrar” no está bien definido. Aunque siempre la acción de integrar se realiza sobre una función f , son necesarios elementos contextuales que permitan precisar, por ejemplo, cuál es el tipo de resultado que la acción “Integrar” puede dar (¿Un número? ¿Otra función? ¿Una familia de funciones?), o mejor aún, en qué consiste la acción de integrar (¿Medir? ¿Resolver una ecuación funcional?).

Los estudios históricos ubican el concepto de integral estrechamente ligado al devenir de una cuestión problemática: calcular el área de una región acotada cuyo borde no es una poligonal. Esta cuestión puede ubicarse en un problema más amplio, como ser calcular, para un objeto geométrico de dimensión 2 (o 3), la magnitud área (volumen) asociada al mismo. A partir de esta observación se hace necesario considerar la génesis histórica del concepto de “integral definida” en estrecha relación con los diversos tratamientos y conceptualizaciones que la noción de área (volumen) han tenido a lo largo de los siglos.

El análisis histórico-epistemológico que llevaré adelante en mi Tesis Doctoral contempla cinco *movimientos*¹ que me permiten dar cuenta del desarrollo de la noción de integral en lugares y periodos diferentes. Aquí me concentraré en el primero de ellos, que ubico en la Grecia Antigua.

Entre la determinación y la validación: Inicios geométricos de un objeto complejo

El cálculo de áreas y de volúmenes puede ser rastreado hasta las primeras civilizaciones de las que se tiene registro. En Babilonia, Egipto, en diferentes culturas precolombinas, en China -por mencionar algunas- se contaba con métodos para el cálculo del área de rectángulos, triángulos, trapecios, entre otras figuras planas. La posibilidad de realizar estos cálculos ha estado en estrecha relación, con la posibilidad de administrar y cuantificar diferentes cantidades. Ritter (1989) presenta, por ejemplo, la transliteración de tablillas de la cultura Paleobabilónica (1792 a. C.-1595 a. C.) que recuperan el cálculo de volúmenes para la estimación de la cantidad de granos que un recipiente aproximadamente cilíndrico podía albergar. Este cálculo incluía, según el análisis efectuado por el autor, de una técnica para el

¹ Elijo hablar de movimientos, porque el recorte de las ideas incluirá su desenvolvura en un tiempo y un(os) lugar(es), en múltiples direcciones, incluyendo idas y vueltas, avances y retrocesos, cada uno con su ritmo.

cálculo del área de un círculo. La variedad de maneras de calcular su superficie a lo largo de estas comunidades y a lo largo de la historia es muy diverso.

A lo largo de las diferentes culturas y épocas, el cálculo de áreas de superficies planas de bordes curvos fue una cuestión a resolver. Nos concentraremos en cómo la Grecia Antigua se ocupó de estas cuestiones.

Desde un punto de vista contemporáneo, podemos considerar que en Grecia se llevó adelante un proyecto ambicioso: el de construir un sistema axiomático a partir del cual plantear problemas, formular afirmaciones y validarlas mediante un procedimiento hipotético-deductivo. Esta construcción llega a un punto cúlmine en “Los Elementos” obra de Euclides de Alejandría (325 a. C.- 265 a. C.), que en sus trece libros logra, en términos de este sistema, expresar, reorganizar y enriquecer un amplio conjunto de conocimientos disponibles hasta el momento, incluyendo una teoría de las proporciones (libro V), donde una de las problemáticas centrales que se aborda es la comparación entre razones de magnitudes.

Según Kline (1972, p.50) esta teoría de proporciones se habría apoyado en el trabajo de Eudoxo de Cnido (390 a. C.- 337 a. C.) quien desarrollaría, además, el modernamente conocido como “Método de exhaustión”. El mismo es un método hipotético-deductivo que permite demostrar que una cantidad -generalmente, una longitud, área o volumen de una figura geométrica X- coincide con otra, asociada a otra figura geométrica Y, demostrando que no puede ser mayor ni menor a ella, a partir de construir sucesivamente polígonos que permitirían arribar a un absurdo en cada caso. Eudoxo habría utilizado este método de exhaustión, por ejemplo, para demostrar que los volúmenes del cono y la pirámide son un tercio de los volúmenes del cilindro y prisma que respectivamente tienen la misma base y altura.

Para estudiar el funcionamiento de este método nos concentramos en Arquímedes (287 a. C - 212 a. C). En su trabajo “La cuadratura de la parábola”, se propone demostrar (Proposición 24) que “cualquier segmento acotado por una parábola y una cuerda es igual a $\frac{4}{3}$ veces el triángulo que tiene la misma base que el segmento y la misma altura”.

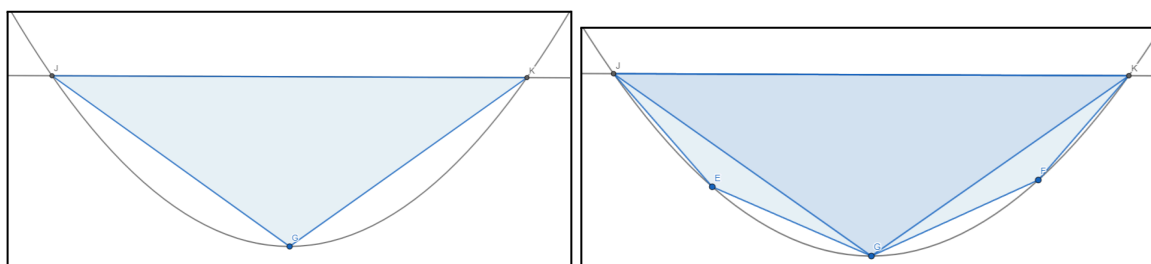


Figura 1 (izq): Segmento de Parábola (JGK) y triángulo de misma base y altura (JGK)

Figura 2 (der): Aproximación por un polígono de área menor (JEGHK)

El método de Exhaustión, como mencionamos, requiere de probar que el área en cuestión (A) no puede ser ni mayor ni menor que el área propuesta T (figura 2). El procedimiento de Arquímedes es por el absurdo: primero, asumir que A es menor que T. Para ello construye una sucesión de polígonos: el primero es el triángulo con un lado igual a la cuerda y el vértice

opuesto el punto medio del arco. Este triángulo determina entonces dos nuevos segmentos de parábola, y el nuevo polígono se construye agregando al triángulo dos nuevos triángulos construido de manera similar de manera similar sobre cada segmento. Iteradamente se obtiene una sucesión de polígonos agregando triángulos al anterior. Al estar inscritos en el segmento de parábola, todos tienen área menor que ella. Pero Arquímedes probará que construyendo sucesivamente estos polígonos alguno deberá exceder a cuatro terceras partes del área del triángulo, llegando a un absurdo. Para probar que A tampoco puede ser mayor que T , mediante una argumentación ingeniosa, Arquímedes muestra que en un paso n , los triángulos agregados tendrán un área mayor a la mitad de la diferencia entre A y el área del polígono $n-1$. Para llegar al absurdo, apela a un resultado (también probado por exhaución) que le permite comparar la suma de las áreas de los triángulos agregados en los n pasos con el área del triángulo original.

Este método ganará dominancia en el campo de la demostración de la igualdad entre dos magnitudes: Arquímedes lo empleará para una amplia gama de problemas, diseñando para cada uno una sucesión de figuras adecuadas para la comparación. Ahora bien, como el propio Arquímedes expresa en una carta a Eratóstenes, una cosa es demostrar que las áreas valen lo mismo, y otra muy distinta es encontrar cuál es el área adecuada para realizar la comparación: “será posible captar ciertas cuestiones matemáticas por medios mecánicos, lo cual, estoy convencido, será útil para demostrar los mismos teoremas. Yo mismo, algunas de las cosas que descubrí por vía mecánica, las demostré luego geométricamente (...) es más fácil, una vez adquirido por este método, un cierto conocimiento de los problemas, dar luego la demostración, que buscarla sin ningún conocimiento” (Rivera Meneses, p.15)

De hecho, en el propio “La cuadratura de la parábola” un gran número de proposiciones están dedicadas a “pesar elementos infinitesimales de X comparándolo con los de una figura Y de la que se conoce su área, volumen y su centro de gravedad. Para conseguir un equilibrio se dispone de un eje de tal manera que las figuras se encuentren en la misma recta, entonces los centros de gravedad de estas figuras infinitesimales están en algún punto del eje. El eje se convierte en el brazo de una balanza” (Rivera Meneses, p.16).

Es decir: el método de exhaución no operaba como un método de hallazgo. Era requerido investigar el problema mediante otro tipo de argumentos (por ejemplo, mecánicos) que permitieran establecer la conjetura, para luego abocarse a la -para nada trivial- tarea de demostrar la igualdad mediante el método de exhaución.

Consideraciones finales y preguntas

En el breve y sucinto recorrido que he descrito hemos advertido la potencia y pregnancia de un método hipotético-deductivo que permite, por ejemplo, demostrar la igualdad entre el área de una sección de parábola y la de un determinado triángulo. Este método resultará casi tan riguroso como costoso, no solo por requerir a la reducción a un doble absurdo, ni por la complejidad de construir la sucesión adecuada de polígonos, sino porque puede incluso no proveer siquiera “el candidato” al área en cuestión.

Si hoy nos propusiéramos calcular el área de una sección de parábola, podríamos hacerlo apelando a la noción de integral definida, y mediante un procedimiento de cálculo algebraico

encontraremos un valor, y **simultáneamente** habremos demostrado que es el valor en cuestión. Los dos procesos antes descritos se encuentran solapados en una técnica que se cristaliza con la denominada “Regla de Barrow”.

No obstante, aunque las técnicas modernamente disponibles hayan permitido sustraer de la experiencia de trabajo de cálculo al método de exhaustión, si revisamos la noción de Suma de Riemann -que es con la que la mayoría de los libros modernos definen la “Integral definida”- son múltiples las zonas de contacto. Quizás la más evidente sea la construcción de una sucesión de polígonos que aproximen el área en cuestión. No obstante, mucho las separa: por ejemplo, la construcción de las sumas de Riemann se apoya en los valores numéricos de la función, más que en propiedades geométricas de la curva del gráfico. Las técnicas de cálculo empleadas a lo largo de la historia previas a la institución de las Sumas de Riemann descansan en múltiples propiedades geométricas de las curvas en cuestión.

En este sentido, si bien para funciones positivas la integral definida representa (o puede representar) el área de una región, el problema geométrico se encuentra modernamente desplazado en una gran medida por la relación funcional que lo define.

Con estas consideraciones en mente, parece plausible afirmar que en algunos procesos de enseñanza-aprendizaje del concepto de integral se solapan la obtención de un valor posible para el área y la demostración de que es el correcto. Este solapamiento es posible gracias a la construcción de teoría de cálculo integral, donde la “Regla de Barrow” cumple un rol fundamental, a diferencia de otro tipo de consideraciones geométricas.

En este contexto, ¿qué sentido dan nuestros estudiantes a un concepto tan históricamente emparentado con un problema geométrico complejo, si las técnicas que aprenden para lidiar con dichos problemas los desplazan hacia un ámbito algebraico-funcional? ¿Cuál es la potencialidad didáctica de sostener un trabajo geométrico en el marco de la enseñanza-aprendizaje del concepto de integral? ¿Cómo sostener un trabajo geométrico didácticamente rico que conviva un trabajo técnico ineludible?

Bibliografía

Artigue, M. (1995). “Ingeniería didáctica” en Pedro Gómez (Ed.). *Ingeniería didáctica en educación matemática*, 33-59.

Artigue, M. (1990). “Epistémologie et didactique”. *Recherches en didactique des mathématiques*. 10(23). París.

Heath, T. L (2010) *The Works of Archimedes - Edited in Modern Notation with Introductory Chapters*. Read Books Design, England.

Kline, M. (1972) *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford University Press.

Ritter, J. (1989) “Babilonia – 1800”, en M. Serres (éd.), *Historia de las Ciencias*, p. 17-37.

Rivera Meneses, A.R. “Arquímedes. El genio de Siracusa”, disponible en: https://tic.uis.edu.co/ava/pluginfile.php/109331/mod_resource/content/1/Lectura%201..pdf

Sonar, T. (2021). Prologue: 3000 Years of Analysis. In: 3000 Years of Analysis. Birkhäuser, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-58223-4_1

MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERENCIA SOBRE LAS ISOMETRÍAS PARA LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO EN MATEMÁTICA

Jessica B. Albarracin y Mabel Licera

**Universidad Nacional de Río Cuarto (UNRC) - Instituto de Formación Docente
Continua de Villa Mercedes (IFDCVM)**

Ruta Nac. 36 - Km. 601, Río Cuarto, Córdoba - 9 de Julio 1147, Villa Mercedes, San Luis.

jessicaalbarracin@gmail.com

Categoría del trabajo: Trabajo de investigación

Nivel Educativo: Nivel Superior

Palabras clave: Geometría, Isometrías - Formación de Profesores

Resumen: Esta presentación se inscribe en una tesis de Maestría en Educación Superior que intenta, desde el marco teórico y metodológico que proporciona la TAD, abordar el problema didáctico ¿Cuál es el equipamiento praxeológico necesario (o por lo menos útil) para que futuros profesores puedan intervenir de manera efectiva y pertinente en la formación matemática de los estudiantes de nivel medio, en relación con el estudio de las isometrías? ¿Qué se puede hacer desde la formación docente para que dispongan de él? Ponemos a consideración hipótesis de trabajo, cuestiones que se derivan de ellas y respuestas tentativas, que forman parte de la dimensión epistemológica del problema que se investiga.

Introducción

Una hipótesis de la Teoría Antropológica Didáctica (TAD) es la relatividad institucional de los saberes y la inexistencia de una posición epistemológica universal, como marco de referencia para guiar la investigación didáctica. Atendiendo a este hecho, presentamos parte de la estructura de un *Modelo Epistemológico de Referencia* (MER) relativo al estudio de una obra matemática en torno a las isometrías del plano (OMIP) en la formación de profesores en matemática (IFP), que intenta responder a la cuestión: ¿Qué debería abarcar una obra matemática relativa a OMIP en IFP? ¿Cómo interpretar y describir este conocimiento? ¿Cuáles son sus componentes y cómo se estructuran? ¿Cuáles son las cuestiones matemáticas o extra-

matemáticas a las que responde? Esbozamos respuestas parciales considerando los *niveles de co-determinación didáctica* (Chevallard, 2002):

civilización↔sociedad↔escuela↔pedagogía↔disciplina↔área↔sector↔tema↔cuestión

Nivel Pedagógico, nivel disciplinar, fines educativos

De acuerdo con supuestos básicos de la TAD asumimos en el nivel pedagógico, el *paradigma de cuestionamiento del mundo*, que promueve un estudio basado en una dialéctica entre cuestiones-respuestas y en el nivel disciplinar, el *paradigma de la modelización matemática* (Gascon & Nicolas, 2021), que entiende el proceso de construcción y re-construcción del saber, como un proceso de modelización. Los fines de referencia asociados a este paradigma, según Gascón & Nicolás (2022) son los siguientes: (a) Los alumnos deben estudiar cuestiones problemáticas de un sistema (extra o intramatemático), entre las que se incluyen aspectos de economía, fiabilidad o aplicabilidad de las técnicas incluidas en el modelo. (b) Para proponer respuestas se deben usar argumentos racionales, utilizando propiedades del sistema modelizado y la relación entre éste y el modelo.

Nivel subdisciplinar: La Geometría Elemental en IFP y en la Institución de Educación Matemática Secundaria

En relación con la geometría, Gascón & Nicolás (2022) reconocen la prevalencia de un paradigma teorista en IFP y la ausencia de un paradigma compartido en la Institución de Educación Matemática Secundaria, despojando de sentido el estudio de la geometría en ambas instituciones. Respecto a la geometría Gascón et al., (2017) afirma que:

“[...] la geometría es, en primera instancia, una ciencia física cuyo objeto de estudio es el espacio sensible, y las verdades geométricas son primariamente de orden experimental mediante el contraste empírico-deductivo de modelos [...] Por lo tanto, no podemos pensar en una reconstrucción del conocimiento geométrico que «olvide» sus raíces «empiristas» y su carácter modelizador del mundo sensible” (p. 17).

Consideramos importante proponer un MER que rescate puntos de encuentro con esa realidad extramatemática que se constituye en el germen del conocimiento geométrico.

Nivel tema: Isometrías

Atendiendo a criterios propuestos por Olivero, Bosch, & Gascón (2017) para el estudio de la geometría elemental, asumimos algunas hipótesis de trabajo:

H_0 : La noción de isometría permite vincular, dentro de un modelo matemático, la noción informal de movimiento de figuras con la noción de congruencia.

H_1 : Es posible establecer relaciones entre cuestiones problemáticas extramatemáticas y OMIP, recuperando posibles razones de ser de esta obra.

H_2 : El trabajo técnico en OMIP debe incluir una dialéctica entre la exploración empírica y la deducción, que ponga de manifiesto potencialidades y limitaciones de estas formas de hacer.

H_3 : El trabajo técnico en OMIP debe incluir una dialéctica entre geometría sintética (GS) y analítica (GA), destacando la complementariedad entre estos sectores.

A partir de estas hipótesis proponemos algunos interrogantes que guían el desarrollo del MER:

¿Cómo se vinculan la noción informal de movimiento de figuras con las nociones matemáticas de isometría y congruencia?

La obra *Los Elementos* de Euclides reformula, en un sistema axiomático, conocimientos geométricos preexistentes. Como lo expresa Santaló, L. (1986), una característica de esta obra es intentar eliminar todo razonamiento que remita a la idea de movimiento. Sin embargo, ya en la proposición 4 del libro I, aparecen expresiones como “*aplica* el triángulo *ABC* al triángulo *DEF*”, “el punto *A* se *coloca* sobre el punto *D*”. Las acciones “aplicar” y “colocar” no se derivan de sus definiciones y axiomas, sino que se basan en la idea de movimiento. Moise y Downs (1968), bajo el título *El concepto más general de congruencia* (p.269), señalan que algunos matemáticos han caracterizado esta idea de movimiento enunciando el postulado: *las figuras geométricas pueden moverse sin cambiar su tamaño o forma* (p. 270) y plantea la dificultad de aceptarlo por la ambigüedad de los términos usados. . Moise y Downs (1968), en cambio, modelizan la noción extra matemática de *movimiento* con el objeto matemático *isometría entre dos conjuntos de puntos* —que definen como *una biyección que conserva distancias* (y consecuentemente “tamaño” y “forma”, de ahí que se nombre también como *movimiento rígido*)— y unifican definiciones de congruencia para segmentos, ángulos, triángulos y otras figuras, mediante la siguiente proposición: *Dos conjuntos de puntos son congruentes si y sólo si existe entre ellos una isometría*. Se enriquece así el marco *tecnológico-teórico* que permite crear y justificar *técnicas* alternativas a otras tradicionales para demostrar teoremas geométricos.

¿Qué cuestiones extramatemáticas podrían constituirse en razones de ser de OMIP?

En el espacio existe la necesidad de optimizar movimientos de objetos utilizando máquinas u optimizar el diseño de artefactos que involucran movimientos de sus piezas. Por ejemplo ¿Qué movimientos debe realizar una mano robótica para que mueva objetos con un fin específico? ¿Cómo hacer que una ficha de dominó caiga dada vuelta? ¿En qué punto de la banda debe rebotar una bola de billar, para luego tocar otra bola? Un modelo matemático posible de estas problemáticas extramatemáticas, consiste en seleccionar una sección transversal del objeto

físico que se mueve y registrar las marcas que deja esta sección sobre un papel, antes (posición inicial) y luego de moverlo (posición final). De este modo, la situación se representa como un “movimiento rígido” de una figura en el plano. Es posible, con herramientas propias de GS, definir en OMIP tres isometrías: *traslación*, *rotación* y *reflexión axial*. Identificamos tres tipos de problemas en el modelo matemático:

T_1 : Si se conoce la posición inicial y el movimiento aplicado a una figura, ¿cuál será su posición final?

T_2 : Si se conoce la posición final y el movimiento aplicado a una figura, ¿cuál era su posición inicial?

T_3 : Si se conoce la posición inicial y final de una figura, ¿cuál es el movimiento que permite este cambio? Esta cuestión lleva a otras dos:

(a) Cuando este cambio implica una composición, ¿puede reducirse a un único movimiento?

(b) ¿Siempre existe una traslación, rotación o reflexión axial que resuelva esta cuestión? ¿Existen otras isometrías?

Los problemas que corresponden a T_1 y T_2 son posibles de resolver en GS, empleando la técnica de *regla y compás* (lápiz y papel, o software de geometría dinámica). Sin embargo, los problemas que corresponden a T_3 podrían resultar complejos desde esta perspectiva. Observemos esto en un ejemplo: ¿Qué resulta de la composición de dos rotaciones?

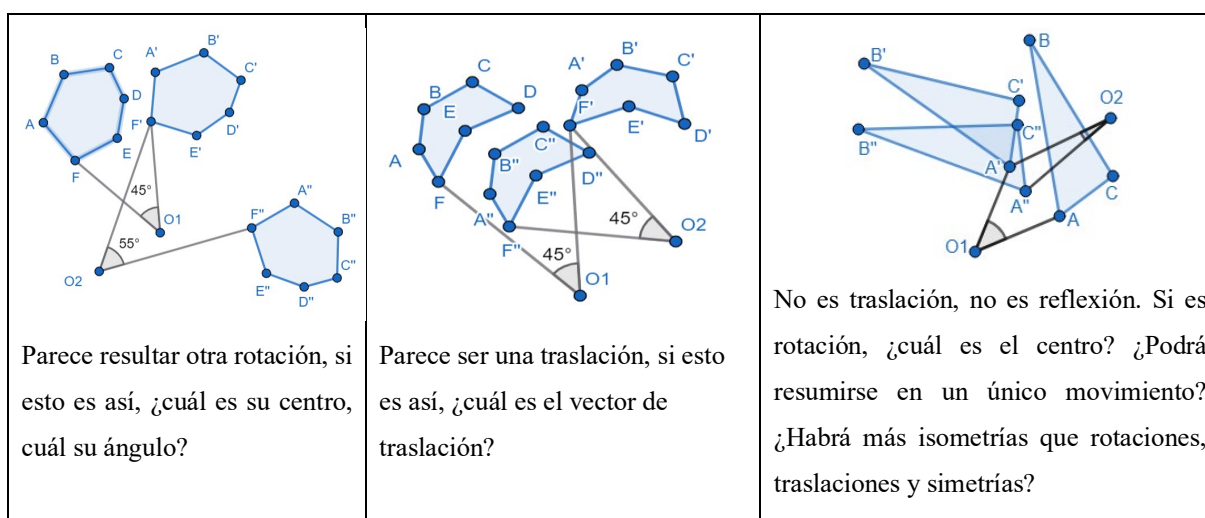


Figura 1: ejemplos de composición de dos rotaciones

Las observaciones particulares resultan insuficientes para dar una respuesta definitiva (figura 1). Proponemos complementar la modelización en GS con técnicas propias de GA, utilizando un sistema de coordenadas cartesianas en R^2 . Esto requiere un trabajo dialéctico entre GS y GA. El siguiente cuadro sintetiza el trabajo realizado y muestra el resultado:

Transformación	Modelo Algebraico
Traslación de vector $\vec{v} = (a, b)$.	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
Reflexión axial respecto del eje x.	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Rotación con centro O (0,0) y ángulo $\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
Rotación con centro C(a,b) $\neq$ (0,0) y ángulo $\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix} \right\} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \left(\text{Id} - \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
Reflexión axial cuyo eje pasa por O(0,0) y forma un ángulo φ con el semieje positivo x.	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
Reflexión axial cuyo eje no pasa por O(0,0) y contiene el punto M(a,b).	Sea φ el ángulo que se forma entre el eje de reflexión (e) y el eje x $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix} \right\} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\} \right\}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \left(I - \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Es posible expresar todas estas isometrías como $X' = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ y distinguir dos subtipos:

- *Tipo I:* Las que cumplen $A = \begin{pmatrix} t & -q \\ q & t \end{pmatrix}$ y $\det(A) = 1$, que incluyen las traslaciones y rotaciones.
- *Tipo II:* Las que cumplen $A = \begin{pmatrix} t & q \\ q & -t \end{pmatrix}$ y $\det(A) = -1$, que incluyen las reflexiones axiales.

Sea G el conjunto de transformaciones del plano que cumplen con estas condiciones. El trabajo al interior de este modelo, utilizando las propiedades del cálculo matricial, y propiedades de las funciones trigonométricas, permite validar o descartar conjeturas acerca de la composición de movimientos. Retomamos la cuestión anterior:

¿Qué se obtiene si se componen dos rotaciones?

Veamos en primer lugar qué resulta si se componen dos transformaciones de *tipo I*:

Sean éstas

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & -q \\ q & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad t^2 + q^2 = 1$$

$$g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & -s \\ s & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \quad r^2 + s^2 = 1$$

Entonces la composición es:

$$g \circ f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rt - sq & -st - rq \\ st + rq & rt - sq \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r & -s \\ s & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

Sea $A = \begin{pmatrix} rt - sq & -st - rq \\ st + rq & rt - sq \end{pmatrix}$, como $t^2 + q^2 = 1$ y $r^2 + s^2 = 1$, se prueba que $\det(A) = 1$. Por lo tanto $g \circ f$ es de *Tipo I*.

En el caso que f y g sean rotaciones, se cumple que $t \neq 0, r \neq 0$, donde $t = \cos \varphi, q = \sin \varphi, r = \cos \gamma, s = \sin \gamma$, φ y γ son los ángulos de rotación respectivamente.

- Si $A = \text{Id}$ la composición resulta una traslación de vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} r & -s \\ s & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.
- Si $A \neq \text{Id}$, $[\text{Id} - A]$ tiene matriz inversa, luego la composición resulta una rotación

$$g \circ f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r & -s \\ s & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} =$$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \{[Id - A][Id - A]^{-1}\} \left[\begin{pmatrix} r & -s \\ s & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right] =$$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + [Id - A] \left\{ [Id - A]^{-1} \left[\begin{pmatrix} r & -s \\ s & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right] \right\} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + [Id - A]B$$

Con centro de giro B . Donde $B = [Id - A]^{-1} \left[\begin{pmatrix} r & -s \\ s & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right]$. También se puede constatar que el ángulo de giro es $\varphi + \gamma$.

¿Cuándo se cumple que $A = Id$? $A = \begin{pmatrix} rt - sq & -st - rq \\ st + rq & rt - sq \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ equivale a:

$$\begin{cases} t^2 + q^2 = 1 \\ r^2 + s^2 = 1 \\ rt - sq = 1 \\ st + rq = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -s = q \\ t = r \end{cases}$$

Es decir $-\sin \gamma = \sin \varphi$ y $\cos \varphi = \cos \gamma$. Por lo tanto, la composición de las rotaciones es una traslación, cuando $\gamma + \varphi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Como observación final, afirmamos que la potencia del modelo algebraico construido en GA no solo permite validar conjeturas planteadas en GS sobre traslaciones, rotaciones y reflexiones —en particular desarrollamos un ejemplo donde se estudia la composición de rotaciones— sino que permite responder a cuestiones matemáticas más amplias, algunas relativas al sistema inicial y otras relativas al propio modelo analítico:

¿Qué se obtiene si se componen dos movimientos cualesquiera? ¿Siempre es posible optimizar, reducir, dos movimientos a uno solo? ¿Todas las transformaciones de G son isometrías? ¿En G hay más transformaciones que traslaciones, rotaciones y reflexiones? ¿Hay isometrías que no pertenezcan a G ?

El MER propuesto permite caracterizar el conjunto de todas las isometrías en R^2 , constituyéndose en una respuesta posible a posibles razones de ser, qué debería abarcar y cómo estructurar una obra matemática relativa a OMIP en IFP.

Referencias bibliográficas

- Chevallard, Y. (2002). *Organiser l'étude. 3. Écologie et régulation*. En J. L. Dorier (Ed.), *Actes de la XIème École d'Été de Didactique des Mathématiques* (pp. 41–56). La Pensée Sauvage.
- Gascón, J., Bosch, M., & Olivero, F. (2017). Praxeologías matemáticas en torno a la geometría para la formación del profesorado. En *Actas del IV Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 875–898).
- Gascón, Josep, & Nicolás, Pedro. (2021). Incidencia de los paradigmas didácticos sobre la investigación didáctica y la práctica docente. *Educación matemática*, 33(1), 7-40. Epub 06 de diciembre de 2021. <https://doi.org/10.24844/em3301.01>
- Gascón Pérez, J., & Nicolás, P. (2022). Paradigm crisis in the step from tertiary to secondary mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53(5), 1153-1169. doi: 10.1080/0020739x.2021.2005169
- Moise, E. E., & Downs, F. (1968). *Elementos de geometría superior* (M. García, Trad.). Centro Regional de Ayuda Técnica, Agencia para el Desarrollo Internacional (AID).
- Santaló, L. (1986). *Geometría: su enseñanza. Estructura modular 2*. CONICET.

DEL RÉGIMEN TRADICIONAL DE PARCIALES AL SISTEMA DE CRÉDITOS: EFECTOS DE UNA EVALUACIÓN FORMATIVA EN LA TRAYECTORIA ACADÉMICA UNIVERSITARIA

**Yanina Macarena Morales, María Florencia Mostto, Octavio Agustín Raschetti y Sergio
Pablo Farabello**

Facultad de Bromatología, Universidad Nacional de Entre Ríos

Macarena.morales@uner.edu.ar

Categoría del trabajo: Trabajos de investigación

Nivel educativo: Universitario

Palabras clave: evaluación formativa – créditos - inteligencias múltiples - trayectoria académica.

Resumen

El presente trabajo aborda la evaluación de los aprendizajes en el ámbito universitario, con énfasis en la implementación de un sistema de evaluación formativa basado en créditos en la asignatura Matemática I de la Facultad de Bromatología de la Universidad Nacional de Entre Ríos. El objetivo es analizar el impacto de dicho sistema en la trayectoria académica de los estudiantes.

Se toma como referente la Teoría de las Inteligencias Múltiples de Gardner y los aportes de Anijovich sobre evaluación formativa, entendida como parte integral del proceso de enseñanza-aprendizaje. Estos enfoques reconocen la heterogeneidad de los estilos cognitivos y promueven múltiples oportunidades para la expresión de saberes, favoreciendo la participación activa y la diversidad de estrategias.

La investigación adopta un diseño cuantitativo, descriptivo-comparativo y cuasi-experimental, con la implementación de un sistema de créditos con instancias diversificadas y retroalimentación continua, y la comparación entre los resultados académicos de cohortes evaluadas con el sistema tradicional y con el nuevo sistema.

Los hallazgos evidencian un incremento en los índices de retención, regularización y promoción respecto del régimen de parciales. Se concluye que el sistema de créditos constituye una alternativa superadora, al promover aprendizajes significativos y ofrecer escenarios donde los

estudiantes pueden demostrar conocimientos desde sus fortalezas individuales.

Introducción

Tradicionalmente, la aprobación y promoción de materias en el ámbito universitario han estado ligadas a exámenes escritos u orales en instancias parciales o finales. Sin embargo, en los últimos años la evaluación ha cobrado relevancia como objeto de investigación, al reconocerse su complejidad y su vínculo con múltiples dimensiones: los docentes, el contenido, la institución y el contexto social.

Santos Guerra (2003) sostiene que la evaluación está condicionada por disposiciones legales que la inspiran y regulan. En el caso de la Facultad de Bromatología de la Universidad Nacional de Entre Ríos, se enmarca en reglamentaciones institucionales, siendo la normativa inmediata el Reglamento Académico aprobado por Resolución CD 023/14.

Evaluar supone mucho más que aplicar instrumentos de medición: implica tomar decisiones respecto a qué evaluar, cómo, cuándo y para qué hacerlo. Las respuestas dependen del marco teórico adoptado. En este trabajo, la evaluación se concibe como parte del proceso de enseñanza y aprendizaje, no sólo como un mecanismo de acreditación. Como sostiene Anijovich (2010), la evaluación debe estar al servicio del aprendizaje, proporcionando información continua y significativa tanto para docentes como para estudiantes.

La evaluación formativa, desde esta perspectiva, cumple una función reguladora al identificar fortalezas y dificultades en el proceso, permitiendo intervenir antes de la acreditación final (Anijovich, 2010). Para que cumpla este propósito, debe ser continua, evidenciar procesos y ofrecer oportunidades de mejora, lo cual exige que los docentes brinden múltiples instancias para que los estudiantes demuestren sus aprendizajes.

Con este marco, la investigación se propone diseñar e implementar un sistema de evaluación, destinado a reemplazar los exámenes parciales tradicionales, con el fin de favorecer un seguimiento más detallado, retroalimentación constante y una evaluación más justa y significativa.

Planteamiento del problema

La asignatura Matemática I forma parte del Ciclo de Cursado Común (CCC) de la Facultad de Bromatología de la Universidad Nacional de Entre Ríos, compartido por las carreras Licenciatura en Bromatología, Farmacia, Bioquímica y Tecnicatura en Química. La misma se cursa en el primer semestre del primer año de dichas carreras.

Hasta 2019 la evaluación en Matemática I se realizaba mediante dos parciales escritos con sus respectivos recuperatorios que, de ser aprobados con nota igual o mayor a 8, permitían acceder a la promoción y, si eran aprobados con nota igual o mayor a seis, pero menor a ocho, permitían

acceder a la regularidad. En 2020, con el Aislamiento Social Preventivo y Obligatorio (ASPO) y el Distanciamiento Social (DISPO), se implementaron cuestionarios asincrónicos y parciales virtuales con coloquios individuales. En 2021 con la vuelta parcial a la normalidad se mantuvo dicha modalidad y en los años 2022 y 2023 se aplicó en la presencialidad plena. A pesar de estas modificaciones, el sistema seguía presentando dificultades, en parte por los altos niveles de ansiedad y estrés que genera el método tradicional de parciales en estudiantes de primer año. Como advierte Anijovich (2010), las evaluaciones sumativas centradas en instancias puntuales, pueden producir frustración y desmotivación, afectando la trayectoria académica.

En este contexto, surgió la propuesta de implementar en 2024 un sistema de evaluación continua basado en créditos, que permitiera un seguimiento progresivo, la identificación temprana de dificultades y una mejora en la experiencia de aprendizaje.

Objetivos

Objetivo general

Evaluar el impacto de la implementación de un sistema de evaluación formativa basado en créditos en la trayectoria académica de los estudiantes en Matemática I del Ciclo de Cursado Común de la Facultad de Bromatología de la Universidad Nacional de Entre Ríos.

Objetivos específicos

- Diseñar e implementar un sistema de evaluación formativa basado en créditos, orientado al seguimiento continuo del aprendizaje y a la oferta de múltiples instancias de acreditación.
- Analizar los resultados académicos de los estudiantes de Matemática I que fueron evaluados bajo el sistema de créditos y compararlos con los obtenidos por estudiantes evaluados con el régimen tradicional de parciales.

Marco teórico

Se adopta como marco teórico la Teoría de las Inteligencias Múltiples (TIM) de Howard Gardner (1983, 1999, 2001, 2005), que desafía la visión tradicional de la inteligencia centrada en el coeficiente intelectual y propone un enfoque más amplio y dinámico. Gardner sostiene que la inteligencia es educable y depende de la interacción entre factores biológicos y ambientales. Inicialmente identificó siete tipos de inteligencia, ampliándolos luego a nueve: lingüística, lógico-matemática, espacial, cinético-corporal, musical, interpersonal, intrapersonal, naturalista y existencial.

Cada persona posee todas las inteligencias en distintos niveles y aprende mejor cuando las actividades se adaptan a sus fortalezas. Esto implica que los docentes deben ofrecer experiencias variadas y adaptar métodos a los estilos individuales. Desde esta perspectiva, la

evaluación cobra un rol central no solo como instrumento de medición, sino como proceso de aprendizaje. Gardner recomienda alejarse de los test estandarizados y centrarse en métodos auténticos y contextualizados, como la observación y la documentación del desempeño en situaciones reales, lo que se alinea con la evaluación formativa basada en retroalimentación continua.

La evaluación no debe concebirse como un juicio final, sino como un instrumento que ajusta la enseñanza, fortalece habilidades y potencia el desarrollo según las inteligencias predominantes. La combinación de la TIM con una evaluación formativa posibilita un aprendizaje significativo e inclusivo, en el que los estudiantes cuentan con múltiples oportunidades para demostrar conocimientos. Según Anijovich (2010), la evaluación debe estar al servicio del aprendizaje, no de la acreditación, generando instancias que visibilicen procesos, detecten dificultades y ofrezcan oportunidades de mejora. La metacognición es clave: los estudiantes reflexionan sobre su aprendizaje, identifican estrategias eficaces y reconocen obstáculos. Como plantea Anijovich (2017), cuando los estudiantes conocen los objetivos y criterios de evaluación pueden dar sentido a la tarea, autorregularse y comprender el error como oportunidad de aprendizaje.

Finalmente, Gardner y Anijovich coinciden en que un sistema de evaluación debe promover equidad e inclusión, ofreciendo múltiples formas de acceso y acreditación del conocimiento. En este marco, un sistema de créditos constituye una alternativa superadora, al contemplar modalidades escritas, audiovisuales, colaborativas, lúdicas y prácticas, brindando a los estudiantes diversas oportunidades para demostrar lo aprendido de acuerdo con sus fortalezas cognitivas y estilos de aprendizaje.

Metodología

La investigación se enmarca en un enfoque cuantitativo, descriptivo-comparativo y cuasi-experimental. Se implementó un sistema de evaluación formativa basado en créditos, comparando los resultados obtenidos con los de cohortes anteriores que cursaron bajo el régimen de exámenes parciales tradicionales.

La población analizada incluyó a los estudiantes inscriptos en el SIU-Guaraní entre 2019 y 2025 que finalizaron la cursada de Matemática I, considerando específicamente la cohorte 2019 (evaluada con parciales escritos) y 2022–2025 (evaluadas con el progresivo cambio de sistema). Los años 2020 y 2021 fueron excluidos debido a modificaciones excepcionales en las condiciones de cursado por el ASPO–DISPO, que podrían haber distorsionado la comparación. El sistema de créditos diseñado y aplicado en los años 2024 a 2025 incluyó trece instancias de evaluación diversificadas, combinando actividades individuales y grupales, teóricas y prácticas, en modalidades sincrónicas y asincrónicas. Entre estas se contemplaron cuestionarios,

producciones escritas y audiovisuales, trabajos colaborativos y propuestas lúdicas interactivas. La aprobación progresiva de los créditos permitió a los estudiantes alcanzar la regularización y promoción de la asignatura, reemplazando la estructura tradicional de dos parciales.

Para garantizar transparencia y claridad en los criterios de evaluación, cada crédito contó con rúbricas previamente subidas al aula virtual y analizadas en clase junto a los estudiantes, en línea con Anijovich (2017), quien destaca la importancia de explicitar los objetivos de cada tarea para que los alumnos puedan dotarlas de sentido y autoevaluar su desempeño.

Los datos utilizados para el análisis provienen de registros institucionales oficiales, entre ellos las actas de regularidad y promoción, los listados de inscripción y asistencia, y los registros internos de seguimiento del sistema de créditos. A partir de esta información, los estudiantes fueron clasificados en cuatro categorías: regularización, promoción, libre por evaluación y libre por inasistencia. Los resultados se organizaron en tablas con el fin de comparar los índices de regularización, promoción y condición de libre en cada sistema de evaluación.

Análisis

En esta sección se presentan los resultados obtenidos a partir de la comparación entre el régimen tradicional de parciales y el nuevo sistema de evaluación por créditos, para ello se expone la tabla con la distribución porcentual del total de estudiantes según la condición de regulares o libres (Tabla 1) y a su vez se subdividen dichos grupos en regulares sin promoción, regulares con promoción, libres por evaluación y libres por inasistencia (Tabla 2).

Tabla 1. Distribución porcentual de estudiantes según condición regular o libre en los años 2019, 2022-2025					
	2019	2022	2023	2024	2025
Regulares	61,7	67,5	76,7	80,7	81,5
Libres	38,3	32,5	23,3	19,3	18,5
Total	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0

Tabla 2. Distribución porcentual de estudiantes según condición académica en los años 2019, 2022-2025					
	2019	2022	2023	2024	2025
Regulares sin promoción	34,6	33,8	37,0	20,0	19,7
Promoción	27,1	33,7	39,7	60,7	61,8
Libres por evaluación	23,4	16,9	8,2	12,4	11,5
Libre por inasistencia	14,9	15,6	15,1	6,9	7,0
TOTAL	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0

En los resultados obtenidos se evidencia una tendencia creciente en la proporción de alumnos regulares, que aumenta del 61,7% (n=66) en 2019 al 81,5% (n=128) en 2025. De forma paralela, se observa una disminución sostenida en la proporción de estudiantes libres, que desciende del

38,3% (n=41) al 18,5% (n=29) en el mismo período.

A partir de los estudiantes que aprobaron la cursada, se identificó qué porcentaje de estudiantes aprobaron la asignatura de manera directa por promoción (Tabla 3).

Tabla 3. Distribución porcentual de la condición regular o promoción considerando únicamente a los estudiantes que aprobaron la cursada.					
	2019	2022	2023	2024	2025
Regulares	56,1	50	48,2	24,8	24,2
Promoción	43,9	50	51,8	75,2	75,8
Total	100	100	100	100	100

Del total de estudiantes que aprobaron la cursada en el 2019 el 43,9% (n=29) alcanzó la promoción directa de la materia, mientras que en el año 2025 este valor ascendió al 75,78% (n=97), lo que muestra una tendencia sostenida hacia la mejora del rendimiento académico, con un aumento progresivo de los promocionados dentro del total de estudiantes que regularizaron.

Conclusiones

La implementación del sistema de evaluación formativa basado en créditos en Matemática I evidenció un incremento sostenido en los índices de regularización y promoción entre 2022 y 2025 respecto del régimen tradicional de parciales. Estos resultados se vinculan con el carácter continuo y diversificado de la propuesta, que permitió retroalimentación permanente y mayores oportunidades de acreditación. En línea con la Teoría de las Inteligencias Múltiples de Gardner y los aportes de Anijovich, el sistema reconoció la heterogeneidad de estilos cognitivos y ofreció escenarios donde los estudiantes demostraron sus conocimientos desde sus fortalezas, configurándose como una alternativa superadora de evaluación en la educación universitaria.

Bibliografía

- Anijovich, R. (2010). La evaluación significativa. Paidós.
- Anijovich, R. (2017). La evaluación formativa en la enseñanza superior. Voces de la Educación, 2(1), 31–38.
- Gardner, H. (1983). Frames of mind: The theory of multiple intelligences. Basic Books.
- Gardner, H. (1999). Intelligence reframed: Multiple intelligences for the 21st century. Basic Books. <https://ebooks.aiu.ac.ke/show/1064/pdf>
- Gardner, H. (2001). Estructuras de la mente: La teoría de las inteligencias múltiples. Fondo de Cultura Económica.
- Gardner, H. (2005). Las inteligencias múltiples 20 años después. Revista de Psicología y Educación, (1), 27–34. <https://www.revistadepsicologiayeducacion.es/pdf/3.pdf>
- Santos Guerra, M. A. (2003). Dime cómo evalúas y te diré qué tipo de profesional y de persona

eres. Revista Enfoques Educativos, 5(1), 69–80.
<https://enfoqueseducacionales.uchile.cl/index.php/REE/article/view/47513>

CONSIDERACIONES PARA UN MODELO PRAXEOLÓGICO DE REFERENCIA ENTORNO AL ESTUDIO DE LA DIVISIBILIDAD EN LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICA

Mayra Muñoz Venegas y María Laura Santori

Universidad Nacional del Comahue, Argentina

Buenos Aires 1400. Neuquén. Argentina

mayranqn90@gmail.com

Categoría del Trabajo: Trabajo de Investigación.

Nivel Educativo: Terciario y Universitario.

Palabras Claves: Formación de profesores. Divisibilidad. Teoría antropológica de lo didáctico. Modelo praxeológico.

Resumen

Esta investigación formó parte de una tesis de Maestría, se centra en la formación inicial de profesores de matemática, y aborda el estudio de la divisibilidad de números enteros desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Su objetivo es delimitar aspectos que fortalezcan el equipamiento praxeológico del futuro profesor, favoreciendo intervenciones eficaces en la enseñanza de la divisibilidad en la escuela secundaria.

El estudio se desarrolló en el Profesorado Universitario en Matemática (PUMAT) de la Universidad Nacional del Comahue, Neuquén, y dio lugar a la elaboración de un Modelo Praxeológico de Referencia (MPR) complementario al modelo vigente en torno a la divisibilidad de números enteros. El MPR se sustenta en principios que promueven la exploración de diferentes técnicas, la transición entre enfoques prealgebraicos y algebraicos, y la modelización de situaciones intra y extramatemáticas vinculadas a la divisibilidad.

Consideramos que una propuesta de enseñanza en la formación de profesores en torno al MPR complementario, permitiría la construcción de una praxeología para la enseñanza y una praxeología para la profesión docente en torno a la divisibilidad más amplia y completa que la vigente.

Introducción

En Argentina, la obligatoriedad de la escuela secundaria nos convoca a repensar la formación

de sus profesores. En Neuquén, dentro de la Universidad Nacional del Comahue, la Facultad de Economía y Administración ofrece el Profesorado Universitario en Matemática (PUMAT), espacio donde se centra nuestra investigación.

La labor docente es una profesión y un trabajo caracterizado por la transmisión y la producción de conocimientos orientados a una formación crítica y emancipadora de los estudiantes (ANFHE-CUCEN, 2011), aunque en la formación de profesores de matemática hay muy pocos espacios para pensar este tipo de educación (Corica y Otero, 2014).

Ruíz-Olarría (2015) plantea que la profesión de profesor de matemáticas, como profesión en construcción, requiere de recursos matemático-didácticos que permitan afrontar dificultades, problemas y retos que surgen continuamente en el ejercicio de la docencia y que, por su complejidad, el docente no puede abordar en solitario. En este sentido, se evidencian dos perspectivas: se pueden concebir y abordar las dificultades de los profesores como problemas individuales o personales, o bien como dificultades de la profesión, que demanda soluciones colectivas. Desde esta segunda mirada, nuestro trabajo se orienta a pensar propuestas que permitan superar estas dificultades; en particular abordamos el estudio de la divisibilidad en torno a los números enteros. La noción de divisibilidad tiene el potencial de constituirse en un contenido capaz de articular dos áreas centrales de la matemática: la aritmética y el álgebra.

El actual Diseño Curricular Jurisdiccional de Neuquén señala que el estudio de la divisibilidad no debe limitarse al cálculo de divisores, mínimo común múltiplo y máximo común divisor o al uso de técnicas aisladas como es el caso de la descomposición en factores primos, sino promover situaciones que permitan ahondar, por ejemplo, en los distintos sentidos del MCD, y realmente requieran la factorización en primos o fomenten la producción de un algoritmo para encontrarlo (DCJ-Nqn, 2018, p. 271). La divisibilidad ocupa un lugar importante en la escuela secundaria como en la formación de maestros y profesores. Sin embargo, diversas investigaciones (Markiewicz, y Etchegaray, 2017; Espinoza y Pochulu, 2020), muestran que los estudiantes, en las distintas etapas educativas, presentan dificultades para resolver tareas sencillas vinculadas con este contenido, por lo tanto, resulta fundamental revisarlo en la formación de profesores.

Problema de investigación y objetivos

En la actualidad se están desarrollando varias investigaciones en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) en torno a la educación matemática y la formación de profesores, poniendo el foco en el análisis y cuestionamiento de las organizaciones matemáticas que se proponen estudiar en los diferentes niveles educativos, sin embargo, no ha sido abordada específicamente la divisibilidad en la formación de profesores, es por esto que nos interesa

estudiar qué conocimiento debería tener un futuro profesor de matemática para poder dar respuesta a lo propuesto por el diseño curricular de la escuela secundaria en torno a la enseñanza de la divisibilidad.

Entendiendo por equipamiento praxeológico matemático-didáctico como un conocimiento propio y necesario de la profesión docente, que abarca un conjunto de praxeologías matemáticas y didácticas que el profesor puede activar en un momento dado, bajo ciertas condiciones y restricciones dadas, surge la siguiente pregunta de investigación: *¿Cuál debería ser el equipamiento praxeológico matemático - didáctico respecto al estudio de la divisibilidad de los números enteros, que debería tener un futuro profesor de matemática para poder intervenir de forma efectiva y pertinente en la formación matemática de sus estudiantes?*

Consideramos que las herramientas teóricas y metodológicas brindadas por la TAD tienen el potencial para la elaboración de un Modelo Praxeológico de Referencia (MPR) complementario al modelo vigente en la formación del PUMAT, que siembre bases para el diseño de futuras propuestas en la formación de profesores que ayuden a enriquecer el equipamiento praxeológico matemático-didáctico del futuro profesor en matemática respecto al estudio de la divisibilidad.

Para esta investigación planteamos los siguientes objetivos:

Objetivo general

Estudiar cómo se aborda en la formación inicial de profesores de matemática la divisibilidad de números enteros y delimitar aspectos que potencien el equipamiento praxeológico del futuro profesor de matemática para intervenir de forma pertinente en la enseñanza de la divisibilidad en la escuela secundaria.

Objetivos específicos

1. Identificar rasgos distintivos del modelo praxeológico vigente en la formación de profesores del PUMAT en torno a la divisibilidad.
2. Identificar fenómenos didácticos en relación al estudio de la divisibilidad de números enteros en la formación de profesores.
3. Elaborar un Modelo praxeológico de referencia complementario al modelo vigente en la formación del profesorado, en torno a la divisibilidad de números enteros.

Decisiones metodológicas

Para abordar los objetivos específicos planteados, la investigación se desarrolló en tres etapas. Etapa 1: Análisis y descripción de los documentos curriculares vigentes para la formación de profesores y la escuela secundaria. Esta etapa permite identificar cuál es la respuesta oficial que infunden los documentos curriculares con respecto al problema de la enseñanza de la divisibilidad.

Etapa 2: Análisis y descripción de la enseñanza de la divisibilidad en formación de profesores.. Este análisis permite identificar rasgos característicos del modelo praxeológico dominante en esta institución.

Etapa 3: Propuesta de un Modelo Praxeológico de Referencia de la divisibilidad en la formación de profesores complementario al modelo praxeológico dominante vigente. Este modelo busca enriquecer la actual propuesta de enseñanza en la formación de profesores.

Resultados

En este trabajo presentamos en forma resumida los principios fundamentales que rigen al Modelo Praxeológico de Referencia de la divisibilidad para la Formación de Profesores (MPR-FPDiv), que elaboramos en la Etapa 3. Su construcción se inspira en la forma en que la TAD interpreta la modelización como instrumento de articulación de la matemática escolar, en los indicadores del grado de algebrización de una praxeología matemática, y en los indicadores del grado de completitud de una organización matemática local (Fonseca, 2004; Lucas, 2010).

El MPR-FPDiv no constituye una alternativa al modelo vigente, sino más bien una propuesta complementaria que pretende fortalecer el equipamiento praxeológico matemático-didáctico de los futuros profesores de matemática en relación con el estudio de la divisibilidad.

Entre los principios fundamentales que hemos considerado para desarrollar el MPR-FPDiv complementario destacamos los siguientes: deben retomarse praxeologías que los estudiantes tienen a su disposición, para cuestionarlas y ampliarlas; se deben proponer situaciones problemáticas que habiliten la exploración de técnicas prealgebraicas, las cuales puedan evolucionar hacia técnicas algebraicas que resulten más pertinentes; los componentes de este MPR-FPDiv deben aparecer como respuesta posible a cuestiones problemáticas relativas a la divisibilidad, generando progresivamente tipos de problemas y deben aparecer de forma articulada y relacionados entre sí; las nociones teóricas deben aparecer como herramientas modelizadoras que permitan organizar un conjunto de tareas matemáticas y técnicas asociadas; se debe proponer permanentemente un diálogo entre la matemática escolar y la matemática vigente en el ámbito científico.

En base a estos principios, y considerando los principales tipos de tareas intramatemáticas vinculadas a la divisibilidad entre números, que surgen al momento de modelizar determinados tipos de situaciones extramatemáticas, se desarrolló una propuesta de MPR-FPDiv atendiendo a los siguientes objetivos, muchos de ellos complementarios entre sí:

- Cuestionar el estatus y razón de ser del Teorema del algoritmo de la división entera en relación con la noción de divisibilidad entre números y su capacidad para generar técnicas y elementos tecnológicos.

- Abordar las distintas formas de analizar si un número entero es divisible por otro, estableciendo similitudes y diferencias entre las técnicas y su alcance.
- Explicitar el entorno tecnológico-teórico que sustenta algunos criterios de divisibilidad como técnica para analizar relaciones de divisibilidad entre números.
- Estudiar la emergencia de diferentes técnicas para la búsqueda de los divisores de un número.
- Cuestionar el estatus y razón de ser del *Algoritmo de Euclides* en relación con la noción de divisibilidad entre números y su capacidad para generar técnicas y elementos tecnológicos.
- Estudiar la emergencia de diferentes técnicas para la búsqueda de (a, b) , $[a, b]$ y posibilitar la comparación entre las mismas, poniendo en evidencia su fiabilidad y economía.
- Proponer tareas y técnicas inversas en relación a la búsqueda de: divisores de un número, (a, b) y $[a, b]$.
- Considerar situaciones extramatemáticas que permitan presentar las ecuaciones diofánticas como modelo algebraico de las mismas y justifiquen el desarrollo de técnicas para resolverlas.
- Estudiar la demostración de la irracionalidad de algunos números reales.

En el trabajo de tesis se plantearon tareas a partir de cuestiones que forman parte del MPR-FPDiv y por lo tanto respetan sus principios generales, y se muestran ejemplos de procesos de estudio de tareas problemáticas que permiten aportar respuestas a dichas cuestiones

Conclusiones

La investigación permitió identificar una brecha significativa entre las expectativas y enfoques plasmados en el DCJ-Nqn (2018), lo que se indica en los lineamientos curriculares para la formación del profesorado y lo que se aborda en la formación de profesores en la UNCo. Al examinar el modelo praxeológico vigente en la formación de profesores del PUMAT de la UNCo, hemos observado un modelo docente teoricista, predominante en la formación universitaria, en el que se han perdido las razones de ser de los saberes, prevaleciendo el paradigma de visita a las obras, se privilegia la lógica axiomática y la enunciación y demostración de teoremas, lo que se plasma en un esquema: teoría→técnica→ejercicio de aplicación, con una carencia en el cuestionamiento tecnológico, impidiendo la exploración de diferentes técnicas y la articulación entre ellas. En esta investigación se ha considerado la importancia de alinear la formación de profesores de matemáticas con las expectativas y enfoques propuestos por el DCJ-Nqn, así como la necesidad de desarrollar organizaciones matemáticas más flexibles, articuladas y completas con el fin de ofrecer a profesores en formación una praxeología para la enseñanza lo suficientemente potente como para incluir una praxeología por enseñar que cobre sentido para los alumnos de escuela secundaria.

Podemos afirmar que este MPR-FPDIV contribuye a la formación de profesores puesto que se han integrado y ampliado las clases de problemas existentes en el modelo praxeológico vigente en el PUMAT y se han construido nuevas técnicas como desarrollo y generalización de técnicas aritméticas puntuales iniciales. Además, los elementos teóricos surgen necesariamente como tecnologías que permiten desarrollar, describir, interpretar y justificar el uso y el alcance de las técnicas presentes en la organización matemática en torno a la divisibilidad, y también se habilita el cuestionamiento de componentes de una praxeología matemática por enseñar, estableciendo criterios tanto para cuestionar la matemática vigente en la escuela secundaria como para proponer alternativas a lo instituido.

En síntesis, consideramos que una propuesta de enseñanza en la formación de profesores en torno al MPR-FPDIV, permitiría la construcción de una praxeología para la enseñanza y una praxeología para la profesión docente más amplia y completa que la vigente

Bibliografía

ANFHE-CUCEN (2011). *Lineamientos básicos sobre formación docente de profesores universitarios*. San Juan, Argentina: Asociación Nacional de Facultades de Humanidades y Educación - Consejo Universitario de Ciencias Exactas y Naturales.

Corica, A. y Otero R. (2014). La formación de profesores de matemática desde la teoría antropológica de lo didáctico: Un estudio de caso. *Perspectiva Educacional. Formación de Profesores*, 53(2), 20-44.

DCJ-Nqn. (2018). *Diseño curricular del ciclo básico común de la escuela secundaria de Neuquén*. <https://www.neuquen.edu.ar/resolucion-146318-diseno-curricular/>.

Espinoza, R. y Pochulu, M. (2020). Diseño de un instrumento para valorar la comprensión alcanzada en divisibilidad por futuros profesores de matemática. *Bolema*, 34 (66), 294-313.

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Secundaria y la Universidad*. [Tesis doctoral, Universidad de Vigo].

Lucas, C. (2010). *Organizaciones matemáticas locales relativamente completas*. [Tesina no publicada, Universidad de Vigo].

Markiewicz, M. y Etchegaray, S. (2017). Análisis de objetos, procesos y conflictos semióticos en prácticas algebraicas de primer año de la universidad. En *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática*. enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Ruiz-Olarría, A. (2015). *La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria: De las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza*. [Tesis Doctoral no publicada, Universidad Autónoma de Madrid].

POTENCIALIDAD EPISTÉMICA Y CONSTRUCCIÓN DE CONOCIMIENTO EN PRÁCTICAS EDUCATIVAS DE GEOMETRÍA EN ESCENARIOS DINÁMICOS

Esp. Karina Vanesa Nahuin-Dra. Patricia Maricel Konic

Universidad Nacional de la Patagonia Austral-Unidad Académica Caleta Olivia

karinanahuin@gmail.com

Categoría del Trabajo: Trabajos de Investigación

Nivel Educativo: Educación Superior Universitaria

Resumen:

Este trabajo analiza la potencialidad epistémica de prácticas educativas en el área de la Geometría mediadas por herramientas digitales, en el marco de la formación inicial del profesorado en Matemática. Se estudia particularmente la articulación entre la Geometría Sintética (GS) y la Geometría Analítica (GA), una problemática histórica que continúa generando dificultades en la enseñanza y el aprendizaje. La investigación se sostiene en el Enfoque Ontosemiótico para la Cognición y la Instrucción Matemática (EOS), que permite identificar prácticas matemáticas, objetos y procesos implicados en tareas “fértils” y detectar potenciales conflictos semióticos.

A través del análisis de una tarea específica sobre circunferencias, se examina cómo la incorporación de Software de Geometría Dinámica (SGD) transforma los procesos de resolución respecto del trabajo con lápiz y papel. Se identifican tres procesos duales fundamentales —materialización/idealización, descomposición/rectificación y particularización/generalización— cuya dinámica se ve modificada en entornos digitales, generando tensiones y nuevos objetos emergentes como puntos dinámicos y el arrastre.

Los resultados muestran que reconocer y analizar estos conflictos semióticos es un conocimiento clave para la formación docente, ya que permite diseñar estrategias didácticas más efectivas para integrar los Software de Geometría Dinámica y favorecer la construcción de significados geométricos profundos y articulados entre Geometría Sintética (GS) y la Geometría Analítica (GA).

Palabras Claves: Conflictos Semióticos-Geometría Dinámica-Formación Docente

Introducción

Esta comunicación tiene como fin compartir lo realizado en un Trabajo Final presentado para la finalización de la Especialidad en Didáctica de la Matemática que se dicta en la Universidad Nacional de Río Cuarto, el mismo pretende hacer explícitos algunos elementos esenciales para el abordaje de una investigación cuyo problema ha sido identificado en la formación docente inicial del Profesorado en Matemática, carrera que se dicta en la Universidad Nacional de la Patagonia Austral-Unidad Académica Caleta Olivia. El área problemática está contextualizada en el área de la geometría métrica, en particular, en la controversia que plantea la historia sobre la geometría, a saber, método sintético versus método analítico.

El mismo intenta aportar a un estudio praxeológico, explicaciones onto-semióticas que den cuenta de explicaciones a dificultades que pueden surgir en el trabajo efectivo de estas tareas en el aula de formación inicial del profesor en matemática, donde se identifican conflictos semióticos en el proceso de la enseñanza y aprendizaje de la geometría **sintética y analítica**.

A continuación, se presentan los antecedentes de lo que denominamos “problema profesional”, concepto que se definirá en el marco teórico y que surge a partir de la discontinuidad entre dos enfoques: el método sintético y el método analítico y la necesidad de su enseñanza en la formación inicial del profesor.

Área Problemática y Antecedentes

La enseñanza de la geometría en la formación inicial del profesorado en Matemática enfrenta el desafío de articular dos enfoques fundamentales: la Geometría Sintética (GS) y la Geometría Analítica (GA). Históricamente, ambos enfoques han sido presentados como métodos opuestos —uno basado en construcciones y relaciones espaciales, y el otro en representaciones algebraicas—, pero diversos estudios (Gascón, 2002; Elguero & Licera, 2016) señalan su continuidad y complementariedad. Sin embargo, en la práctica educativa persisten discontinuidades que generan dificultades tanto en la enseñanza como en la apropiación de conceptos geométricos por parte de los futuros docentes.

La incorporación de Software de Geometría Dinámica (SGD) —en particular, GeoGebra— aparece como una herramienta con potencial para favorecer la articulación de estos enfoques, al permitir la exploración interactiva de propiedades y relaciones

geométricas. No obstante, su uso también plantea tensiones y emergen nuevos conflictos semióticos, es decir, discrepancias entre los significados institucionales y personales de los objetos matemáticos implicados.

En esta comunicación, se propone compartir las indagaciones realizadas en el Trabajo Final realizado en la Especialidad en Didáctica de la Matemática realizada en la Universidad Nacional de Río Cuarto, sobre la potencialidad epistémica de prácticas educativas en el área de la Geometría mediadas por herramientas digitales, focalizando en la identificación y análisis de conflictos semióticos que se generan en escenarios de enseñanza que articulan GS y GA.

Primera Aproximación a la definición del Problema de Investigación

Desde la convicción que el/la profesor/a requiere de conocimientos didáctico/matemáticos disponibles antela decisión de diseñar, reformular o tomar una tarea de enseñanza y aprendizaje, se plantean las siguientes preguntas iniciales:

PG: La detección de conflictos semióticos en tareas “fértils”, para la integración de la Geometría Sintética (GS) y la Geometría Analítica (GA), ¿Resulta un conocimiento didáctico matemático útil para la formación del profesor en matemática?

P_1 ¿Será posible identificar aportes epistémicos y cognitivos del funcionamiento de estas herramientas de análisis didáctico para valorar la incorporación de SGD a este tipo de tareas?

En consecuencia, como hipótesis, en términos de expectativa de logro, se espera que, la detección de conflictos semióticos contribuirá al análisis de estudio praxeológico realizado a un tipo de tareas, generando así un conocimiento matemático-didáctico significativo en futuros profesores.

A continuación, se describirá el marco teórico y la metodología utilizada en esta investigación.

Metodológicas Tomadas

El estudio se enmarca en el **Enfoque Ontosemiótico para la Cognición y la Instrucción Matemática (EOS)** (Godino et al., 2007), que permite abordar de manera integrada el análisis epistemológico y cognitivo de las prácticas matemáticas en contextos educativos.

Se trabajó con una tarea “fértil” sobre circunferencias que requiere articular técnicas de GS y GA.

El análisis se realizó en dos niveles complementarios:

1. **Sistemas de prácticas-objetos matemáticos:** identificación de las prácticas geométricas necesarias para resolver la tarea, los objetos matemáticos implicados (conceptos, propiedades, procedimientos, argumentos) y las configuraciones epistémicas emergentes.
2. **Procesos matemáticos y potenciales conflictos semióticos:** análisis de cómo el uso del SGD transforma la dinámica de los procesos duales y genera tensiones entre significados institucionales y personales.

El trabajo comparó dos modalidades de resolución:

- Construcción inicial con lápiz y papel, para identificar objetos y técnicas propios del método sintético.
- Incorporación progresiva del SGD (GeoGebra), para explorar la dinámica de los objetos geométricos y visualizar variaciones.

Este enfoque permitió no solo describir los objetos y procesos involucrados, sino también analizar cómo emergen nuevos significados en escenarios de geometría dinámica y cómo estos pueden generar conflictos semióticos que impactan en la formación docente.

Presentación De Los Resultados

El análisis de la tarea seleccionada:

Tarea: (Elguero, C y Licera, M, 2016, 2018)

Sea la circunferencia $c: (x-4)^2 + y^2 = 4$ y el punto $A = (0,0)$

1. Encontrar las coordenadas del centro P de la circunferencia c' que pasa por A y es tangente a c en un punto B, con $B = (4,2)$
2. ¿Es posible cambiar el punto B en c de modo que el centro P de c' esté en el eje de abscisas? Si lo es, dar las coordenadas de P, en otro caso, explicar por qué no es posible.
3. Elegir otro punto B de c. ¿Es posible construir una c' que pase por A y sea tangente a c en el punto B propuesto? Si lo es, dar las coordenadas de P, en otro caso, explicar por qué no es posible.

4. Para cualquier B de c , ¿es posible construir una c' ? ¿Por qué? ¿Y si se considerara otro punto A distinto al origen de coordenadas?

mostró que el uso del SGD transforma significativamente los procesos de resolución respecto del trabajo tradicional con lápiz y papel. Se identificaron tres procesos duales fundamentales:

1. Materialización / Idealización: En Escenarios Dinámicos se parte de la materialización dinámica de los objetos (a través del arrastre y la construcción visual), en lugar de iniciar desde la idealización. Esto genera tensiones epistemológicas, como la naturalización de la continuidad en una representación discreta. Por ejemplo, la recta real es representada como un conjunto discreto de puntos, lo que puede llevar a interpretaciones erróneas sobre los dominios de movimiento de los puntos dinámicos.
2. Descomposición / Rectificación: El Software de Geometría Dinámica (SGD) promueve un ingreso sistémico a la tarea, donde el análisis de los elementos individuales emerge a posteriori. La materialización digital conlleva una rectificación constante de las descomposiciones propuestas en la tarea, permitiendo la emergencia de nuevos significados geométricos y la identificación de relaciones no previstas inicialmente.
3. Particularización / Generalización: La representación de la tarea mediante el Software de Geometría Dinámica (SGD) evidenció la necesidad de transitar entre la identificación de casos particulares y la generalización de resultados. Los ejemplos operan de manera dual: como casos particulares y como modelos representativos de clases de problemas. Esto obliga a reflexionar sobre la estructura general de las soluciones y sobre las condiciones que determinan la existencia de ciertos objetos (como el centro P de la circunferencia tangente).

Además, emergieron nuevos objetos y prácticas característicos de los Escenarios Dinámicos, como los puntos dinámicos y el arrastre, que regulan la interacción y permiten visualizar propiedades invariantes. Sin embargo, estos mismos recursos generan conflictos semióticos al transformar el uso de las propiedades geométricas (que pasan de ser condiciones estáticas a reguladoras del movimiento de los objetos).

En síntesis, los resultados ponen de manifiesto que el Software de Geometría Dinámica (SGD) no solo modifica las estrategias de resolución de problemas, sino que también impacta en la conceptualización de los objetos matemáticos y sus propiedades.

Conclusiones

El análisis realizado evidencia que reconocer y abordar los conflictos semióticos generados en entornos digitales es un conocimiento clave para la formación de futuros docentes. Comprender las tensiones epistemológicas y cognitivas que surgen del uso del SGD permite diseñar estrategias didácticas más efectivas para integrar estas herramientas en la enseñanza de la Geometría.

La articulación entre GS y GA mediada por herramientas digitales requiere un enfoque epistemológico y semiótico sólido que permita resignificar conceptos y procesos, favoreciendo una construcción más profunda y significativa del conocimiento geométrico.

Este estudio reafirma la necesidad de continuar investigando el impacto de las herramientas digitales en la enseñanza de la Matemática y en la formación docente. La detección de conflictos semióticos no solo contribuye al análisis praxeológico de tareas geométricas, sino que también ofrece criterios para la revisión y actualización de planes de estudio orientados a la formación docente en Matemática.

De este modo, la incorporación crítica del SGD puede convertirse en un recurso valioso para potenciar la comprensión, el razonamiento y la argumentación geométrica, siempre que se acompañe de un análisis sistemático de sus efectos sobre los significados matemáticos en juego.

Bibliografía

CHEVALLARD, Y. (1999): L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, Recherches en Didactique des Mathématiques, 19/2, 221-266

COLL, C. (2009). Aprender y enseñar con las TIC: expectativas, realidad y potencialidades. En: R. Carneiro, J. C. Toscano y T. Díaz (comp.), Los desafíos de las TIC para el cambio educativo (pp. 113-126). Madrid: OEI-Santillana

ELGUERO, C y LICERA, M (2016). La hipérbola. Una actividad de estudio e

investigación desde la articulación entre geometría sintética y geometría analítica. Memorias de la VI Reunión Pampeana de Educación Matemática. (pp 357-368). La Pampa.

ELGUERO, C y LICERA, M, (2018). Ponencia XIII CONGRESO ARGENTINO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. La Plata.

GASCÓN, J. (2002a): Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados?, Suma, 39; 13-25.

GASCÓN, J. (2007): Evolución de la controversia entre geometría sintética y geometría analítica. Un punto de vista didáctico-matemático. Disertaciones del Seminario de Matemáticas Fundamentales, 28, 1-2.

GODINO, J. D., BATANERO, C. Y FONT, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39(1-2), 127-135.

PIÑEIRO, J.L. y FLORES, P. (2018). *Reflexión sobre un problema profesional en el contexto de formación de profesores*. Educación matemática, vol. 30, núm. 1, pp. 237-251.

SANMARTÍ, N. E IZQUIERDO, M. (2001). Cambio y conservación en la enseñanza de las ciencias ante las TIC. Alambique: Didáctica de las Ciencias Experimentales, 8(29), 71- 83.

CLASIFICACIÓN EMPÍRICA DE LOS ERRORES DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE 1° ORDEN

Myriam Nuñez, Judith Montenegro Brusotti, Paula Zambianchi

Facultad de Farmacia y Bioquímica, Universidad de Buenos Aires (UBA)

Junín 954, Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina

myriam@ffyb.uba.ar

Categoría del Trabajo: Trabajo de investigación

Nivel Educativo: Superior universitario

Palabras claves: universidad, clasificación, errores, ecuaciones diferenciales ordinarias.

Resumen: Con el objetivo de identificar las dificultades que surgen en las resoluciones de los ejercicios de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de 1° orden se realizó un análisis cuantitativo, diferenciando y categorizando los tipos de errores según lo observado en los exámenes, para poder comparar los desempeños pre y post pandemia. Estos ejercicios corresponden a los segundos parciales de los primeros y segundos cuatrimestres de los años 2018, 2022 y 2023. Este tema se aborda en la asignatura Matemática que forma parte del Ciclo Común de las carreras de Farmacia y Bioquímica de la Facultad de Farmacia y Bioquímica de la Universidad de Buenos Aires.

Para el tratamiento del análisis se consideró la clasificación empírica de los errores propuesta por Inbar, Movshovtitz-Hadar y Zaslavsky (1987), particularmente, inferencias no válidas lógicamente, falta de verificación de la solución y errores técnicos.

En este sentido, se observó que los estudiantes cometieron errores referidos a inferencias no válidas lógicamente, errores algebraicos, errores de derivación y/o integración y errores en el planteo e interpretación de la solución. En función de este análisis se realizarán modificaciones en la propuesta educativa de la asignatura para que los estudiantes puedan comprender las nociones enseñadas.

Introducción

De acuerdo con lo planteado por Barbarán Sánchez y Bravo (2014), diferentes áreas de conocimiento matemático son aplicadas en múltiples ámbitos profesionales que desempeñan

sus tareas en especialidades relacionadas con la ciencia y la tecnología. En particular, las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) permiten modelizar fenómenos observables basándose en la variación y en la resolución de problemas.

Por otra parte, en lo referido a su enseñanza, el poder observar, analizar y estudiar los errores que cometen los estudiantes en la resolución resulta de gran utilidad para quienes ejercen la docencia. Debido a que este análisis brinda información sobre la construcción del conocimiento matemático, como así también revela el estado de conocimiento de los estudiantes, tal como plantean del Puerto, Minnaard y Seminara (2006). Además, permite generar modificaciones en las propuestas educativas con la finalidad de mejorar su abordaje en las prácticas docentes y así, lograr que los estudiantes comprendan las nociones que se imparten.

Considerando las ideas planteadas por Rico (1995) "...todo proceso de instrucción es potencialmente generador de errores, debidos a diferentes causas, algunos de los cuales se presentan inevitablemente." (p. 76). En este sentido, hay una fuerte interacción entre diversas variables en el entorno educativo, lo que dificulta la identificación de las causas específicas de un error determinado. Sin embargo, es posible identificar ciertos aspectos de los saberes de los estudiantes a través de los errores que cometen y, así, analizarlos y categorizarlos para identificar el origen de éstos (Barbarán Sánchez y Bravo, 2014).

Objetivos y metodología

Con el objetivo de identificar las dificultades que surgen en las resoluciones, se realizó un análisis cuantitativo de los tipos de errores, diferenciando y categorizando los mismos, según lo observado en los exámenes, para poder comparar los desempeños pre y post pandemia.

Para ello, se analizaron los ejercicios de EDO de primer orden, correspondientes a los segundos exámenes parciales de la asignatura Matemática de los estudiantes de las carreras de Farmacia y Bioquímica de la Facultad de Farmacia y Bioquímica de la Universidad de Buenos Aires, de los años 2018, 2022 y 2023 (ambos cuatrimestres: 1C y 2C).

Para las carreras mencionadas anteriormente, esta asignatura corresponde al tercer cuatrimestre del plan de estudios y se dicta en ambos cuatrimestres. Para poder cursarla, el estudiante debe tener aprobada Matemática 51 correspondiente al Ciclo Básico Común, es decir, que los estudiantes poseen conocimientos previos referidos a diferentes temas del análisis matemático. La asignatura Matemática tiene una carga horaria de 7 horas semanales, de las cuales 3 horas corresponden a clases teórico-prácticas y 4 horas al taller de resolución de problemas. El tema EDO se encuentra en la última unidad del programa de la asignatura.

Para el tratamiento del análisis se consideró la clasificación empírica de los errores propuesta por Inbar et al. (1987), particularmente, los errores referidos a inferencias no válidas lógicamente, falta de verificación de la solución y errores técnicos.

Continuando con la finalidad del estudio, se establecieron dos objetivos específicos:

- 1) Realizar un análisis sistemático cualitativo de las prácticas asociadas a los conceptos de EDO. Para llevar a cabo este objetivo se analizaron los exámenes correspondientes al segundo parcial de los años 2018 (1C: $n = 342$ y 2C: $n = 228$), 2022 (1C: $n = 437$ y 2C: $n = 334$) y 2023 (1C: $n = 460$ y 2C: $n = 348$).
- 2) Clasificar los errores de acuerdo con las categorías propuestas por el autor anteriormente citado.
- 3) Comparar los resultados obtenidos en los diferentes años analizados.

Para dar respuesta a los objetivos planteados se realizó un análisis descriptivo de las variables intervinientes. Para comparar los resultados obtenidos entre los cuatrimestres de los años 2018, 2022 y 2023 se aplicaron la Prueba de Chi – Cuadrado y Prueba de Diferencia de Proporciones. El análisis se realizó con el paquete estadístico IBM SPSS 27.

Resultados y análisis

A partir de las observaciones realizadas se obtuvieron diferencias significativas respecto de los estudiantes que realizaron los ejercicios en los primeros cuatrimestres de los años analizados. Se advierte una marcada disminución en la realización del ejercicio entre los años 2018 y 2022, mientras que, respecto a este último año y el 2023 hay un aumento de dicha proporción.

Al aplicar una Prueba de Diferencia de Proporciones se obtuvieron diferencias significativas entre los cuatrimestres de 2018 y 2022 ($p < 0,05$), entre 2022 y 2023 ($p < 0,05$) y entre 2018 y 2023 ($p < 0,05$). Con respecto a la realización o no del ejercicio y el cuatrimestre en el que cursaron, no se halló independencia ($p < 0,0001$ Prueba de Chi-Cuadrado).

Al igual que con la realización del ejercicio, tampoco se halló independencia entre los estudiantes que no cometieron errores y el cuatrimestre ($p < 0,0001$ Prueba de Chi-Cuadrado). Por otra parte, no se hallaron diferencias significativas en aquellos estudiantes que realizaron el ejercicio correctamente (en todos ellos con p -valor entre 0,05 y 0,08). Sin embargo, se observa una disminución entre 2018 y 2022, un leve aumento en el primer cuatrimestre de 2023 y un marcado aumento en el segundo cuatrimestre de 2023, como se muestra en la tabla que se encuentra a continuación.

Cuatrimestre	1C 2018 ($n = 342$)	2C 2018 ($n = 228$)	1C 2022 ($n = 437$)	2C 2022 ($n = 334$)	1C 2023 ($n = 460$)	2C 2023 ($n = 348$)

Realiza el ejercicio correctamente	40,31% (n = 127)	14,46% (n = 24)	26,56% (n = 68)	14,20% (n = 24)	28,21% (n = 101)	34,66% (n = 87)

Tabla 1

Estudiantes que no cometieron errores al realizar el ejercicio

En cuanto a los errores técnicos no se hallaron diferencias significativas entre las proporciones de los años entre 2022 y 2023 ($p = 0,7872$), pero se hallaron diferencias significativas entre los años 2018 y 2022 ($p = 0,0135$), como también entre 2018 y 2023 ($p = 0,0166$). En particular, se consideraron tanto los errores algebraicos, ya sea por despeje o derivación incorrecta, como los referidos a integración. Con respecto a los errores algebraicos, se hallaron diferencias entre las proporciones de los años 2018 y 2022 ($p = 0,0013$) y 2018 y 2023 ($p = 0,0002$) y no se hallaron diferencias entre 2022 y 2023 ($p = 0,6744$) como se muestra en las Tabla 2.

Errores	1C – 2018 (n = 90)	2C – 2018 (n = 67)	1C – 2022 (n = 129)	2C – 2022 (n = 101)	1C – 2023 (n = 189)	2C – 2023 (n = 63)
Error en despeje	80% (n = 72)	74,6% (n = 50)	47,29% (n = 61)	57,43% (n = 58)	88,36% (n = 167)	61,9% (n = 39)
Error en el desarrollo	20% (n = 18)	22,49% (n = 15)	51,16% (n = 66)	22,77% (n = 23)	10,58% (n = 20)	34,92% (n = 22)
Mal derivado	0% (n = 0)	3% (n = 2)	1,55% (n = 2)	19,8% (n = 20)	1,06% (n = 2)	3,18 % (n = 2)

Tabla 2

Errores algebraicos

Con respecto a los errores referidos a inferencias no válidas lógicamente, es decir, errores que refieren al uso incorrecto de herramientas para la resolución del ejercicio, el uso de inadecuado de estrategias, la utilización incorrecta del método a emplear para la resolución de la EDO, por ejemplo, resolver una ecuación diferencial de primer orden lineal separando variables e integrando miembro a miembro. Al aplicar una Prueba de Diferencia de Proporciones se obtuvieron diferencias significativas entre los cuatrimestres de 2018 y 2022 ($p < 0,05$), entre 2022 y 2023 ($p < 0,05$) pero no se halló evidencia suficiente que indique la existencia de diferencias significativas entre 2018 y 2023. Por otra parte, al comparar el cometer o no errores referidos a inferencias no válidas lógicamente en cada cuatrimestre, no se halló evidencia suficiente que indique la existencia de diferencias significativas en el segundo cuatrimestre de 2018 y en el primer cuatrimestre de 2022. En cuanto a cometer o no este tipo de error, y el

cuatrimestre en el que cursaron, se encontraron diferencias significativas entre los porcentajes ($p < 0,0001$ Prueba de Chi-Cuadrado).

Con respecto a los errores cometidos por falta de verificación de la solución se consideraron los relacionados con su planteo, ya sea de la solución general, la homogénea o la particular, como así también la notación y la falta de interpretación de la solución. Al aplicar una Prueba de Chi – Cuadrado no se halló independencia entre el cometer o no este tipo de error y el cuatrimestre en el que cursaron, tanto en los primeros cuatrimestres de los tres años ($p = 0,0114$) como en los segundos cuatrimestres ($p < 0,0001$). Al comparar los cuatrimestres aplicando una Prueba de Diferencia de Proporciones se obtuvieron diferencias significativas entre los segundos cuatrimestres de 2018 y 2023 ($p = 0,0094$) y entre 2022 y 2023 ($p = 0,0006$) pero no se halló evidencia suficiente que indique la existencia de diferencias significativas entre las duplas de cuatrimestres restantes.

Por otra parte, en los primeros cuatrimestres, los errores que ocurren con mayor frecuencia son los errores técnicos y los referidos a la falta de verificación de la solución, como puede observarse en el gráfico 1.

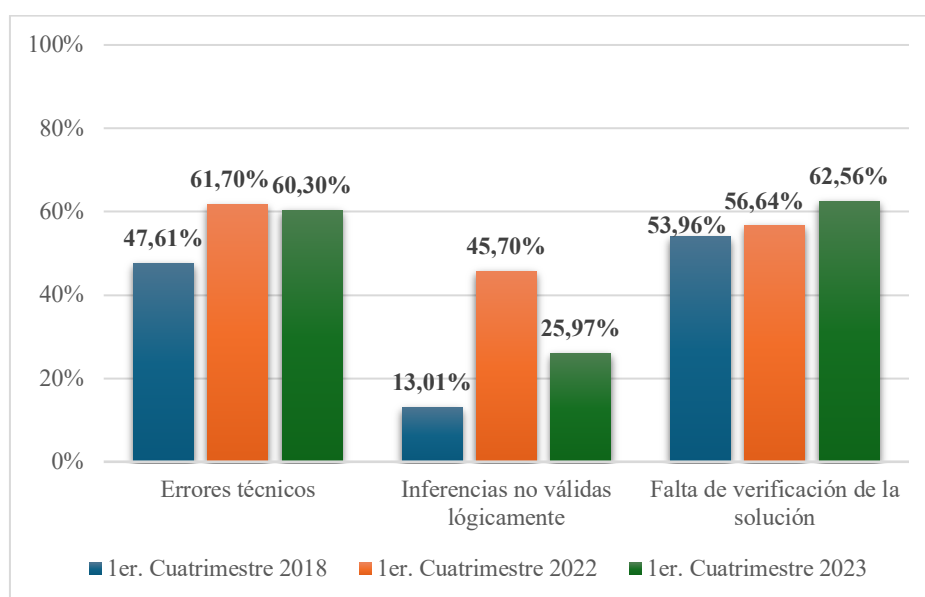


Gráfico 1

Errores cometidos por los estudiantes en los primeros cuatrimestres

Conclusiones

A partir del análisis se puede concluir que a diferencia del primer cuatrimestre del año 2022 tanto en el primer cuatrimestre del 2018 como del 2023 hubo una mayor cantidad de estudiantes que realizaron el ejercicio de ecuaciones diferenciales ordinarias del examen parcial.

Asimismo, si se considera la comparación de los primeros cuatrimestres del 2022 y 2023 no se observan diferencias significativas en lo que refiere a errores técnicos, pero hay diferencias

significativas entre éstos y el 2018. Lo que implica, que hubo un aumento en los errores técnicos luego de la pandemia, aunque haya habido una leve disminución en el año 2023.

En el segundo cuatrimestre del año 2022 alrededor del 50% de los estudiantes cometieron errores referidos a inferencias no válidas lógicamente sin embargo en 2018 y 2023 los porcentajes fueron considerablemente inferiores, análogamente para los primeros cuatrimestres.

En referencia a los errores cometidos por falta de verificación de la solución, en los segundos cuatrimestres de 2018 y 2022 los porcentajes fueron superiores a los obtenidos en 2023, sin embargo, en los primeros cuatrimestres estos errores fueron aumentando.

Por lo expuesto anteriormente, se puede concluir que este análisis nos permite, como docentes, repensar nuestras prácticas para realizar modificaciones. En particular, resulta fundamental que realicemos mayor hincapié en el repaso de temas vistos anteriormente que aún no hayan sido conceptualizados por los estudiantes. Además, debemos ser más rigurosos al momento de explicar la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias, para que los estudiantes puedan comprender e interpretar el concepto.

Bibliografía

Barbarán Sánchez, J. J., y Bravo, J. A. F. (2014). El análisis de errores en la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias. Una metodología para desarrollar la competencia matemática. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, 32(3), 173–186. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1122>

del Puerto, S. M., Minnaard, C. L., y Seminara, S. A. (2006). Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Iberoamericana De Educación*, 38(4), 1-13. <https://doi.org/10.35362/rie3842646>

Inbar, S., Movshovitz-Hadar, N., y Zaslavsky, O. (1987). An Empirical Classification Model for Errors in High School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18(1), 3. <https://doi.org/10.2307/749532>

Radatz, H. (1979). Error Analysis in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 10(3), 163. <https://doi.org/10.2307/748804>

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En P. Gómez, J. Kilpatrick, y L. Rico (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes* (pp. 69–108). Una Empresa Docente.

ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA ESPACIAL EN LA ESCUELA SECUNDARIA: ANÁLISIS DE LAS ORGANIZACIONES QUE SE PROPONEN ESTUDIAR

María de la Trinidad Quijano^{1,2} - Ana Rosa Corica^{3,4,5,6}

¹ UNCo - CRUB, ² UNRN

San Carlos de Bariloche, Argentina

³ CONICET, ⁴ NIEM, ⁵ ISISTAN, ⁶ UNCPBA

Tandil, Argentina

maria.quijano@crub.uncoma.edu.ar

Categoría del trabajo: Trabajo de investigación.

Nivel Educativo: Nivel Secundario.

Palabras claves: Geometría espacial, Escuela secundaria, Teoría Antropológica de lo Didáctico.

Resumen:

Este trabajo se centra en el estudio de la geometría espacial en la escuela secundaria. Con la Teoría Antropológica de lo Didáctico como marco referencial, se caracteriza la organización matemática estudiada en relación con la geometría espacial en los primeros cuatro años de escuelas de secundaria. Se describieron y analizaron las tareas escolares presentes en el registro de clases de estudiantes de tres instituciones de la una ciudad de la provincia de Río Negro, Argentina. Los principales resultados señalan que el estudio de la geometría espacial es limitado, mayormente vinculado con la aritmética y el álgebra. Particularmente, el hacer de las tareas se relaciona con el cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos, mediante fórmulas brindadas previamente y que se identifica con el fenómeno de monumentalización del saber.

Introducción

Los diseños curriculares de matemática para la escuela secundaria, contienen una fuerte presencia de la geometría como objeto de enseñanza. Sin embargo, numerosos investigadores ponen de manifiesto la pérdida de presencia de la geometría en el aula de matemática y el estudio con poco sentido de lo que se propone enseñar (Abrate et al., 2006; Gascón, 2003; Itzcovich, 2005; Rojas y Sierra, 2020).

Este trabajo forma parte de una investigación en la que uno de sus objetivos es caracterizar las organizaciones matemáticas en torno a la geometría que se estudian en la escuela secundaria de la provincia de Río Negro, Argentina. En esta oportunidad, con la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 2019) como marco referencial, nos proponemos reconstruir el saber en torno a la geometría espacial que se estudió en tres escuelas de dicha provincia, y conocer las decisiones matemáticas y didácticas que los docentes realizaron para dicho estudio.

Marco teórico

En este trabajo adoptamos como referencial teórico a la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 2019). En la TAD se admite que toda actividad humana regularmente realizada puede ser descrita con un modelo único, denominado praxeología, que consta de dos niveles: i) El nivel de la praxis o del saber hacer, que engloba un cierto *tipo de tareas* y cuestiones que se estudian, así como las *técnicas* para resolverlos. ii) El nivel del logos o del saber, se encuentra la *tecnología*, es decir, los discursos que describen, explican y justifican las técnicas utilizadas. Y la *teoría*, esto es, un segundo nivel de descripción, explicación, justificación (tecnología de la tecnología).

A su vez, Chevallard (1999) también propone la noción género de tareas, caracterizada por solicitar un determinativo. Esta noción hace referencia a una acción sin especificar el objeto al que se aplica. *Calcular el volumen de un paralelepípedo* es un ejemplo de tipo de tarea, mientras que *calcular*, es un género de tarea. Los tipos de tarea y género de tarea son construcciones institucionales cuya reconstrucción, en una institución determinada, es el objeto mismo de la didáctica (Chevallard, 1999).

Metodología

En este trabajo se reportan resultados de una investigación cualitativa de tipo descriptiva e interpretativa (Hernández et al., 2014). El estudio se desarrolló en tres escuelas secundarias de

la ciudad de San Carlos de Bariloche, provincia de Río Negro, Argentina: una de gestión estatal (GE), una de gestión social (GS) y una de gestión privada (GP) (Quijano, 2022).

Presentamos resultados de la reconstrucción de la OM en torno a la geometría espacial, estudiada en las instituciones involucradas. La fuente de datos para ello fueron registros de clase (carpetas) de estudiantes de primero a cuarto año de escolaridad secundaria (13-16 años de edad). El análisis centró la atención en la estructura y organización general de las carpetas, en la identificación de las nociones de geometría estudiadas, y en las tareas escolares de geometría presentes en el material recolectado. Para el análisis de cada una de las tareas se identificaron y caracterizaron sus componentes praxeológicos: se señaló el *género de tareas* al que refiere el tipo de tareas que se analizó, se identificó al *tipo de tareas* que refiere la tarea, se listaron todas las tareas de la carpeta que se identificaron con el tipo de tarea mencionado, se indicó un *ejemplar de tarea* presente en la carpeta, se describieron las *técnicas empleadas* que se identificaron en el hacer de la tarea y se indicó el *Entorno tecnológico-teórico* inmediato necesario para el hacer del tipo de tarea.

Resultados

Se contabilizaron en total, 505 tareas escolares de geometría en el material recolectado. De ese total, sólo 24 tareas refieren a nociones de geometría espacial: 4 tareas en primer año y 20 tareas en segundo año, ambos cursos pertenecientes a la escuela de GP y a cargo de una misma profesora de matemática. Las tareas identificadas en ambos años escolares se corresponden a los géneros de tarea *calcular*, *identificar*, *representar*, *verificar*.

Las tareas propuestas para el primer año (tareas número 3, 4, 5 y 6 de acuerdo al orden de aparición en esta carpeta), se agrupan en tres géneros de tarea. Las tareas 3 y 4 están comprendidas en el género *calcular* y requieren determinar el volumen de cubos, teniendo como datos la longitud de una arista o el área de una cara. Las tareas 5 y 6 están comprendidas en el género *representar* e *identificar*, respectivamente y demandan el uso de un cubo dinámico. Este material didáctico concreto (Villarroel y Sgreccia, 2012), es una construcción realizada con sorbetes que hacen de aristas de un cubo, con la particularidad de que son articuladas en sus uniones o vértices. Esta articulación permitiría un acercamiento a la representación tanto de figuras en el plano como de cuerpos en el espacio. La tarea 5 solicita representar cuerpos y figuras con el cubo dinámico. La tarea 6, además de identificar figuras y cuerpos, requiere que se brinden características que los definan. Cabe señalar que, de acuerdo a la resolución identificada en el material, no se exige que las características sean mínimas

(necesarias y suficientes), o que se formule la definición del cuerpo o figura con ellas.

De las 20 tareas inmersas en la geometría espacial en segundo año de la escuela de GP, 15 de ellas pertenecen a un libro de texto, con el que los estudiantes cuentan para realizar sus tareas. Asimismo, otras 4 tareas se presentan en un material teórico-práctico confeccionado por la docente, y proporcionado en fotocopias a los estudiantes.

Se contabilizaron 14 tareas comprendidas en el género *calcular*. De ellas, se diferencian las tareas que implican realizar operaciones entre medidas dadas y utilizar la equivalencia de unidades de medida en magnitudes de capacidad y volumen (tareas 48, 50, 51, 52 y 68); calcular áreas laterales o totales de prismas y pirámides, utilizando las fórmulas de áreas de figuras (tareas 53, 61, 62 y 63); calcular la cantidad de vértices o aristas de un cuerpo, usando la propiedad de Euler como entorno tecnológico principal (tareas 59 y 60); calcular el volumen de un cuerpo utilizando las fórmulas del cálculo de volúmenes de cuerpos (tareas 65, 66 y 67) y calcular la diagonal de un prisma (tarea 53), utilizando el teorema de Pitágoras reiteradas veces. En la Tabla 1 se presentan ejemplares tipos de tareas dentro de este género.

Tabla 1. Tareas relativas al género *calcular*.

Tarea número 52: 15 kg de té se envasan en saquitos de 2g cada uno. Si cada saquito rinde 250 cm³ (una taza) ¿Cuántos litros de té se pueden preparar con los 15 kg?	Tarea número 59: Calculá y respondé: Si un dodecaedro tiene 30 aristas, ¿cuántos vértices tiene?	Tarea número 62: Calculá la superficie lateral y total del siguiente cuerpo 	Tarea número 66: Calculá el volumen del cuerpo 

En la Tabla 1 se puede observar que en el enunciado de la tarea 62 se solicita *calcular la superficie lateral y total de cada cuerpo* por lo que se evidencia confusión entre la noción de superficie y la de área. Se concluye que en el material analizado se evidencia un uso indistinto de los conceptos de área y superficie.

Dos tareas, las número 55 y 58, están inmersas en el género *verificar* y son similares en su hacer. En ambas se requiere la verificación de la propiedad de Euler que relaciona número de aristas, caras y vértices de un poliedro. En las mismas se requiere contar vértices, caras, aristas de cuerpos (dada su representación gráfica) y verificar que se cumple dicha propiedad.

Las tareas número 54, 56 y 57 se engloban en el género *identificar*. La primera de ellas requiere reconocer cuerpos dadas representaciones gráficas de los mismos. La particularidad es que cada uno de los cuerpos se compone de dos cuerpos, los que comparten una cara. La

tarea 57, también requiere reconocer cuerpos, pero se brinda como dato la representación del desarrollo plano de cada uno. Es decir, se necesita asociar dicho desarrollo del cuerpo con las caras que lo conforman. La tarea 56, en cambio, requiere identificar figuras planas, que son las caras de diferentes cuerpos dados a través de su representación gráfica.

La tarea número 64 es el único ejemplar que se encuentra bajo el género *representar*. La representación solicitada refiere a prismas de un determinado volumen y se utiliza una hoja isométrica como recurso, brindándose como dato la representación gráfica de la unidad de medida de volumen que debe considerarse para la construcción, que es un cubo de 1 cm^3 . Para poder realizar esta tarea, el estudiante debe poder comprender la perspectiva necesaria para realizar tal representación, además de atender a la definición de volumen, a la unidad de medida de volumen y al volumen de un prisma.

Conclusiones

Se analizaron carpetas de estudiantes de primero a cuarto año de la escuela secundaria en tres instituciones educativas de la provincia de Río Negro, Argentina. Sólo en una de ellas se hallaron tareas vinculadas con la geometría espacial, correspondientes a primero y segundo año de la escuela de GP, a cargo de una misma profesora. La mayoría de estas tareas se encuentran en segundo año y están comprendidas en el género calcular. Esto enfatiza la relación entre la geometría espacial con un tratamiento aritmético (como algoritmos de cálculo) y, en menor medida algebraico, de las fórmulas empleadas para el cálculo de áreas y de volúmenes de sólidos, ya que, en la mayoría de los casos, basta con sustituir sus elementos por los valores concretos que proporciona el enunciado para hallar el valor numérico de cierta magnitud. La mayoría de las tareas propuestas invitan a replicar la misma técnica en la que hay que utilizar fórmulas ya dadas de antemano, en correspondencia con el fenómeno monumentalización del saber (Chevallard, 2013). Las nociones geométricas que podrían estudiarse al resolver tareas de geometría espacial, quedan casi exclusivamente restringidas, en general, al cálculo de áreas de figuras planas.

En relación con el uso de materiales didácticos concretos, se destaca el *cubo dinámico* propuesto para dos tareas en primer año. No se vislumbra el empleo de algún software de geometría dinámica en las tareas propuestas.

El estudio de la geometría espacial que se propone en los cursos involucrados en la investigación es limitado. Los problemas espaciales no están presentes en el material

analizado, las tareas propuestas por la profesora no constituyen una alternativa para el surgimiento de los conocimientos geométricos propuestos a enseñar con una clara razón de ser.

Referencias

Abrate, R., Delgado, G. & Pochulu, M. (2006). Caracterización de las actividades de Geometría que proponen los textos de Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*, 39(1), 1–9.

Chevallard, Y. (1999) El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (2), 221–266.

Chevallard, Y. (2013). Enseñar matemáticas en la sociedad de mañana: alegato a favor de un contraparádigma emergente. *REDIMAT*, 2(2), 161–182.

Chevallard, Y. (2019). Introducing the anthropological theory of the didactic: An attempt at a principled approach. *Hiroshima journal of mathematics education*, 12, 71-114.

Gascón, J. (2003). Efectos del autismo temático sobre el estudio de la Geometría en Secundaria I: desaparición escolar de la razón de ser de la geometría. *Suma*, 44, 25–38.

Hernández, R.; Fernández, C. & Baptista, M. (2014). *Metodología de la investigación*. McGraw Hill.

Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría: de las construcciones a las demostraciones* (Vol. 3). Buenos Aires: Libros del zorzal.

Quijano, M. (2022). *Enseñanza de la geometría: análisis de las praxeologías que se estudian en la escuela secundaria*. [Tesis doctoral, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. <https://www.ridaa.unicen.edu.ar/items/df889302-b787-48d9-8759-2da62b0e6916>

Rojas, C., & Sierra, T. (2020). Los problemas espaciales: una propuesta alternativa para enseñar geometría en la Educación Secundaria Obligatoria. *Educação Matemática Pesquisa*, 22(4). <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i4p593-602>

Villarroel, S., & Sgreccia, N. (2012). Enseñanza de la geometría en secundaria. Caracterización de materiales didácticos concretos y habilidades geométricas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 29, 59–84.

DINÁMICA EN LAS IDEAS DE INFINITO DE DOS ESTUDIANTES DE BIOLOGÍA

Andrea Rivera^{(1),(2)} - Jordi Alsina^{(1),(3)} - Virginia Montoro^{(1),(2)}

⁽¹⁾ UNCo (Bariloche)

⁽²⁾ IPEHCS (UNCo – CONICET)

⁽³⁾ IB-UNCuyo

andre.b.rivera@gmail.com

jordi.alsina@ib.edu.ar

Categoría del Trabajo: Trabajo de investigación

Nivel Educativo: universitario

Palabras claves: infinito – número real – concepciones

Resumen. Presentamos el análisis de una entrevista a dos estudiantes de Biología realizada luego de responder un cuestionario, con el objetivo de estudiar la dinámica de las concepciones sobre el infinito matemático en relación con el número real al reflexionar. Profundizamos en sus comprensiones sobre la representación decimal infinito-periódica de un número racional, la comparación de números con distintas notaciones y la comparación de conjuntos numéricos infinitos. Los resultados exhiben un vaivén de concepciones que conviven activamente durante la reflexión, evidenciando una comprensión lábil del infinito, que se les presenta de forma contradictoria y cognitivamente compleja. Destacamos que el contexto de la tarea influye en las visiones que ponen en juego al resolverlas, y que la noción potencial de límite actúa como un obstáculo para aceptar la equivalencia entre números expresados en dos representaciones decimales distintas. Además, notamos en los participantes una visión de la matemática como una herramienta, consistente con su formación donde la matemática tiene un carácter utilitario.

Introducción

La noción de infinito, clave para la comprensión de los números reales, es una construcción cognitiva compleja dada su naturaleza dual. Es problemático pasar de lo finito a lo infinito y también resulta un desafío la diferencia conceptual entre el infinito como adjetivo y cardinal, o entre el infinito potencial y actual¹. Esta última dualidad ha sido identificada como un obstáculo epistemológico en el aprendizaje de la matemática, que suele ser resistente a la formación (Artigue, 1995; Moreno-Armella y Waldegg, 1991; Sierpinska, 1985).

Destacamos la brecha conceptual que existe entre pensar/operar con colecciones potencialmente infinitas y con conjuntos actualmente infinitos: concebir infinitos elementos *presentes simultáneamente* es contraintuitivo y requiere poner en juego procesos de un gran nivel de abstracción. El infinito actual precisa una comprensión profunda que debe ser desarrollada explícitamente (Montoro, 2025) y es necesario trabajar Límite y Convergencia de forma actual

¹ El infinito actual hace referencia a la existencia simultánea de una cantidad infinita de elementos en un conjunto (coexistentes, actualmente existentes), mientras que el infinito potencial, hace referencia a un proceso sin fin.

para poder estructurar los procesos iterativos infinitos como terminados (Villabona et al., 2016). Diversos estudios han evidenciado que les estudiantes suelen tener una comprensión lábil del infinito y recurren a ideas contradictorias que generan conflictos para conceptualizarlo (Artigue, 1995; Sierpinska, 1985, otros). Tenemos indicios de que distintas concepciones pueden convivir en un estudiante y cambiar activamente durante un proceso de reflexión (Rivera et al., 2022). El objetivo general de nuestra investigación es estudiar la dinámica de las comprensiones de los estudiantes sobre el infinito matemático con relación al número real, a través de entrevistas semiestructuradas tomadas luego de responder un cuestionario. Éste fue aplicado, en un estudio previo, a 307 estudiantes con distinto grado de formación matemática en la secundaria y la universidad (Montoro, 2023). Sintetizamos las clases de respuestas encontradas en términos de comprensiones sobre el infinito en el contexto del número real: *Ajenidad*, no se apropia del problema. *Finitista*, da justificaciones propias de interacciones con colecciones finitas. *Infinito como indefinido*, refiere a la imposibilidad de operar con el infinito. *Infinitista en un sentido común*, ya sea pensando el infinito como una *única cantidad infinita* o concibiéndolo como un proceso sin fin (*infinito potencial*). *Infinitista en un sentido matemático (cardinal o actual)*. Presentamos el análisis de una entrevista realizada con 2 alumnos de la Lic. en Biología. Buscamos profundizar en sus concepciones sobre el infinito, visualizar su dinámica y poner a prueba la solidez de éstas, es decir, observar cuán arraigadas o lábiles se presentan en la reflexión.

Metodología

Participantes: dos estudiantes (Tomás y Maia) del último año de la Licenciatura en Biología.

Relevamiento de la información: se utilizaron dos instrumentos de manera no simultánea, un cuestionario escrito y una entrevista semiestructurada. El cuestionario es el mencionado en la introducción (Montoro, 2023). Describimos las tres tareas analizadas en este trabajo:

Tarea 1 (T1): se solicita que respondan en cuál de los números ($0, \hat{3}$ y $0, \widehat{32}$) hay más cantidad de cifras 3. Se dan 5 opciones de respuesta: hay más cantidad de elementos en una colección que en la otra, hay igual cantidad en ambas, no se pueden comparar y la opción no sé.

Tarea 2 (T2): requiere que comparen conjuntos infinitos de números. Se eligieron: conjuntos numerables y no numerables; discretos y densos; comparables por inclusión o no (disjuntos; con intersección finita y complementarios). En cada pareja de conjuntos se les dan las opciones: el primero/segundo es más abundante, son igual de abundantes, no se puede comparar y no sé.

Tarea 3 (T3): demanda que comparen los números $0, \hat{9}$ y 1. Se les da 6 opciones de respuesta: $0, \hat{9}$ es menor/mayor/igual que 1, no se pueden comparar, otra posibilidad y no sé.

Las tres tareas solicitan que se justifique la opción seleccionada como respuesta.

Procedimiento de Análisis: se clasificaron las respuestas escritas en base a la categorización

antes mencionada. Se determinaron los episodios relevantes en cuanto a la discusión de las tres tareas y se realizó un análisis cualitativo de cada episodio, identificando las concepciones emergentes de cada estudiante respecto del infinito. Luego, se discutió cada fragmento para hallar indicadores de la dinámica de las concepciones, es decir, de su cambio durante la reflexión.

Resultados

Distintas concepciones de infinito conviven durante el proceso de reflexión. Tomás muestra una noción de **infinito como indefinido** al comparar colecciones infinitas: en T1 escribe que las cantidades de cifras 3 no se pueden comparar porque *"ambas tienen infinitas cifras"*. Durante la entrevista, reitera explicaciones donde subyace la imposibilidad de operar con el infinito, pero al detallar sus ideas muestra otras concepciones en paralelo. En T1, expresa una concepción de **único infinito**: *"Si uno multiplica por dos el infinito, sigue siendo infinito, lo que estoy representando es exactamente el mismo infinito"*. Luego, en la comparación de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ (T2), explica *"no hay una relación que, por cada cantidad de números racionales, hay un irracional"* mostrando un razonamiento **finitista** al apelar a lo que ocurriría en un intervalo finito de números, donde la frecuencia actúa como una forma válida de comparar cantidades.

En el desarrollo de las tareas que involucran un número representado de forma decimal periódica, Tomás manifiesta una concepción de **infinito potencial**, apoyado en una noción de límite como proceso sin fin: *"...teóricamente $0, \hat{9}$ sería el límite de 1^2 , porque estaríamos acercándonos lo más que se puede sin llegar a ese número"*. Al ser consultado sobre qué número hay entre 1, $\hat{9}$ y 2, plantea *"creo que por eso se considera que son lo mismo. Porque no podés encontrar números en el medio, no podemos definir números consecutivos porque siempre hay infinitos números entre esos números. Y acá no, no habría"*, mostrando un acercamiento a una concepción de **infinito actual**, apoyada en sus conocimientos sobre la densidad de $\mathbb{R}$.

En cuanto a Maia, al comparar colecciones infinitas manifiesta una concepción **finitista**, expresando que hay mayor cantidad de 3 en $0, \hat{3}$ porque tiene *"el doble de cantidad de 3"*. Luego expresa la imposibilidad de asignar un cardinal a colecciones infinitas: *"no puedo decir cuántos son porque ambos son infinitos"* (**indefinido**), y compara conjuntos por inclusión cuando es posible. En esos casos *"se le hizo más sencillo"* imaginar los conjuntos como bolsas *"una adentro de la otra"*, de lo que subyace un pensamiento **finitista** asociado a 'el todo es mayor que la parte'. Al responder a la comparación entre $0, \hat{9}$ y 1, Maia usa la 'prueba' que consiste en asignar $x=0, \hat{9}$ y manipular la expresión $10x-x$ para arribar a $0, \hat{9} = 1$. Este proceso aritmético, donde se restan y multiplican números sin considerar que sus cifras decimales son infinitas, se condice con una visión finitista. No obstante, durante la discusión de la tarea la conclusión de estos razonamientos se plantea de forma dubitativa, y al poner en diálogo las ideas de Tomás, Maia adhiere a pensar

² Observamos con atención esta forma de enunciar donde la expresión "el límite de" conlleva una inversión en su uso de la preposición 'de': en lugar de referirse a la sucesión convergente, se aplica al número real límite de la misma.

a $0,9$ como "el límite de 1" y menor a él. Se exhibe una noción de infinito potencial sostenida en su concepción de límite como un proceso, donde $0,9$ se aproxima a 1 "pero jamás lo alcanza".

Noción potencial de límite y su arraigo mediado por la enseñanza/aprendizaje. En la entrevista, los participantes manifiestan indecisión acerca de si $0,9 = 1$. Tomás explica su duda en términos de límite, interpretando la notación decimal infinita como la representación de un límite mediado por una concepción **potencial**, caracterizada por ideas de "acercarse lo más que se puede, sin llegar". Maia adhiere a lo explicado por Tomás, reforzando que uno puede acercarse "tanto como uno quiera a determinado lugar y sin tocarlo".

Este conflicto se mantiene persistente a lo largo de los intercambios donde es parte de la discusión el concebir números reales con infinitos 9s en su expresión decimal. Entre sus argumentos, Tomás y Maia usan expresiones potenciales para referir al límite y aluden a que así se lo enseñaron: "...el número puede tender a 1, no es lo mismo que sea igual (...) Nos enseñaron que cuando un número tiende con la flechita, son cosas diferentes". Así, emparejan la representación decimal $0,9$ con el "límite de 1" que debe ser distinto de 1 *per se*.

El vaivén de las concepciones predominantes. En el caso de Tomás, su concepción de **infinito como indefinido** se presenta como persistente al comparar colecciones infinitas. Sin embargo, exhibe otras visiones: en T1, argumentos de **único infinito** detrás de la identificación "dos por infinito, infinito escribimos"; mientras que en T2 al comparar $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ muestra ideas **finitistas**, pues indica que la frecuencia es una forma válida de comparar cantidades. Finaliza estos razonamientos aclarando "pero también son infinitos", volviendo a sus ideas iniciales donde el resultado de la comparación es **indefinido**.

Respecto de la comparación entre $0,9$ y 1, Tomás sostiene sus intervenciones desde una concepción de **infinito potencial** aplicada a su noción de límite, afirmando que deben ser distintos porque uno "tiende a 1" mientras que el otro es igual. Sin embargo, de forma puntual cuando debe pensar qué número 'hay entre' $0,9$ y 1, afirma que "no podés encontrar números en el medio" y que esto quizás es la razón por la que "de repente decimos que son iguales", pareciendo percibir los infinitos 9s como una totalidad sin que esto implique poder realizar la actualización $0,9 = 1$. Este movimiento de sus ideas vuelve al punto de partida unos minutos después, al enunciar el conflicto y atribuir esta contradicción a que "no se considera el concepto de límite", bajo ideas **potenciales** vinculadas a su apropiación del Límite.

En cuanto a Maia, muestra como persistentes razonamientos **finitistas** (por elección) basados muchas veces en una visión utilitaria de la matemática; es así que para responder a la comparación entre $0,9$ y 1, utiliza la 'prueba' mencionada. Adhiere a las ideas de Tomás de **infinito potencial** que subyacen a la noción de límite como proceso, donde $0,9$ aproxima a 1.

Maia resuelve la tensión entre los resultados de ambos razonamientos retornando a una perspectiva **finitista**, eligiendo argumentos vinculados a la practicidad: “*contrastan las dos ideas, tenés la demostración con la fracción y decís 'método más sencillo y me dá que es igual'*”.

El contexto de la tarea influye en las concepciones que se manifiestan. Las concepciones a las que recurren en T3 son distintas a las que usaron en T1 y T2. En el caso del 0, $\hat{9}$, recurrieron a la idea de límite y manifestaron concepciones de **infinito potencial**, lo que podría estar relacionado con plantear las tareas desde un contexto dinámico. En las otras dos tareas, donde el contexto es estático³, Tomás responde desde una concepción de **infinito como indefinido** y ella **finitista**, como mostramos en apartados anteriores.

La concepción finitista, una elección vinculada a una visión utilitaria de la matemática. Les participantes manifiestan dudas acerca de la Matemática avanzada teórica, y ubican la confianza del Saber (matemático) fuera de sí, en los profesores de la Universidad o en ‘la ciencia’ misma. A su vez, señalan usarla “*como una herramienta*” y refieren a su ‘practicidad’: “*a fines prácticos va a ser lo mismo a lo que yo puedo hacer con el lápiz*”. Además, presentan cuestionamientos relacionados con la imposibilidad de llevar a la realidad situaciones expresadas en un contexto matemático (como un microscopio de aumento infinito). Desde esta perspectiva, Maia parece mostrar una concepción finitista “por elección”, volcando sus razonamientos sistemáticamente a un ámbito finito propio de los estudiantes de Biología. También, aún considerando que el orden puede ser potencialmente denso, ambas ven posible encontrar un número anterior a uno dado, eligiendo operar en un orden discreto.

Discusión y conclusiones

A lo largo de las producciones del cuestionario y durante la entrevista, ambas participantes manifiestan distintas concepciones de infinito en sus intervenciones. En algunas ocasiones, contradicen sus ideas explícitamente sacando a la luz la gran complejidad cognitiva de esta noción. Observamos que, en el transcurso de la reflexión muchas veces se produce un vaivén de las concepciones, es decir, ‘vuelven’ a sus ideas iniciales o a aquellas que muestran predominancia. Pensamos que retoman estas ideas porque son comprensiones construidas que les han sido útiles en sus intercambios con el mundo y en su formación, por lo que están en una estabilidad aún cuando les enfrentan a contradicciones. Este tipo de pensamiento, cuya coherencia sólo es local, presenta características de resistencia a los cambios y a generar articulaciones con nuevos conocimientos (Waldegg, 1996).

Notamos la influencia del contexto de las tareas en las visiones puestas en juego al resolverlas, esto es, la construcción cognitiva del infinito está condicionada por el contexto en el cual se presenta. Así, en uno dinámico como el de T3, donde los puntos suspensivos parecen inducir a

³ Contexto dinámico: contiene un proceso explícito. Estático: las colecciones a comparar se presentan como un objeto ya conceptualizado.

un proceso, se propician concepciones de infinito potencial. Estas ideas no aparecen en T1 y T2, donde el contexto es estático y las colecciones a comparar se presentan explícitamente infinitas. Las ideas potenciales de los participantes asociadas a su aprendizaje del límite parecen constituir un obstáculo para la comprensión del orden y la densidad de los números reales. Al comparar $0, \hat{9}$ y 1 , aún cuando plantean elementos para afirmar que son iguales, consideran que $0, \hat{9} < 1$ por razonamientos mediados por una noción potencial del límite, donde éste nunca se alcanza⁴. El obstáculo prevalece aún en momentos donde Tomás parece percibir los infinitos 9s en una totalidad, pero sin llegar a la completez de los procesos iterativos que requeriría de una concepción actual del límite y la convergencia (Villabona et al., 2016).

Las concepciones de los participantes se ven permeadas por su formación en una Matemática avanzada aplicada manifestando en ocasiones una visión de la Matemática como una herramienta. Esta forma utilitaria de vincularse con la disciplina puede conllevar a que en su vida diaria sea suficiente una visión finitista y discreta de los números, complementada con ideas de infinito potencial en aplicaciones de su campo. La profundidad en este conocimiento matemático juega un papel importante aún en las nociones más básicas como lo son la diferenciación de racionales e irracionales, o el orden y la densidad de los números reales.

Los participantes exhiben un vaivén de concepciones donde manifiestan comprensiones más arraigadas o predominantes, en general, aquellas relacionadas con su aprendizaje y su profesión. Destacamos la influencia de varios factores en esta dinámica: el contexto de las tareas, la noción potencial de límite y la formación en una matemática avanzada aplicada.

Bibliografía

- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios de cálculo: Problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. y otros (Eds.), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (97-140). Grupo Editorial Iberoamérica.
- Montoro, V. (2023) *Comprensión del número real en estudiantes de secundaria y universidad* [Tesis del Doctorado en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, UNCo].
- Montoro, V. (2025). Pensar y repensar los números reales. Interacción entre lo cognitivo y lo epistemológico. *Revista de Educación Matemática*, 40(2), 39–64.
- Moreno-Armella, L. y Waldegg, G. (1991). The Conceptual Evolution of Actual Mathematical Infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 211-231.
- Rivera, A., Bianchi M. J. y Montoro, V. (2021). Dinámica en las concepciones del infinito matemático en contexto del número real. *Noticiero de la UMA* 56(2). 38-41.
- Sierpinska, A. (1985). Obstacles epistemologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 6(1), 5-67
- Villabona, D. y Roa-Fuentes (2016). Procesos iterativos infinitos y objetos trascendentes: un modelo de construcción del infinito matemático desde la teoría APOE. *Educación Matemática*, 28(2), 119-150
- Waldegg, G. (1996). Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 1(1), 107-122

⁴ Como expresa Tall (2009, Montoro, 2023) "el decimal infinito $0,9\dots$ que está destinado a señalar el límite de la sucesión $0,9; 0,99; 0,999; \dots$ que es 1 , en la práctica a menudo se imagina como un proceso hacia el límite que nunca alcanza del todo 1 ".

“FOTOGEBRA”: UN RECORRIDO DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN EN LA ESCUELA SECUNDARIA PARA EL ESTUDIO DE LA MATEMÁTICA

Karina Rizzo y Viviana Costa

Universidad Tecnológica Nacional FRA, Universidad Siglo 21

IMApEC, Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, UNLP

karinarizzo71@gmail.com

Categoría del Trabajo: Reporte de Investigación

Nivel Educativo: Secundaria

Palabras claves: enseñanza de la matemática – funciones – GeoGebra - didáctica.

Resumen: Este trabajo se enmarca en una tesis doctoral en Enseñanza de las Ciencias, situada en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). Su propósito es analizar cómo estudiantes de 5º año de secundaria en Argentina desarrollan un proceso de estudio a través de un Recorrido de Estudio e Investigación (REI), instalando en el aula el Paradigma de la Investigación y del Cuestionamiento del Mundo (PICM), que promueve actitudes investigativas. El REI se origina en *FotoGebra*, un concurso que invita a utilizar fotografías como punto de partida para formular y resolver problemas reales con GeoGebra y funciones matemáticas. La pregunta generatriz que orienta el proceso es: ¿cómo estudiar una situación problemática real utilizando una fotografía, GeoGebra y funciones matemáticas? La investigación, de carácter descriptivo y exploratorio, con enfoque cualitativo, evidencia la construcción de organizaciones matemáticas, la emergencia de actitudes investigativas, el valor de las dialécticas didácticas y el papel central de GeoGebra como medio de estudio. Asimismo, la metodología adoptada muestra que estos dispositivos didácticos favorecen una comprensión funcional de los objetos matemáticos, al tiempo que activan dialécticas y actitudes propias del PICM, integrando de manera natural la modelización matemática en el proceso de aprendizaje.

Introducción

En la enseñanza tradicional de la noción de función en el nivel secundario predomina un enfoque algorítmico y descontextualizado, donde las gráficas se utilizan como un fin en sí mismas, reduciendo el papel del problema como motor del conocimiento (Rodríguez Fernández

et al., 1995; Borsani et al., 2013; Ferragina y Lupinacci, 2015). Frente a ello, diversos autores han señalado el potencial de GeoGebra como recurso para resignificar el estudio de las funciones, al integrar dinámicamente geometría, álgebra y cálculo, y favorecer la exploración de objetos matemáticos en múltiples registros (Carrillo, 2012; Hohenwarter, 2014; Borsani et al., 2013; Ferragina y Lupinacci, 2015). En esta línea, varias investigaciones destacan el uso de la fotografía en combinación con GeoGebra como estrategia para motivar a los estudiantes y vincular las matemáticas con el entorno, el arte o la arquitectura, otorgando autenticidad al proceso de estudio y fomentando la creatividad (Sharp, Garofalo y Thompson, 2004; Muñoz Casado, 2018; Rizzo, 2016; Rizzo et al., 2019; Furner y Yahya, 2020). Incorporar imágenes permite modelizar situaciones reales, explorar relaciones y generar discusiones que potencian la comprensión conceptual y la aplicación práctica de las matemáticas (Rizzo et al., 2019). Considerando estas problemáticas y aportes, se propone introducir la Pedagogía de la Investigación y del Cuestionamiento del Mundo (PICM) mediante la implementación, en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), de un Recorrido de Estudio e Investigación (REI) en un curso de 5° año de la escuela secundaria argentina, articulando los contenidos curriculares sobre funciones (Diseño Curricular, 2010). El REI, denominado FotoGebra (inspirado en el concurso www.fotogebra.org), parte de la pregunta generatriz: *¿Cómo estudiar una situación problemática real utilizando una fotografía, GeoGebra y las funciones matemáticas?* El propósito es promover un proceso de estudio que despierte en los estudiantes actitudes propias de la PICM, construyan la matemática de un modo funcional resolviendo problemas y situaciones reales por ellos mismos planteadas.

Objetivos y preguntas de investigación

El objetivo es contribuir a la educación matemática introduciendo en la escuela secundaria argentina la PICM, en el marco de la TAD. En particular, se busca analizar la implementación del dispositivo didáctico denominado FotoGebra, diseñado como un REI (Rizzo et al., 2023a), con el fin de promover actitudes investigativas en los estudiantes y favorecer la construcción de Organizaciones Matemáticas (OM) vinculadas al concepto de función. El estudio se centra en la identificación de las actitudes propias de la PICM, las OM que los estudiantes construyen y utilizan, las dialécticas que emergen durante la experiencia y el rol que desempeña GeoGebra como *media* en el proceso de modelización matemática. De manera general, la investigación se orienta a responder, entre otras, la pregunta: ¿Cómo contribuye la implementación del REI “FotoGebra” al desarrollo de actitudes investigativas propias de la PICM y a la construcción de organizaciones matemáticas vinculadas a las funciones en estudiantes de secundaria?

Marco teórico

El referencial de esta investigación es la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 2017), que plantea la necesidad de superar una enseñanza tradicional centrada en la transmisión de saberes fragmentados. En su lugar, propone la Pedagogía de la Investigación y el Cuestionamiento del Mundo (PICM), donde los estudiantes trabajan a partir de preguntas auténticas que impulsan la construcción de saberes matemáticos con sentido. Un concepto clave de la TAD es la praxeología, que describe la actividad matemática a través de la praxis (el saber hacer) y el logos (el saber teórico). Para el diseño didáctico se recurre al Modelo Praxeológico de Referencia (MPR) (Rizzo y Costa, 2023b), que orienta la identificación de las obras matemáticas y extra-matemáticas implicadas en la investigación. El dispositivo central de la TAD en este trabajo son los Recorridos de Estudio e Investigación (REI), concebidos para situar a los estudiantes en una dinámica de problematización y búsqueda de respuestas colectivas. Los REI se sostienen en una serie de dialécticas (del estudio y la investigación, individual y colectivo, análisis y síntesis praxeológica, tema y fuera de tema, paracaidista y trufas, cajas negras y blancas, entre otras), que organizan la interacción entre el saber, los estudiantes y el docente. Asimismo, la TAD subraya la importancia de las actitudes de la PICM (problematización, procognitiva, exotérica, enciclopedista ordinaria), entendidas como gestos didácticos necesarios para fomentar en los alumnos una postura crítica, autónoma y democrática frente al conocimiento (Otero et al., 2013).

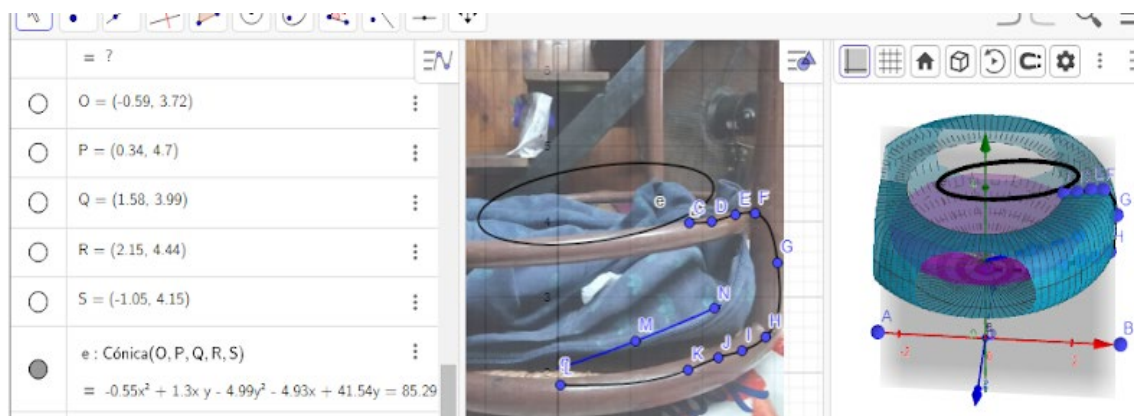
Metodología

La investigación es cualitativa, de carácter exploratorio, descriptivo e interpretativo (Hernández et al., 2014), y utiliza la observación participante, dado que el docente es también investigador (Marradi et al., 2007). Consta de dos etapas: en la primera se construye un MPR (Rizzo y Costa, 2023b), se analizan las posibles Organizaciones Matemáticas (OM) sobre funciones y las actitudes de la PICM para diseñar el dispositivo; en la segunda se implementa el REI “FotoGebra” en un curso de 5º año de secundaria en la Provincia de Buenos Aires (aprox. 40 estudiantes), donde los alumnos, en grupos, seleccionan una fotografía y formulan una situación problemática real para modelizar en GeoGebra mediante funciones. El análisis de datos incluye las preguntas derivadas, las OM construidas, las actitudes de la PICM y el rol del *media* GeoGebra. Para ello, se recurrió a las categorías analíticas de la TAD, a fin de trascender la descripción experiencial. Las praxeologías permitieron identificar las tareas, técnicas y tecnologías movilizadas en el uso de GeoGebra; las dialécticas didácticas orientaron la interpretación de las interacciones entre el estudio y la investigación, el individuo y el colectivo, y el uso del medio tecnológico; las actitudes de la PICM posibilitaron caracterizar los gestos de

problematización, exploración y reflexión de los estudiantes; y el concepto de *media* permitió analizar el rol de GeoGebra como mediador en la construcción de los objetos matemáticos. El Modelo Praxeológico de Referencia (MPR) se empleó para contrastar las praxeologías esperadas con las construidas efectivamente durante la experiencia.

Algunos resultados

A modo de ejemplo, se presenta el trabajo de un grupo de alumnos que participó del REI. El grupo eligió para la situación problemática el diseño de “cuchas para mascotas”, tomando como modelo una silla con una manta (Ver figura). Para modelizar la imagen en GeoGebra insertan la fotografía, ubican puntos de referencia y los unen para trabajar en 3D. Con la herramienta Spline y la superficie de revolución logran la forma de la “cucha”, ajustando parámetros para abrir la parte superior y cerrar la base. Finalmente, incorporan una manta representada mediante una función exponencial acotada y transformada en superficie de revolución. En este proceso los estudiantes ponen en juego distintas praxeologías: funciones exponenciales, acotamiento de funciones, sólidos de revolución, representación de curvas suaves, cálculo de áreas de superficies de revolución, inserción y posicionamiento de imágenes y estudio de curvas cónicas, usando el *media* GeoGebra.



Además, los estudiantes mostraron curiosidad, predisposición a explorar nuevos problemas, apertura y creatividad. Trabajaron de forma colaborativa, documentaron sus intentos, decisiones y dificultades. El proceso permitió activar dialécticas propias de un REI, en el que los estudiantes asumieron actitudes coherentes con la PICM. La actividad se desarrolló como una indagación exploratoria y sostenida, en la cual el *media* GeoGebra resultó fundamental para experimentar, visualizar y construir un modelo tridimensional, posibilitando la formulación de preguntas, la búsqueda de diferentes estrategias de modelización y la reflexión sobre los resultados alcanzados.

Conclusiones

El REI se constituyó en un dispositivo didáctico que favoreció la construcción de OM a partir de situaciones contextualizadas. El uso combinado de GeoGebra y fotografías del entorno, actuó como un mediador que permitió a los estudiantes explorar, formular y validar respuestas a problemas abiertos, articulando praxeologías diversas y movilizandorecursos tecnológicos y teóricos. En el análisis del REI, se observó la emergencia de diferentes dialécticas, destacando especialmente la Dialéctica del Individuo-Colectivo, la de Análisis-Síntesis, Cajas Negras y Claras y Media-Medio, evidenciando que los estudiantes trabajaron colaborativamente, alternaron entre el uso instrumental y la comprensión conceptual, y utilizaron GeoGebra como un *media* activo para construir y clarificar conocimiento. El análisis también confirma una relación clara entre actitudes y dialécticas: las actitudes de investigación activa, en particular Problematicación y Procognitiva, potenciaron el desarrollo de dialécticas complejas como la de Estudio e Investigación, Análisis-Síntesis y Conjetura- Prueba. En términos generales, el REI favoreció el desarrollo de las actitudes Herbartiana y Procognitiva, mientras que la profundización teórica vinculada a actitudes de cuestionamiento crítico sigue siendo un desafío. Considerando el trabajo de la clase en su conjunto, el REI propició una transformación en la dinámica habitual: los estudiantes pasaron de desempeñar un rol principalmente receptivo a asumir una postura activa de investigación, configurando una comunidad de estudio donde las praxeologías matemáticas fueron producidas, discutidas y validadas colectivamente. En síntesis, el REI implementado logró articular teoría, tecnología y práctica, mostrando que la integración de recursos digitales enmarcada en una propuesta de un REI potencia la construcción de OM, activa diversas dialécticas y favorece actitudes propias de la PICM.

Referencias bibliográficas

- Borsani, V., Cedrón, M., Cicala, R., Di Rico, E., Duarte, B., Sessa, C., & Medio, N. (2013). La integración de programas de geometría dinámica para el estudio de la variación de magnitudes geométricas: nuevos asuntos para la didáctica. En *Actas del VII CIBEM* (pp. 6901–6910). Montevideo: FISEM.
- Carrillo, A. (2012). El dinamismo de GeoGebra. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 29(1), 9–22.
- Chevallard, Y. (2017). ¿Por qué enseñar matemáticas en secundaria? Una pregunta vital para los tiempos que se avecinan. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 20(1), 159–169.

- Diseño Curricular para la Educación Secundaria: Marco general para el ciclo superior. (2010). Ministerio de Cultura y Educación de la Nación y Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires.
- Ferragina, R. A., & Lupinacci, L. J. (2015). La noción de función mediada por entornos dinámicos: El caso del punto dinámico. En XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM). Chiapas, México.
- Furner, J. M., & Yahya, N. (2020). Using GeoGebra, photography, and vocabulary to teach mathematics while aiding our ESOL populations. *Transformations*, 6(1), Article 3.
- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación*. México D.F.: McGraw-Hill.
- Hohenwarter, M. (2014). Multiple representations and GeoGebra-based learning environments. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 39, 11–18.
- Marradi, A., Archenti, N., & Piovani, J. I. (2010). *Metodología de las ciencias sociales*. Buenos Aires: Cengage Learning Argentina.
- Muñoz Casado, J. L. (2018). Creogeбра. A vista de GeoGebra. *Suma*, 88, 73–80.
- Otero, M. R., Fanaro, M. D., Corica, A., Llanos, V. C., Sureda, P., & Parra, V. (2013). *La Teoría Antropológica de lo Didáctico en el aula de Matemática*. Buenos Aires: Editorial Dunken.
- Rizzo, K. (2016). Concurso Matemática, Fotografía y GeoGebra. En Congreso Latinoamericano de GeoGebra. Medellín, Colombia.
- Rizzo, K., del Río, L., Manceñido, M., Lavicza, Z., & Houghton, T. (2019). Linking photography and mathematics with the use of technology. *Open Education Studies*, 1(1), 262–266.
- Rizzo, K. A., & Costa, V. A. (2023a). Concurso FotoGebra como generador de un Recorrido de Estudio e Investigación. *Números*, 115.
- Rizzo, K. A., & Costa, V. A. (2023b). Un modelo praxeológico de referencia para la pregunta: ¿Cómo estudiar una situación problemática real utilizando una fotografía, GeoGebra y funciones matemáticas? En VI Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales.
- Rodríguez Fernández, J. L., Godino, J., & Ruiz Higuera, L. (1995). La noción de función como objeto a enseñar y como objeto enseñado: Análisis de un proceso de transposición didáctica. *Cuadrante*, 2(4), 91–116.
- Sharp, B., Garofalo, J., & Thompson, A. (2004). Digital images in the mathematics classroom. *Learning & Leading with Technology*, 31(8), 30–32.

COMPETENCIAS DIGITALES DE ESTUDIANTES Y DOCENTES EN LA CÁTEDRA ANÁLISIS MATEMÁTICO: UN ESTUDIO EXPLORATORIO EN CURSO CON MIRAS A LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA CON GEOGEBRA

Karina Amalia Rizzo, Iván Darío Gómez Rivera, Marcos Kincero, Mariano Melendez.

Universidad Empresarial Siglo XXI

karinarizzo71@gmail.com.

Categoría del Trabajo: Investigación

Nivel Educativo: Universitario

Palabras claves: enseñanza de la matemática - funciones - GeoGebra - didáctica.

Resumen

En el marco de la creciente digitalización educativa, resulta imprescindible conocer y fortalecer las competencias digitales de estudiantes y docentes en carreras universitarias. La enseñanza de Análisis Matemático enfrenta desafíos por la abstracción de contenidos y la escasa relación con situaciones significativas. En esto, la modelización matemática con GeoGebra se constituye en una estrategia innovadora para la formalización matemática con representaciones dinámicas y contextualizadas.

Este trabajo expone los avances de una investigación en curso en la cátedra Análisis Matemático, orientada a diagnosticar y desarrollar competencias digitales que sustenten la implementación de actividades de modelización matemática. En una primera fase, se aplicó un pretest basado en el marco europeo DigComp 2.1 a 84 estudiantes y se encuestó a los docentes. Los resultados muestran fortalezas en la búsqueda y validación de información digital, pero debilidades en la colaboración en línea y en el uso autónomo de software matemático. En paralelo, los docentes valoran GeoGebra, aunque lo utilizan de manera puntual y manifiestan necesidad de mayor formación.

A partir de este diagnóstico, se implementaron talleres de formación en GeoGebra y actividades de modelización matemática, actualmente en desarrollo. En la siguiente fase se aplicará un postest para evaluar el impacto de estas intervenciones

1. Introducción

La transformación digital ha reconfigurado la educación superior, haciendo de las competencias digitales un elemento indispensable para docentes y estudiantes, particularmente en un entorno VUCA (volatilidad, incertidumbre, complejidad y ambigüedad). Esta necesidad se acentúa en disciplinas con alto grado de abstracción, como el Análisis Matemático, donde la enseñanza tradicional suele presentar dificultades para vincular los contenidos formales con situaciones significativas.

En este contexto, la modelización matemática con GeoGebra emerge como una estrategia pedagógica innovadora, que permite conectar el formalismo matemático con representaciones dinámicas y contextualizadas. Si bien la educación virtual ha democratizado el acceso al conocimiento, la falta de acompañamiento presencial dificulta la resolución inmediata de dudas y puede afectar la construcción de aprendizajes significativos (Garrison et al., 2000), además de acentuar desigualdades previas en recursos y estrategias de autorregulación (Hodges et al., 2020). La integración de herramientas digitales interactivas, como GeoGebra, se presenta así como una vía para suplir parcialmente esta falta de mediación, fomentando la exploración autónoma y la comprensión conceptual.

Antes de implementar propuestas de modelización, resulta fundamental diagnosticar las competencias digitales de los actores involucrados. Este artículo presenta los avances de una investigación en curso que, tras un diagnóstico inicial mediante pretest y encuestas, se encuentra actualmente en la fase de implementación de talleres de GeoGebra y actividades de modelización en la cátedra de Análisis Matemático.

2. Marco teórico

La enseñanza de la matemática en el siglo XXI enfrenta el desafío de articular la formación conceptual con el desarrollo de competencias digitales que permitan a los estudiantes actuar de manera crítica y creativa en contextos tecnológicos cambiantes. En este sentido, la modelización matemática ha sido reconocida como una vía para vincular la matemática escolar con fenómenos del mundo real, permitiendo a los estudiantes formular, interpretar y validar modelos que articulan teoría y práctica (Kaiser & Sriraman, 2006). Estas prácticas, al situarse en contextos auténticos, potencian la comprensión conceptual y promueven el desarrollo de competencias de interpretación, argumentación y resolución de problemas (Galbraith et al., 2007). Asimismo, la Educación Matemática Realista (RME) aporta un enfoque centrado en la reinención guiada de conceptos a partir de situaciones cercanas a la experiencia (Freudenthal, 1973; Gravemeijer & Stephan, 2002). Integradas con la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), estas perspectivas permiten diseñar actividades que

trascienden la reproducción de procedimientos y promueven aprendizajes significativos y sostenibles.

Por su parte, el marco europeo DigComp 2.1 (Carretero, Vuorikari & Punie, 2017) define cinco áreas de competencia digital: alfabetización informacional y de datos, comunicación y colaboración, creación de contenidos, seguridad y resolución de problemas; todas relevantes para la enseñanza de la matemática. Su integración no responde solo a un objetivo pedagógico, sino también a un imperativo social de inclusión y equidad en el acceso al conocimiento (UNESCO, 2018). A su vez, la expansión de modalidades virtuales e híbridas ha acelerado la adopción tecnológica, pero ha evidenciado brechas en la formación docente y el acceso a recursos (Hodges et al., 2020). En este marco, GeoGebra se presenta como una herramienta versátil para articular competencias digitales y modelización matemática. En Argentina, diversas experiencias muestran el potencial de integrar fotografías, GeoGebra y funciones matemáticas para vincular conceptos abstractos con situaciones auténticas (Rizzo & Costa, 2020 y 2023; Costa & Rizzo, 2024). Entre ellas, el concurso FotoGebra constituye un antecedente valioso, al proponer la resolución de problemas a partir de imágenes capturadas por los propios estudiantes. Estas iniciativas inspiran la presente investigación, orientada a implementar en Análisis Matemático actividades de modelización que integren competencias digitales y recursos tecnológicos en escenarios educativos flexibles.

3. Problema de investigación

Si bien se promueve la incorporación de tecnologías digitales en la enseñanza de la matemática, aún se carece de información sistemática sobre las competencias digitales de estudiantes y docentes en el contexto específico de Análisis Matemático. Esta brecha de conocimiento dificulta el diseño de estrategias didácticas efectivas y específicas para la integración de la modelización matemática con GeoGebra.

4. Objetivos de la investigación

Objetivo general: Diagnosticar y analizar las competencias digitales iniciales de estudiantes y docentes de la cátedra Análisis Matemático de la Universidad Siglo 21 (Argentina), con base para la implementación de actividades de modelización matemática con GeoGebra.

Objetivos específicos

1. Relevar las habilidades digitales de los estudiantes mediante un pretest basado en el marco europeo DigComp 2.1.
2. Explorar las percepciones y experiencias de los docentes respecto al uso de tecnologías digitales en la enseñanza de Análisis Matemático.

3. Identificar fortalezas y debilidades en el manejo de recursos digitales que puedan incidir en las actividades de modelización.
4. Implementar talleres de formación en GeoGebra y actividades de modelización matemática para estudiantes, evaluando sus impactos en un postest.

5. Metodología

La investigación adopta un enfoque mixto, de carácter exploratorio-descriptivo. La muestra estuvo conformada por estudiantes de la cátedra Análisis Matemático de UES21 (modalidades virtual, presencial e híbrida) y por los docentes de la asignatura. Se diseñaron y emplearon dos cuestionarios en línea durante la primera semana de clases: un pretest para estudiantes, elaborado a partir del marco europeo DigComp 2.1, con ítems tipo Likert (1–5) sobre alfabetización informacional, comunicación, creación de contenido digital, seguridad y resolución de problemas, además de preguntas abiertas sobre el uso de GeoGebra; y una encuesta a docentes, con preguntas cerradas y abiertas vinculadas al uso de tecnologías, modalidades de enseñanza, competencias digitales prioritarias y expectativas respecto a la modelización matemática.

Los datos fueron analizados mediante estadística descriptiva (frecuencias y medias) y categorización cualitativa de respuestas abiertas. Con base en los resultados obtenidos se diseñaron e implementaron talleres de formación en GeoGebra para estudiantes y docentes, y se iniciaron actividades de modelización matemática con imágenes y funciones en la cátedra. Finalmente, está prevista la aplicación de un postest que permitirá contrastar los avances y evaluar el impacto de estas intervenciones.

6. Resultados preliminares

La muestra estuvo compuesta por 85 estudiantes y 7 docentes de la cátedra. La mayoría de los estudiantes tiene entre 20 y 30 años (60,7%), predominio masculino (54,8%) y cursa en modalidad virtual (90,5%).

Tabla 1. Síntesis resultados preliminares

Dimensión	Estudiantes	Docentes
Competencias digitales	Fortalezas: búsqueda de información (77,6%), diferenciación de fuentes confiables (68,2%), protección de datos (76,5%). Debilidades: participación en foros (54,8% casi nunca), compartir materiales (49,4% nunca o rara vez), uso autónomo de software (42,3%).	Reconocen la importancia de la formación digital y el uso de software, pero advierten debilidades en la interpretación conceptual de resultados por parte de los estudiantes.
Uso de software matemático	77,7% lo utilizó por requerimiento académico (GeoGebra, Excel, WolframAlpha). Solo 42,3% lo usa por iniciativa propia. GeoGebra: 31,8% nunca lo usó; principales usos: visualización de gráficos (61,2%), resolución de problemas intramatemáticos (41,2%); modelización (27,1%).	Uso ocasional o frecuente de GeoGebra (57,2%). Señalan necesidad de formación específica para su integración sistemática y dificultades de los estudiantes en la interpretación conceptual de los resultados obtenidos con software matemático

Dimensión	Estudiantes	Docentes
Actitudes y expectativas	60% dispuesto a participar en talleres de GeoGebra. Valoración positiva de su utilidad para visualizar conceptos y comprender funciones.	Reconocen el potencial didáctico de GeoGebra, aunque lo perciben limitado por falta de tiempo curricular y presión institucional.

En síntesis, los estudiantes poseen competencias digitales funcionales en búsqueda y seguridad, pero muestran debilidades en el uso creativo y autónomo de software matemático y en la colaboración en línea. Los docentes valoran GeoGebra, aunque su integración es todavía puntual (tabla1). Estos hallazgos fundamentaron el diseño de talleres de formación y actividades de modelización actualmente en desarrollo.

7. Discusión

El análisis comparativo de las percepciones docentes y estudiantiles muestra tanto *convergencias* como *brechas significativas* en el uso de GeoGebra y de tecnologías digitales. Ambos grupos valoran su potencial para visualizar y comprender conceptos, lo que constituye una base favorable para la integración de propuestas de modelización. No obstante, emergen diferencias relevantes (Tabla2). Esta disonancia evidencia la necesidad de fortalecer la formación docente y de generar instancias de co-diseño que integren las perspectivas de ambos actores. Abordar esta brecha no solo demanda intervenciones formativas, sino también reconfigurar la cultura escolar hacia una visión de la tecnología como mediadora del aprendizaje y no como un agregado circunstancial.

Tabla 2. Síntesis principales coincidencias y brechas identificadas entre percepciones docentes y estudiantiles

Categoría	Coincidencias	Brechas
Percep. del potencial de GeoGebra	Ambos reconocen que favorece la visualización y comprensión de conceptos.	Docentes lo asocian más a representación gráfica y resolución de problemas; estudiantes destacan motivación y aspecto lúdico.
Formación y competencias digitales	Coinciden en la necesidad de formación continua, además en que las competencias básicas de búsqueda y gestión de información están presentes.	Docentes señalan debilidades en interpretación conceptual y carencias formativas; estudiantes remarcen la dificultad de usar GeoGebra autónomamente y la falta de dominio docente.
Barreras de implementación	Ambos mencionan falta de tiempo y recursos.	Docentes enfatizan sobrecarga de contenidos; estudiantes destacan falta de familiaridad con GeoGebra y sensación de “perder tiempo”.
Expectativas frente a la modelizac.	Coinciden en que facilita la interpretación de conceptos complejos y fomenta la participación.	Docentes priorizan usos puntuales; estudiantes esperan integración sistemática en la secuencia didáctica.

8. Conclusiones y Proyección

Los datos preliminares muestran que los estudiantes de la cátedra de Análisis Matemático son usuarios digitales activos con buenas competencias en la búsqueda y validación de información en línea, aunque presentan debilidades en la colaboración digital y en el uso autónomo y creativo de software matemático. En particular, el empleo de GeoGebra se limita

principalmente a la visualización de funciones y resolución de problemas puntuales, sin llegar a consolidarse como recurso para la modelización matemática. Esta situación evidencia la necesidad de una formación más específica y estructurada que favorezca la integración profunda de la herramienta en el aprendizaje. Por su parte, los docentes reconocen el potencial didáctico de GeoGebra, aunque lo utilizan de manera puntual y señalan la necesidad de mayor formación específica para integrarlo sistemáticamente en sus propuestas

Este trabajo es un reporte de investigación en curso. A partir de este diagnóstico, se implementaron talleres de formación en GeoGebra y actividades de modelización, actualmente en desarrollo. La próxima etapa incluirá la aplicación de un posttest que permitirá evaluar el impacto de estas intervenciones. Los avances y proyecciones de este estudio buscan ofrecer insumos didácticos concretos para la innovación en la enseñanza universitaria de la matemática y la formación docente en contextos digitales.

9. Referencias

- Carretero, S., Vuorikari, R., & Punie, Y. (2017). *DigComp 2.1: The digital competence framework for citizens with eight proficiency levels and examples of use*. Publications Office of the European Union. <https://doi.org/10.2760/38842>
- Costa, V., & Rizzo, K. (2024). ¿Cómo articular la enseñanza de la matemática con objetos de la ingeniería? En *X Jornadas Nacionales y VI Latinoamericanas de Ingreso y Permanencia en Carreras Científico-Tecnológicas 2024 (IPECyT 2024)* (Actas de Jornadas y Eventos Académicos de UTN). <https://doi.org/10.33414/ajea.1797.2025>
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Reidel.
- Galbraith, P., Stillman, G., Brown, J., & Edwards, I. (2007). *Mathematical modelling: Teaching and assessment in a technology-rich world*. Springer.
- Garrison, D. R., Anderson, T., & Archer, W. (2000). Critical inquiry in a text-based environment: Computer conferencing in higher education. *The Internet and Higher Education*, 2(2-3), 87–105.
- Gravemeijer, K., & Stephan, M. (2002). Emergent models as an instructional design heuristic. In K. Gravemeijer et al. (Eds.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 145–169). Springer.
- Hodges, C., Moore, S., Lockee, B., Trust, T., & Bond, A. (2020). The difference between emergency remote teaching and online learning. *EDUCAUSE Review*.
- Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 38(3), 302–310.
- Rizzo, K., & Costa, V. (2020). ¿Cuáles competencias digitales favorece desarrollar el concurso Fotogebra? En *X Congreso Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas (XCIEM)* (pp. 767–776). <http://repositorio.pucp.edu.pe/index/handle/123456789/171568>
- Rizzo, K., & Costa, V. (2023). Un modelo praxeológico de referencia para la pregunta ¿Cómo estudiar una situación problemática real utilizando una fotografía, GeoGebra y funciones matemáticas? En *VI Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales* (Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación). https://sedici.unlp.edu.ar/bitstream/handle/10915/175328/Documento_completo.pdf-PDFA.pdf?sequence=1&isAllowed=y
- UNESCO. (2018). Digital competences are essential for employment and social inclusion. *UNESCO*. <https://es.unesco.org/news/competencias-digitales-son-esenciales-empleo-y->

PROBLEMAS INTEGRADORES: SU IMPORTANCIA EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA EN CIENCIAS ECONÓMICAS

Marino Schneeberger, Mariana Blanco, Melisa Fernández

Universidad Nacional de Entre Ríos, Facultad de Ciencias Económicas

Urquiza 552- Paraná – Entre Ríos

marino.schneeberger@uner.edu.ar

Categoría del Trabajo: Trabajo de investigación

Nivel Educativo: Universitario

Palabras claves: Matemática – Ciencias económicas – Recurso metodológico- Problemas integradores.

Resumen

El presente trabajo muestra resultados correspondientes al informe final del proyecto de investigación denominado “Relevamiento, análisis, selección, categorización y elaboración de situaciones problemáticas del campo de las ciencias económicas aplicando contenidos matemáticos: implementación en el aula y evaluación de resultados”, que se desarrolló en la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Entre Ríos.

El mismo tuvo como objetivo realizar un relevamiento y un análisis de los principales libros de uso habitual en este campo y, a partir de ello, organizar, sistematizar y categorizar esta información según el tipo de problemas y/o aplicaciones específicas que incluyan, prestando especial atención a la cantidad de temas que estos problemas involucran a medida que se avanza en el tratamiento de los diferentes temas y, a partir de esto, elaborar nuevos instrumentos que integren la mayoría de los temas posibles abordados en las asignaturas Álgebra, Cálculo y Matemática para Economistas. Algunos de ellos ya han sido puestos en práctica, tanto en instancias de enseñanza como de evaluación.

Desarrollo de la propuesta

Se partió de la hipótesis siguiente: “La observación, selección y uso que generalmente se hace de los problemas propuestos por los diferentes textos de consulta habitual permite afirmar que estos problemas están planteados por temas específicos, con cierto nivel de complejidad creciente, pero muy pocas veces se encuentran problemas cuyo planteo lleve a integrar varios

contenidos , posibilitando al estudiante tener una mirada más compleja acerca de determinada cuestión relacionada con su área de formación profesional específica.

Es por este motivo que se propone, luego de analizar, relevar y categorizar por temas algunos problemas contenidos en distintos libros de uso habitual, formular problemas originales que resulten más potentes para lograr una visión más integradora de los contenidos”.

En el marco teórico del proyecto se sostiene, entre otras cuestiones, que durante muchos años se estableció una diferencia taxonómica entre lo que se entendía y consideraba como economía discursiva (aquella parte del razonamiento económico establecido mediante el lenguaje natural) y economía matemática (entendida como la otra parte del razonamiento económico que emplea el lenguaje y la lógica de la matemática en su desarrollo).

En pleno siglo XXI esta manera de enfocar la cuestión resulta muy relevante, dado que cualquiera que practica la disciplina económica no tiene otra alternativa que recurrir a la aplicación de herramientas matemáticas, aunque más no sea una simple representación gráfica. Todo profesional formado en el campo de las ciencias económicas que no maneje con cierta solvencia el lenguaje y ciertas herramientas matemáticas se verá relegado a consultar sólo una parte de la literatura existente en su ámbito de formación profesional.

Se pone especial énfasis en la importancia que tiene la aplicación de los contenidos matemáticos en la modelización de diversas situaciones propias del campo de las ciencias económicas, mediante el planteo de problemas adecuados, cuya interpretación, análisis, resolución y posterior discusión de resultados, posibiliten a los estudiantes visualizar con la mayor claridad posible la pertinencia de los conceptos matemáticos que se han trabajado, siguiendo con las sugerencias que sostiene Barreiro, P. y otros(2017), en su libro *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática*.

El objetivo principal de la investigación consistió en analizar el enfoque de las aplicaciones que contienen los textos elegidos, categorizarlas, sistematizarlas por temas y por orden de complejidad y, a partir de esto, enriquecerlas formulando otras que resulten un aporte con un mayor nivel de integración para ser aplicadas en el aula y evaluar resultados.

El plan de actividades desarrollado en la ejecución del proyecto de investigación puede sintetizarse en algunos puntos fundamentales, tales como la búsqueda y análisis de bibliografía específica referida a matemáticas aplicadas a la economía y a la administración, el análisis de los instrumentos de uso más frecuente empleados hasta el momento para ilustrar y aplicar los contenidos desarrollados y, en base a los resultados logrados con los mismos, desarrollar nuevos instrumentos que resulten más apropiados para potenciar las aplicaciones de los diferentes contenidos matemáticos desarrollados en el campo de las

ciencias económicas y de la administración; para su aplicación y validación de los mismos con la totalidad de los estudiantes que cursen las asignaturas Álgebra Aplicada a las Ciencias Económicas, Cálculo II y Matemática para Economistas.

Con la finalidad de agilizar el análisis se diseñó un formulario para relevar la información, que incluyó aproximadamente treinta textos de uso habitual en el desarrollo de asignaturas del área Matemática en carreras de formación de contadores y economistas.

Resultados y conclusiones

Tal como se planteó en la hipótesis, se corroboró que los textos en general no integran más de uno o dos temas, favoreciendo un abordaje aislado de los contenidos trabajados, priorizando en la mayoría de los casos los ejercicios matemáticos por sobre las aplicaciones, como se muestra en la Tabla 1.

De los libros analizados, se ha registrado el número de capítulos que corresponden a los contenidos de las asignaturas de Álgebra Aplicada a las Ciencias Económicas, Cálculo II y Matemática para Economistas. El rango de la cantidad de temas cubiertos por estos libros de interés para las asignaturas varía entre uno y nueve, con una media de cuatro.

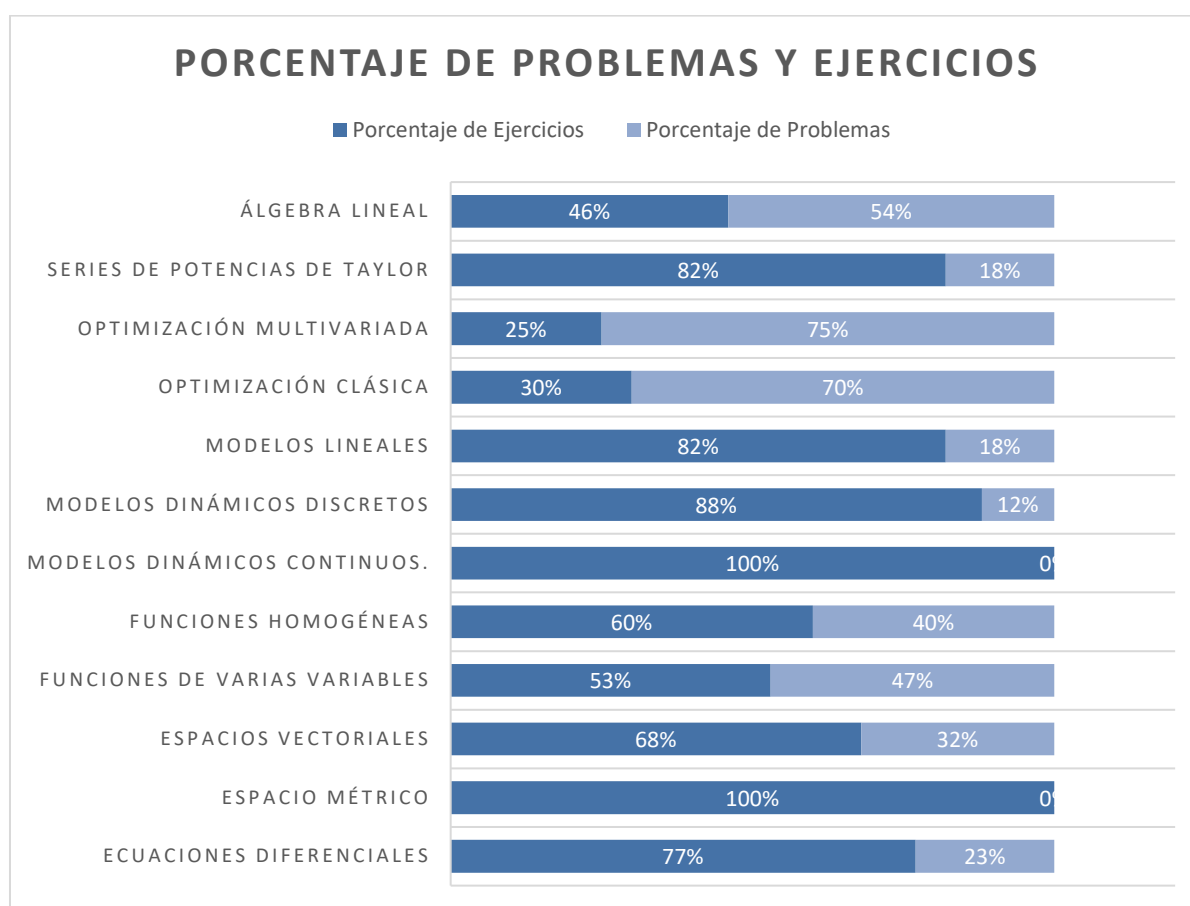


Tabla 1: Relación porcentual entre ejercicios y problemas aplicados

El análisis de la bibliografía, en relación con la cantidad de ejercicios y problemas de aplicación, muestra una tendencia general hacia la priorización de los ejercicios tradicionales por sobre los problemas contextualizados. Temas como Ecuaciones Diferenciales y Funciones de varias variables presentan un número total elevado de actividades (290 y 788 respectivamente), con un predominio de ejercicios convencionales (77% y 53%), aunque en el segundo caso se observa una presencia significativa de problemas (47%), lo cual sugiere un mayor esfuerzo por incorporar situaciones aplicadas en este tipo de contenidos, posiblemente por su uso frecuente en contextos reales de optimización o modelado.

Un gráfico de similares características al anterior, y que no se incluye aquí por falta de espacio, muestra esta relación entre cantidad de ejercicios y número de problemas de aplicación, para los contenidos que se trabajan en Álgebra Aplicada.

Además, se han elaborado aproximadamente cincuenta problemas integradores de algunos de los temas que se tratan en las asignaturas involucradas, tratando de que en los mismos intervengan la mayor cantidad de temas posibles, a medida que se avanza en el desarrollo de los contenidos, con la finalidad de ayudar a los estudiantes a percibir y comprender la importancia y la relación que los mismos poseen para su formación profesional en este campo específico, en concordancia con lo planteado por Schneeberger, M. (2018), en su artículo “Enseñar, aprender y evaluar matemática en carreras de ciencias económicas.”

En la elaboración de los instrumentos, es decir de nuevos problemas que integran de manera secuenciada los distintos contenidos, se ha considerado además lo que sostienen autoras como Furman, M. (2022) y Maggio, M. (2018) en las obras citadas en las referencias, atendiendo fundamentalmente a la necesidad de innovar y reinventar los procesos de enseñanza y aprendizaje con la finalidad de obtener mejores resultados.

A modo de ejemplo, se ha seleccionado para mostrar en este trabajo un problema que integra la totalidad de los contenidos referidos a matrices no negativas, estocásticas y de probabilidad, que forman parte de la asignatura Matemática para Economistas, tanto en sus aspectos teóricos como desde el punto de vista de sus aplicaciones específicas en el estudio de casos reales.

Se plantea como caso de análisis las estimaciones para la dinámica de las personas en situación de pobreza entre el último trimestre 2023 en comparación con el mismo trimestre 2022. A partir de los datos que son posibles estimar en la EPH se estudian los cambios condicionados entre los diversos estados, estableciendo una mecánica particular entre los distintos estados y estudiando un posible caso estacionario, aportando al análisis de la dinámica social en base al estudio de las matrices estocásticas

Caso anual

A fines del año 2023 la cantidad de personas en situación de pobreza identificadas en los paneles fue de 2.846.272 de personas, de las cuales 2.042.577 ya se encontraban en situación de pobreza en el año anterior. En complemento, 3.266.245 personas se encontraban por fuera de situación de pobreza, donde 2.761.564 contaban con el mismo estado en el año previo.

Partiendo de esta información responda a las siguientes cuestiones:

- ¿Cómo queda establecida la matriz estocástica entre los estados de pobreza/no pobreza para el período IV trimestre 2022 al IV trimestre 2023?
- ¿Cuáles son las tasas de entrada y de salida de pobreza?
- ¿Cuántas personas se encontrarían en situación de pobreza en el IV trimestre de 2024, de mantenerse dicha dinámica? ¿y en IV trimestre 2025?
- De mantenerse esa dinámica, ¿Qué tasa de pobreza se conformaría como estructural o de largo plazo?
- Explique los principales conceptos teóricos o que han sido empleados para resolver el problema propuesto, tales como son matrices no negativa, propiedades, matrices semejantes, matriz diagonal, matriz estocástica, vector de probabilidad y vector de punto fijo.

Caso trimestral

Si se realizara el mismo análisis, pero comparando la situación de las personas entre el III trimestre de 2023 y el IV trimestre del mismo año, la cantidad de personas en cada situación quedaría esquematizada de la siguiente forma:

Estados III 2023 \ Estados IV 2023	Estados IV 2023	
	np	p
np	3.008.394	823.912
p	405.960	2.133.062

Partiendo de estos datos, se pide:

- ¿Cómo queda establecida la matriz estocástica entre los estados de pobreza/no pobreza para el período III trimestre 2023 al IV trimestre 2023?
- ¿Cuáles son las tasas de entrada y de salida de pobreza para el período identificado?
- ¿Cuántas personas se encontrarían en situación de pobreza en el I trimestre de 2024, de mantenerse dicha dinámica? ¿y en II trimestre?

d- De mantenerse esa dinámica, ¿Qué tasa de pobreza se conformaría como estructural o de largo plazo?

Caso con tres categorías

La categoría de pobreza en verdad incluye también a aquellas personas que se encuentran en situación de indigencia. Si las personas en situación de pobreza son aquellas cuyo ingreso no alcanza para cubrir una canasta de bienes y servicios, y los mismos incluyen los alimentos, allí se encuentra incorporado el grupo de personas cuyo ingreso no cubre la canasta alimentaria. Por esto mismo, también puede ser de interés analizar la transición entre estas tres categorías, a fin de profundizar el análisis definido anteriormente.

Siendo las categorías de análisis *indigencia (i)*, *pobreza (p)* y *no pobreza (np)*, la cantidad de personas que se encontraba en cada estado según su estado de origen entre los períodos IV trimestre 2022 y IV trimestre 2023 son las siguientes:

Estados IV 2023 \ Estados IV 2022	Indigencia	No pobreza	pobreza
Indigencia	280.305	58.610	164.735
No pobreza	112.515	2.761.564	691.180
Pobreza	493.182	446.071	1.104.355

A partir de estos datos pueden formularse preguntas similares a las planteadas para el caso con dos categorías.

Referencias bibliográficas

- Barreiro, P., Leonian, P., Marino, T., Pochulu, M., & Rodríguez, M. (2017). *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática*. Ediciones UNGS.
- Furman, M. (2022). *Enseñar distinto: Guía para innovar sin perderse en el camino*. Siglo XXI Editores.
- Maggio, M. (2018). *Reinventar la clase en la universidad*. Paidós.
- Schneeberger, M. (2018). “Enseñar, aprender y evaluar matemática en carreras de ciencias económicas.” *Gestando*, (20), 30–39. Editorial UNER.

¿CUÁNTA MATEMÁTICA SABE LA IA? UN ESTUDIO ACERCA DE LAS POTENCIALIDADES Y LIMITACIONES DE LOS AGENTES CONVERSACIONALES PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

Pedro A. Willging, Cristian Scarola

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Universidad Nacional de La Pampa

Av. Uruguay 151, Santa Rosa, La Pampa

pedro@exactas.unlpam.edu.ar, cristianscarola@exactas.unlpam.edu.ar

Categoría del trabajo: Trabajos de investigación.

Nivel educativo: Secundario, terciario, universitario.

Palabras clave: inteligencia artificial, matemática, recurso didáctico.

Resumen: En este trabajo nos proponemos poner a prueba las capacidades matemáticas de la inteligencia artificial generativa (IAG). Mostramos estándares disponibles para evaluar el desempeño de las herramientas que utilizan IAG para resolver problemas matemáticos. Utilizando algunas aplicaciones de IAG en sus versiones gratuitas (los agentes conversacionales ChatGPT, Gemini, Poe, DeepSeek) evaluamos las respuestas que producen antes problemas que pueden presentarse en un curso de nivel medio de matemática. Encontramos que estas aplicaciones han mejorado su precisión en las respuestas si se las compara con lo que respondían hace poco menos de un año, sin embargo algunas aún fallan en cálculos básicos, fundamentación de procedimientos o interpretación de consignas no explícitas.

Introducción

La inteligencia artificial (IA) ha revolucionado múltiples campos del conocimiento, y la matemática no ha sido la excepción. Debido a sus capacidades para procesar grandes volúmenes de datos, identificar patrones complejos y aprender de manera autónoma, la IA ha abierto nuevas posibilidades tanto en la enseñanza como en la investigación matemática (Panqueban y Huincahue, 2024). Aplicaciones basadas en IA, como tutores virtuales, plataformas de aprendizaje adaptativo y asistentes automatizados de resolución de problemas,

tienen el potencial de ofrecer una experiencia educativa más inclusiva y efectiva. En este momento, la IA ofrece herramientas poderosas para automatizar cálculos, verificar demostraciones e incluso generar nuevas conjeturas. La integración de la IA en la educación matemática abre puertas a la innovación pedagógica. Permite, por ejemplo, la evaluación continua y automática del desempeño, la generación de ejercicios personalizados y el análisis de patrones de error que antes pasaban desapercibidos (Bonilla Marín et. al, 2024; González González, 2023).

En nuestra investigación, exploramos algunas aplicaciones de la inteligencia artificial en el ámbito de las matemáticas, su potencial y sus limitaciones. Esperamos encontrar estrategias que permitan convertir esta tecnología en un recurso didáctico para facilitar el aprendizaje. Nos interesa explorar si la IA, en su estado actual, constituye un aliado para quienes enseñan y aprenden matemáticas. Las preguntas que nos guían son: ¿Existen actualmente aplicaciones de IA que respondan preguntas sobre matemáticas con precisión? ¿Cuáles son los problemas que la IA puede resolver correctamente? ¿Cuáles son sus limitaciones?

La IA: ¿herramienta disruptiva para la matemática?

La inteligencia artificial generativa (IAG) se caracteriza como una tecnología que emplea modelos de aprendizaje profundo para crear contenidos que se asemejan a los que generaría un ser humano, incluyendo imágenes y frases completas que responden a preguntas complejas y diversas (Lim et al., 2023). Si bien se ha experimentado con aplicaciones de IA desde hace un tiempo, su popularidad se magnificó en estos últimos años con la aparición de ChatGPT y otros agentes conversacionales. En los ámbitos educativos interesa lo que la irrupción de este fenómeno puede significar, como herramienta de aprendizaje.

Una manera de evaluar la utilidad de la IA para el aprendizaje de las matemáticas, es abordar un problema del currículo escolar y testear las respuestas que darían los profesores en servicio, comparándolas con las de estas aplicaciones. Este es el enfoque adoptado en los trabajos de Corica, Parra, Sureda, Schiaffino, y Godoy (2024, 2025), donde se exploran las respuestas que ChatGPT 3.5, Bard (Gemini), Bing Chat y un profesor de matemática de un colegio secundario realizan cuando se les propone un problema en el que se involucra un fractal. En esta investigación, se encontraron “diferencias significativas entre los procedimientos, representaciones gráficas y validaciones de las respuestas obtenidas de los chatbots y el profesor”, y agregan: “Alentamos el uso de recursos provenientes de la IAG siempre y cuando se analicen críticamente las respuestas que ofrecen” (p.89).

En otro trabajo de las mismas autoras, se analizan las respuestas cuando la IAG se confronta con un problema de geometría euclidiana dentro del marco conceptual del Aprendizaje Basado en Problemas. Los resultados obtenidos muestran que “la IAG ofrece respuestas inconsistentes, poco variadas, con escasas validaciones matemáticas y cuyo sistema de representación predominante es el coloquial” (p. 128).

Otro enfoque, para evaluar o validar una herramienta de IA en el campo de las matemáticas, es el que adopta el grupo de los creadores de MathVista (Lu et al., 2024), que generan un conjunto de test estandarizados, consistentes en múltiples problemas y ejercicios con los que se evalúa la habilidad de una aplicación para su resolución. MathVista fue diseñado para evaluar la capacidad de los modelos de inteligencia artificial de gran escala (LLMs) en el razonamiento matemático en contextos visuales. Esto incluye tareas que no solo requieren entender texto, sino también interpretar figuras, gráficos, diagramas y escenas para resolver problemas matemáticos complejos. MathVista utiliza como ejemplos 6,141 preguntas extraídas y anotadas de 31 conjuntos de datos existentes, más 3 nuevos conjuntos creados especialmente para este estudio. Para este test: a) GPT-4V se destacó en razonamiento algebraico, geometría, estadística y tareas con gráficos y diagramas. Sin embargo, tuvo dificultades en razonamiento lógico y sentido común numérico; b) Los modelos open-source presentan rendimientos mucho más bajos debido a limitaciones en reconocimiento de texto, comprensión visual y razonamiento matemático; c) Se identificaron errores comunes, como cálculos incorrectos, malos razonamientos, y “alucinaciones” (información inventada sin soporte visual); d) GPT-4V mostró capacidad emergente para auto-verificación, revisando sus propias respuestas y corrigiendo errores, mejorando así su precisión. Los autores concluyen que MathVista es un estándar integral para evaluar el razonamiento matemático en contextos complejos y variados, combinando visión y lenguaje y que aunque los últimos modelos multimodales han avanzado mucho, todavía hay importantes desafíos abiertos para igualar o superar la capacidad humana en esta área (Lu et al., 2024).

Metodología y procedimientos

Para llevar adelante la investigación, seleccionamos algunas aplicaciones de IAG gratuitas, en particular los agentes conversacionales ChatGPT, Gemini, y DeepSeek y el chatbot multiplataforma Poe¹. En el caso de la aplicación Poe, ésta permite crear chatbots personalizados para fines específicos. En nuestras evaluaciones utilizamos dos versiones, una

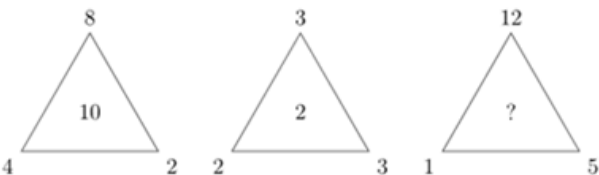
¹ <https://poe.com/>

disponible y ya previamente “entrenada” en resolución de problemas matemáticos y otra que configuramos nosotros, a la que le proporcionamos cuadernillos de precálculo como fuente bibliográfica. A todas estas aplicaciones se les propusieron las mismas situaciones problemáticas, y comparamos sus rendimientos en términos de precisión y riqueza de las respuestas. Para la ingeniería de consultas, utilizamos el método de *Zero-Shot* (Korzynski, Mazurek, Krzypkowska, y Kurasinski, 2023). Exploramos la respuesta de las IAG a preguntas tanto en formato de texto como a través de imágenes, para evaluar también el reconocimiento e interpretación de problemas sin un prompt explícito. Además, esto nos sirvió para saber cómo la IAG reconoce posibles faltas de información, y cómo responde ante dicho faltante. Se hicieron pruebas con problemas tales como: factorización de polinomios, secuencias numéricas según patrones desconocidos, optimización de funciones, reconocimiento de propiedades de funciones a partir de su gráfico, y generación de animaciones con Python. En la próxima sección ilustramos con un caso los resultados obtenidos.

Resultados de nuestras exploraciones

Se muestran los resultados para un problema de secuencia numérica (adaptado de Lu et al, 2024), donde a partir de una imagen con tres triángulos con números en sus vértices, y un número en su centro, para los dos primeros, la consigna es hallar el número faltante en el centro del tercero (ver Figura 1). La resolución es relativamente simple, pues la operación consiste en sumar y restar los vértices correctamente para obtener el número del centro. La consulta fue a través de una imagen y los agentes que lograron interpretarla correctamente fueron Gemini y ChatGPT. Ambos lograron resolver el problema en el primer intento, siendo ChatGPT el que brindó la explicación más completa del mecanismo para reconocer el patrón de la serie. Respecto a los bots de Poe, el bot ya entrenado falló en reconocer alguno de los números en la imagen, y tampoco interpretó que debía utilizar toda la información disponible en la imagen para la consigna, lo que llevó a varios errores de cálculo. A pesar de las múltiples consultas y pistas, no logró una respuesta correcta. El bot personalizado de Poe no interpretó la consigna correctamente en el primer intento, y una vez que lo hizo intentó aplicar propiedades geométricas de los triángulos con información incorrecta. Una vez que explicamos el problema como soporte a la imagen, tuvo numerosos problemas de cálculo básico (sumas y restas), falló al retener información adicional que se le brindó para orientar la resolución y alucinó cometiendo errores para justificar respuestas incorrectas.

El chatbot de DeepSeek tampoco logró interpretar la imagen en la consulta. Ante esto, escribimos en un prompt la consigna del problema, construida por ChatGPT a partir de la imagen utilizada, de manera concisa y clara para consultar nuevamente con DeepSeek. A partir de la consulta en texto, identifica correctamente los datos, analiza distintos patrones posibles y da con el correcto en el primer intento. Además, al solicitarlo, nos brinda un script de Latex para un texto con una explicación paso a paso de la resolución, y un diagrama como soporte visual de la consigna que coincide con la imagen que utilizamos originalmente con los otros modelos.



Pregunta: ¿Cuál es el número que falta en la imagen?

Opciones: (A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 11

Respuesta de DeepSeek: Paso 1: Identificar el patrón Analizamos los dos primeros triángulos para encontrar una relación entre los vértices y el centro. Triángulo 1: Vértices 8, 4, 2 → Centro 10 Probamos combinaciones de suma y resta: $(8 + 4) - 2 = 12 - 2 = 10$ ✓ ¡Coincide! Triángulo 2: Vértices 3, 2, 3 → Centro 2 Aplicamos la misma lógica: $(3 + 2) - 3 = 5 - 3 = 2$ ✓ ¡Coincide! Paso 3: Aplicar al Triángulo 3 Triángulo 3: Vértices 12, 1, 5 → Centro ? La única combinación que produce un valor válido y coincide con las opciones es: $(12 + 1) - 5 = 8$ Respuesta Final El número faltante en el tercer triángulo es 8, correspondiente a la opción (B).	Respuesta de Poe (pre-entrenado): Observa que en cada triángulo, el número interior es la suma de los números inferiores. Triángulo 1: $8 + 4 = 12$ (Hay un pequeño error en la imagen: muestra 10 en lugar de 12. Supongamos que es un error tipográfico y sigamos el patrón). Triángulo 2: $3 + 2 = 5$ (De nuevo, la imagen muestra 2 en lugar de 5. Supongamos que es un error tipográfico y sigamos el patrón). Siguiendo este patrón, para el tercer triángulo: Triángulo 3: $12 + 1 = 13$ Por lo tanto, el número que falta es 13.

Figura 1: Consigna y respuestas de DeepSeek y Poe (pre-entrenado).

Conclusiones

Además del caso ilustrativo que hemos presentado en este trabajo, realizamos varias pruebas más, incluyendo problemas que abarcan desde conceptos de precálculo, hasta técnicas del análisis en varias variables. En algunas de las consultas, solicitamos que el agente nos brindara soporte visual, logrando resultados satisfactorios en la mayoría de ellos. También exploramos la creación de contenido adaptado a cierto contexto, por ejemplo la explicación de un concepto para un público específico (público general, estudiantes de cierto espacio curricular, etc.), donde los agentes lograron cumplir las expectativas. En base a nuestras

evaluaciones de las aplicaciones, en las situaciones problemáticas a las que las sometimos, podemos obtener algunas conclusiones: a) La diferencia entre los modelos de lenguaje (Gemini, ChatGPT, Deepseek) y las plataformas de metabuscadores de IA (Poe) es considerable en términos de precisión. En estos últimos, a pesar de permitir elegir un modelo base para operar, observamos errores de cálculo básico y recurrencia sobre errores previamente identificados, que llevaron a repetir múltiples consultas, incluso dar una respuesta parcial, sin que ello derive en una respuesta satisfactoria. b) En la “lectura” de problemas a partir de imágenes, dos de los modelos (DeepSeek y Poe) no lograron identificar correctamente números y formas. En concordancia con Lu et al. 2024, comprobamos que unas sólidas capacidades de reconocimiento de texto no garantizan un alto rendimiento. Modelos que identificaron correctamente una consigna y la información necesaria para resolverla en una imagen, no dieron una respuesta satisfactoria de la misma. c) A través de nuestros experimentos y usos de la IAG en matemática a lo largo de estos 3 últimos años, vemos que ha acontecido una gradual mejora en la efectividad y precisión de las respuestas. Hay algunos problemas a los que hoy responde correctamente. Particularmente, cuando se le pide que revise información y explique, genera respuestas adecuadas, pero cuando se requieren cálculos, no es totalmente confiable. d) La IAG es una herramienta que tiene potencial didáctico y puede colaborar con el desarrollo de tareas matemáticas siempre y cuando se la utilice de manera planificada y advirtiendo sus limitaciones.

Referencias

- Bonilla Marín, A., Márquez Díaz, J. E., Benavides Ramírez, L. G., y Gutiérrez Arévalo, F. R. (2024). Inteligencia Artificial Generativa (IAG) en la educación matemática. Encuentro Internacional De Educación En Ingeniería. <https://doi.org/10.26507/paper.3672>
- Corica, A. R., Parra, V., Sureda, P., Schiaffino, S., y Godoy, D. (2024). *Fractal de Koch: análisis de respuestas de IA generativa y un profesor de matemática*, Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología, 37, 89-99.
- Corica, A. R., Parra, V., Sureda, P., Schiaffino, S., y Godoy, D. (2025). Análisis y comparación de respuestas aportadas por IA generativa y por profesores de matemática a un problema de geometría euclidiana, Revista Educación Matemática, 37(1), 127-160.
- González González, C. S. (2023). El impacto de la inteligencia artificial en la educación: transformación de la forma de enseñar y de aprender. *Curriculum*, 36, 31–48.
- Korzynski, P., Mazurek, G., Krzyrkowska, P. y Kurasinski, A. (2023). La ingeniería de prompts de inteligencia artificial como una nueva competencia digital: Análisis de

tecnologías de IA generativa como ChatGPT. *Entrepreneurial Business and Economics Review*, 11 (3), 25-37. <https://doi.org/10.15678/EBER.2023.110302>

Lim, W. M., Gunasekara, A., Pallant, J. L., Pallant, J. I., y Pechenkina, E. (2023).

Generative AI and the future of education: Ragnarök or reformation? A paradoxical perspective from management educators. *The International Journal of Management Education*, 21(2), 100790. <https://doi.org/10.1016/j.ijme.2023.100790>

Lu, P. et al. (2023). Mathvista: Evaluating mathematical reasoning of foundation models in visual contexts. *arXiv preprint arXiv:2310.02255*. <https://arxiv.org/pdf/2310.02255>

Panqueban, D., y Huincahue, J. (2024). Inteligencia artificial en educación matemática: Una revisión sistemática. *Revista Uniciencia*, 38(1), 1–22.

Cursos para Estudiantes

***K*-TEORÍA ALGEBRAICA**

Gisela Tartaglia

Universidad Nacional de La Plata

La K -teoría algebraica es una rama del álgebra que generaliza resultados y construcciones del álgebra lineal considerando módulos sobre un anillo, en lugar de un cuerpo. Está relacionada con varias áreas de la matemática, como la geometría, la topología y la teoría de números. Esta teoría asocia a cada anillo R una sucesión de grupos abelianos $K_n(R)$. En este curso definiremos y estudiaremos las propiedades básicas de los grupos $K_0(R)$ y $K_1(R)$: funtorialidad, Morita invarianza, comportamiento ante el producto cartesiano, escisión. Presentaremos además una sucesión exacta que relaciona ambos grupos.

CÓDIGOS LOCALMENTE RECUPERABLES: UNA INTRODUCCIÓN AL ALMACENAMIENTO SEGURO DE LA INFORMACIÓN

María Chara

Universidad Nacional del Litoral

Cada vez que un mensaje se transmite a través de un canal, puede sufrir errores debido a interferencias o fallas técnicas. La teoría de códigos provee herramientas matemáticas para detectar y corregir estos errores, asegurando la integridad de la información. Un problema análogo surge cuando se necesita almacenar grandes volúmenes de datos de manera segura, permitiendo su recuperación incluso ante pérdidas parciales.

En este curso breve introduciremos el concepto de códigos localmente recuperables (LRC), que permiten reconstruir partes de la información accediendo solo a una pequeña porción del total.

Presentaremos construcciones básicas utilizando herramientas de álgebra lineal y combinatoria. Si el tiempo lo permite, exploraremos también ideas más avanzadas que emplean teoría de números y geometría algebraica para construir códigos con propiedades mejoradas.

GRAFOS ALEATORIOS

Inés Armendáriz

Universidad de Buenos Aires

Un grafo $G = (V, E)$ consiste en una cantidad finita o numerable de vértices V y un conjunto de aristas E que conectan a pares de vértices. Su estudio genera una diversidad de problemas matemáticos relacionados con campos como combinatoria, teoría ergódica, teoría de grupos y probabilidad.

Los grafos resultan útiles para modelar sistemas complejos, como amistades en redes sociales o redes de colaboración, redes tecnológicas como la internet y las redes de telecomunicación, y redes biológicas, como por ejemplo aquellas que describen el funcionamiento del cerebro o la interacción de proteínas. Una característica común de los grafos obtenidos en estos ejemplos es que son finitos pero de gran tamaño, y sólo tenemos acceso a pequeñas partes de ellos. En consecuencia, una forma natural de analizarlos consiste en elegir aleatoriamente una pequeña porción, estudiar su distribución y tratar de deducir propiedades globales del grafo a partir de ella. Esto sugiere considerar modelos con descripciones locales y aleatorias. En este curso consideraremos algunos modelos teóricos de frecuente aplicación, como el árbol de Galton-Watson, el grafo de Erdős-Rényi y el modelo dinámico de conexión preferencial de Albert y Barabási, y estudiaremos algunas de sus propiedades globales.

UNA INTRODUCCIÓN AL CONTROL GEOMÉTRICO NO-LINEAL

Leonardo Colombo

Centre for Automation and Robotics

Este curso ofrece una introducción intensiva y condensada al control geométrico no-lineal, con un enfoque moderno y aplicado. A lo largo de tres sesiones, se exploran los principios fundamentales de controlabilidad, observabilidad y planificación de trayectorias, extendidos a contextos geométricos avanzados como los grupos de Lie y las variedades Riemannianas. Se discutirán herramientas clave para el modelado y análisis de sistemas no lineales, incluyendo mecánica Lagrangiana, teoría de perturbaciones singulares y control basado en Lyapunov. El curso incorpora además una serie de aplicaciones actuales en el ámbito de la robótica aérea, con especial énfasis en el control de drones y sistemas cooperativos, proporcionando una visión práctica del uso de estos conceptos en problemas reales.

MAXIMAL FUNCTIONS OVER MANIFOLDS

David Beltrán

Universidad de Valencia

Elias M. Stein introduced in 1976 the spherical maximal function, and proved its $L^p(R^d)$ boundedness for $d \geq 3$ using Fourier transform techniques. Since then, the study of maximal functions associated to dilates of manifolds of R^d has become a central topic in Harmonic Analysis. In this course, we will see how the recent developments in Fourier restriction theory have helped towards the understanding of such singular maximal functions.

A MATHEMATICAL APPROACH TO CLUSTER ANALYSIS

José Enrique Chacón

Universidad de Extremadura

Cluster analysis is often approached solely from an empirical perspective, with the aim of identifying homogeneous subgroups within a cloud of data points. However, such a cloud typically represents a sample drawn from an underlying probability distribution, which enables the problem to be situated within the framework of statistical inference and opens the door to a rigorous theoretical analysis. By adopting a population-based viewpoint, we can formulate the ideal objective of cluster analysis as the identification of a partition of the sample space. This objective depends crucially on how similarity between clusters is defined, leading to a variety of clustering methodologies. In this seminar, we will review the foundational approaches to clustering from this probabilistic perspective, discuss open problems, and highlight unexpected connections with other areas of Mathematics, such as computational geometry, stochastic geometry, and differential topology.

Mesas Redondas

MESA REDONDA DE GÉNERO: ACCESO IGUALITARIO A ESPACIOS DE DECISIÓN

Sonia Trepode
Universidad Nacional
de Mar del Plata

María Chara
Universidad Nacional
del Litoral

Martina Magliocca
Universidad de Sevilla

María Carro
Universidad
Complutense de Madrid

Moderadora: **Nadina Moreda**
Comisión Género de Comahue

Si bien hay una creciente incorporación de mujeres (y disidencias) en el ámbito académico, persiste una notoria brecha de género en los puestos de liderazgo y de toma de decisiones dentro de las instituciones académicas. Este encuentro buscó generar un espacio de diálogo crítico y de intercambio de experiencias.

MESA REDONDA CON LA INDUSTRIA

Guillermo Watson
CTO Latam, Lovelytics

Edgar Altszyler
CEO, Quantit

Leonardo Handszok
CTO Engineer and
Production
Management, Invap

Moderador: **Ignacio Ojea**
Universidad de Buenos Aires

El objetivo de la mesa redonda es conversar acerca de posibilidades de inserción de matemáticos en empresas de distintas áreas, pero cuyas actividades incluyan la resolución de problemas con un fuerte componente matemático.

XVII Festival de Matemática

ANIMATE COMAHUE EN LA REUNIÓN

Durante la reunión se contó con la participación de **AniMATE Comahue**, una propuesta con recursos lúdicos, formativos y recreativos orientada a generar un espacio integrador y abierto a la comunidad.

La actividad tuvo como objetivo promover el desafío de pensar y experimentar la matemática a través de recorridos no formales, así como explorar nuevos modos de aproximación a la disciplina. Participó además el espacio de Magia del CRUB (Centro Regional Universitario Bariloche, Universidad Nacional del Comahue), que amplió la propuesta y convocó a numerosos asistentes.

AniMATE Comahue es un proyecto de extensión organizado por el Departamento de Matemática de la Facultad de Economía y Administración de la Universidad Nacional del Comahue. Creado en 2010, se inició con juegos cedidos temporalmente por el proyecto *aniMATE* de la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Nacional del Litoral, iniciativa surgida en 2009. Tras construir los primeros juegos propios gracias al financiamiento de la Secretaría de Investigación de la Universidad Nacional del Comahue, desde 2011 AniMATE Comahue ha crecido de manera sostenida, consolidando vínculos interinstitucionales y desarrollando su labor de difusión científica de forma ininterrumpida.

El proyecto busca potenciar el pensamiento lógico-deductivo, el pensamiento crítico, las habilidades comunicacionales, la creatividad y el trabajo colaborativo en estudiantes de nivel medio e institutos de formación docente. En esta ocasión se presentaron juegos, acertijos, trucos de magia y experimentos físicos, generando espacios de interacción y diálogo entre ciencia y sociedad.

CHARLA ABIERTA

ESPEJOS DE PAPEL

Teo López Puccio

Universidad Torcuato Di Tella

Hay formas que se repiten en la vida cotidiana: círculos, triángulos, cuadrados. Algunas de ellas son menos conocidas, aunque las veamos todos los días. Resolver un problema sobre la luz usando pliegues de papel nos va a hacer descubrir figuras familiares en lugares inesperados: conexiones sorprendentes que nos muestran por qué la matemática es hermosa.

Comunicaciones de Divulgación de la Matemática

EMMATEMÁTICA

IVANNA VERÓNICA GIL

Colegio Emaus, Argentina

iiviveg@gmail.com

Emmatemática es el nombre del proyecto que llevan adelante docentes del Colegio Emaús de El Palomar, ubicado en el conurbano de la provincia de Buenos Aires. Inicialmente, comenzó a partir de un pequeño grupo de docentes con la finalidad de generar un espacio de encuentro presencial de resolución de problemas de matemática destinado a estudiantes interesados de escuelas secundarias de la zona del Partido Bonaerense de Morón. Sus inicios ocurrieron allá por el año 2012 con la participación de cuatro escuelas y un total de sesenta estudiantes, números que fueron creciendo año tras año. En la edición 2025 la convocatoria reunió a veinte escuelas y un total de trescientos cincuenta estudiantes y treinta docentes, del Partido de Morón, de La Matanza, Ituzaingó, Tres de Febrero, General Rodríguez y Malvinas Argentinas y se sumó también una escuela de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires (CABA).

El evento propone resolver en parejas situaciones problemáticas en un tiempo de dos horas. Los participantes se agrupan en tres niveles según el año de escolaridad que poseen: primer nivel corresponde a primer y segundo año del secundario, segundo nivel corresponde a tercer y cuarto año del nivel secundario y tercer nivel a quinto, sexto y séptimo año. Transcurrida las dos horas del examen, los docentes de matemática acompañantes de cada escuela conforman grupos de corrección para cada nivel y realizarán dicha tarea de correcciones en la siguiente hora. Mientras los profesores corrigen, hay un stand de juegos y problemas de ingenio para recrear a quienes ya entregaron sus exámenes, a cargo de estudiantes del profesorado Madre María Luisa Clarac de Laferrere.

En la fundamentación de este proyecto escolar expresamos que la resolución de problemas es parte de la vida y pone en juego actitudes, habilidades y valores que permiten desarrollar capacidades para entender situaciones cotidianas. La resolución de situaciones problemáticas con la herramienta de la matemática permite, además, poner en juego competencias a fin de identificar y utilizar conocimientos que rara vez se aprenden fuera de la escuela. Este tipo de encuentros pretende combinar los conocimientos de la disciplina con la búsqueda de soluciones a problemas cotidianos, que individual y colectivamente ponen a prueba el “saber hacer” matemático (Klimovsky, 2000). Además, consideramos necesario precisar el concepto de “problema” el cual no es considerado como un simple enunciado que conlleve la aplicación de un conocimiento particular sino como una situación que ponga a prueba los conocimientos que el alumno posee y los que aún se mantienen inestables o insuficientes, y del que no se vislumbra un camino directo o inmediato para hallar su solución (González, 1998). Para resolver un problema es necesario que el alumno anticipe, formule hipótesis, se anime a realizar intentos, aunque resulten erróneos, afirme y se contradiga, revise sus procedimientos y ponga a prueba su constancia en busca del objetivo (Rodríguez, 2012).

Creemos que la ciencia matemática es un quehacer posible para todos los estudiantes. Es por ello que a la hora de seleccionar los problemas nos planteamos analizar que el grado de accesibilidad de su resolución esté acorde al nivel y los contenidos curriculares que se manejan en las escuelas de nuestra región. Reparamos también en base a cómo se fueron resolviendo en las ediciones anteriores, recreando y reformulando los enunciados de los problemas, incorporando contextos de temas de actualidad.

En el proyecto además se han incorporado en los últimos años charlas-taller de capacitación en el área de matemática destinadas a docentes y estudiantes avanzados del profesorado y que fueron realizadas en el colegio sede del proyecto. En el año 2023 las charlas-taller estuvieron a cargo de la Lic. María José Presa (CIE de Tres de Febrero) y del Dr. Omar Malet (Universidad Nacional de Tres de Febrero): “Un hacer desde el saber y un saber desde el hacer”. En el año 2024 las charlas-taller estuvieron a cargo de los profesores Dr. Agustín Álvarez y Dr. Roberto Ben (Universidad Nacional de General Sarmiento): “Acercamiento al disfrute del razonamiento matemático a través de la resolución de problemas” y nuevamente del Dr. Omar Malet (Universidad Nacional de Tres de Febrero) “Evaluar matemática: sinsabores, sabores y saberes”. A las

charlas asistieron un total de ochenta participantes, entre docentes de escuelas de la región y estudiantes del profesorado Madre María Luisa Clarac de Laferrere y del ISDF Nº 45 Julio Cortázar de Haedo.

Finalmente, el proyecto se sostiene año a año por la continua y creciente participación de las escuelas, docentes y estudiantes interesados en este espacio. Se financia con una suma monetaria por inscripción de cada escuela necesaria para solventar gastos de librería, merienda para los participantes, trofeos y obsequios para docentes y estudiantes.

Trabajo en conjunto con Este trabajo se presentará en conjunto con NUÑEZ, PABLO (Colegio Emaus, Argentina). pblnz7@gmail.com.

Referencias

- [1] González, F. (1998). Metacognición y Tareas Intelectualmente Exigentes: El caso de la Resolución de Problemas Matemáticos. *Zetetiké* 6 (9), 59–87.
- [2] Klimovsky (2000). Las ciencias formales y el método axiomático. AZ. Bs. As.
- [3] Rodriguez, M. et al. (2012). Educación Matemática. UNGS. Los Polvorines. Bs. As.

JORNADAS ADA LOVELACE: LA EXPERIENCIA EN TANDIL

María Laura Maestri

Instituto Multidisciplinario sobre Ecosistemas y Desarrollo Sustentable - Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Argentina
marialauramaestri@gmail.com

En el marco de los festejos mundiales del Día de Ada Lovelace [1], un grupo de científicas argentinas impulsó en 2022 una jornada STEM (acrónimo en inglés que se traduce como Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemática) que, desde entonces, se celebra simultáneamente en distintas localidades. Durante un día, se celebran los logros de aquella pionera de la programación, con talleres diseñados especialmente para niñas de entre 10 y 12 años. A lo largo de la jornada, las participantes tienen la oportunidad de resolver problemas, desarrollar habilidades y conocer más sobre el impacto de las mujeres en la ciencia. Año a año el número de sedes participantes se ha ido incrementando, en 2025 participarán 85 ciudades de 10 países de Latinoamérica.

Las actividades que se desarrollan durante las jornadas están profundamente vinculadas con las áreas STEM y tienen una fuerte impronta lúdica, dinámica e interactiva, que permite a las niñas aprender de manera divertida y significativa. Además, se realizan intercambios virtuales entre las sedes participantes a través de transmisiones en vivo, fomentando la colaboración y el aprendizaje compartido. La problemática que motivó la creación de estas jornadas es que el interés por las ciencias en niñas y adolescentes disminuye conforme crecen en edad, por lo cual es importante proponer actividades durante la infancia y la preadolescencia que sirvan como incentivo a las vocaciones científicas. [2] Se cree que uno de los factores que influyen en esta merma es la falta de visibilidad de las mujeres que se han abocado a este campo del conocimiento [3].

En este trabajo se presentan los resultados de las Jornadas Ada Lovelace desarrolladas en la ciudad de Tandil, durante las últimas tres ediciones (2023–2025). La experiencia permitió generar lazos dentro y fuera del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Exactas (UNCPBA), vinculados a las prácticas de docencia, actividades de extensión y de comunicación pública de la ciencia.

Trabajo en conjunto con Mayra Garcimuño (Núcleo Consolidado de Matemática Pura y Aplicada (NUCOMPA) - Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires).

Referencias

- [1] <https://adalovelace.net.ar/>
- [2] Martín Carrasquilla, O., Santaolalla Pascual, E. y Muñoz San Roque, I. (2022). La brecha de género en la Educación STEM. *Revista De Educación*, 396. <https://doi.org/10.4438/1988-592X-RE-2022-396-533>
- [3] Morales Inga, S. y Morales Tristán, O. (2020) ¿Por qué hay pocas mujeres científicas? Una revisión de literatura sobre la brecha de género en carreras STEM. *Revista Internacional de Investigación en Comunicación aDRResearch ESIC*. Nº 22 Vol 22 Monográfico especial, marzo 2020, pp. 118–133. <https://doi.org/10.7263/adresic-022-06>

DIVULGANDO MATEMÁTICAS DESDE UN CENTRO DE INVESTIGACIÓN (ICMAT)

David Martín de Diego

ICMAT (CSIC-UAM-UC3M-UCM), España

david.martin@icmat.es

El Instituto de Ciencias Matemáticas (ICMAT) es un centro de investigación matemática situado en Madrid (España) y formado por investigadores del CSIC y tres universidades madrileñas (UAM, UC3M y UCM). Pero además de la investigación desde sus orígenes, ha pretendido ser un referente en comunicación y divulgación de la matemática. En esta conferencia pretendemos exponer algunas de las actividades que creemos que pueden ser ejemplos interesantes para otros centros. Entre ellas repasaremos algunas de las principales actividades como:

- Ciclo de conferencias “Matemáticas en la Residencia” en el que se invita. Personalidades referentes en la investigación y la divulgación de las matemáticas mundiales en uno de los centros culturales referentes de España, como es la Residencia de Estudiantes de Madrid.
- “Café y Teoremas” una sección mensual de artículos de matemáticas en el periódico de mayor tirada en España, “El País”
- “Mi científica favorita” un concurso para alumnos de primaria en el que presentan trabajos en cualquier formato sobre científicas famosas.
- “Revoluciones Matemáticas” una serie de videos de animación presentando algunos de los momentos estelares de las matemáticas.
- Visitas de centros escolares, Noche de los investigadores, estancias de varios días de estudiantes de 4º curso de educación secundaria (15 o 16 años) y jornadas con estudiantes de altas capacidades.

Trabajo en conjunto con Agata Timón Longoria (ICMAT, Spain) y Laura Moreno (ICMAT, Spain).

CÍRCULO MATEMÁTICO KIMCHE: PROMOVRIENDO LA FORMACIÓN DOCENTE Y CIUDADANA A TRAVÉS DE LA MATEMÁTICA

Carlos Martínez

Universidad de Los Lagos, Chile

carlos.martinez@ulagos.cl

Los círculos matemáticos son espacios de encuentro y aprendizaje colaborativo que surgieron a comienzos del siglo XX en Europa del Este como una estrategia para fomentar el pensamiento matemático, la creatividad y el interés por la disciplina más allá del aula formal. Inspiradas en ese espíritu, diversas experiencias en América Latina han adaptado este modelo, incorporándolo a proyectos de extensión universitaria y de vinculación con la comunidad.

En este contexto, el Círculo Matemático Kimche, con sede en la ciudad de Osorno y vinculado al Departamento de Ciencias Exactas de la Universidad de Los Lagos, representa desde hace casi una década una experiencia sostenida de divulgación, alfabetización y cultura matemática en el sur de Chile. Su labor se ha configurado como una práctica de vinculación territorial, que articula el quehacer universitario con la comunidad educativa y ciudadana a través de talleres lúdico-matemáticos, itinerancias en escuelas, participación en ferias científicas, conmemoraciones y colaboraciones con redes nacionales de divulgación.

La organización —sin fines de lucro y abierta a la participación de estudiantes, académicos, egresados y miembros de la comunidad— se orienta por valores de colaboración, inclusión, creatividad, fraternidad y compromiso con el bien común, promoviendo la matemática como una práctica cultural situada, estrechamente vinculada con el entorno físico, social y patrimonial del territorio.

Su misión es ofrecer un espacio comunitario de encuentro en torno a problemáticas lúdicas y reflexivas, donde la matemática se experimenta de manera compartida, creativa y contextualizada. A lo largo de su trayectoria, el Círculo Kimche ha consolidado un modelo de educación no formal que fortalece la alfabetización matemática regional, fomenta vocaciones científicas tempranas y contribuye a la construcción de una ciudadanía matemáticamente culta, evidenciando el potencial transformador de las iniciativas locales de extensión universitaria en la relación entre la matemática, la cultura y la comunidad en el sur de Chile.

Referencias

- [1] Auckly, D., Klein, B., Sereney, A., and Shubin, T. (Eds.). (2019). Inspiring mathematics: Lessons from the Navajo Nation Math Circles (Vol. 24). Mathematical Sciences Research Institute & American Mathematical Society. ISBN 978-1-4704-5387-9
- [2] Coskey, S., Ellis, P. and Wood, J. (2023). 5 Fabulous Activities for Your Math Circle. Delta Stream Media. ISBN 978-1-945899-08-9
- [3] DIMAT Chile. (s.f.). Red de Divulgación – Matemáticas Chile. <https://dimatchile.cl/>
- [4] Math Circles Network. (s.f.). Math Circles. <https://mathcircles.org/>

SOFISMAS Y PARADOJAS COMO HERRAMIENTAS DE DIVULGACIÓN MATEMÁTICA

Fabrizio Agustín Quinteros Wagner

Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS), Argentina

fabrizio.quinteros4@gmail.com

En esta comunicación presentamos el trayecto que recorrimos como estudiantes avanzados del Profesorado Universitario de Educación Superior (PUES) en Matemática de la Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS), en el que transformamos una experiencia de colaboración internacional en Análisis Matemático en un taller de divulgación matemática para nivel secundario.

El recorrido comenzó en el segundo semestre de 2024 como participantes del taller “International Collaboration in Mathematical Analysis”, organizado conjuntamente por Fernando López-García, de California State Polytechnic University, Pomona (CPP) y Roberto Ben (UNGS), centrado en discutir resultados de Análisis, principalmente sobre convergencia de sucesiones de funciones. En este marco, estudiantes de ambas universidades elaboramos dos pósteres presentados en la 13ra. Conferencia anual estudiantil “Research, Scholarship & Creative Activities” en Cal Poly Pomona.

A partir de allí, nos propusimos un nuevo desafío: ¿cómo tender un puente entre las nociones de límite, convergencia puntual y uniforme de sucesiones de funciones, propias del análisis avanzado, y la intuición de un estudiante de secundaria? La respuesta fue el diseño y la implementación de un taller para el evento “Día Pi en la UNGS” a comienzos de 2025, realizado con la participación de Luciana Sagari y bajo la supervisión docente de Roberto Ben.

El objetivo de esta presentación en la UMA es relatar esta experiencia didáctica y divulgativa. Mostraremos algunos sofismas, por ejemplo, la paradoja de la escalera, que ilustra una sucesión de curvas que converge puntualmente a una curva límite, pero las longitudes de arco de cada curva de la sucesión no convergen a la longitud de arco de la curva límite. Estos sofismas pueden ser una poderosa herramienta de divulgación.

A través de material didáctico —las tarjetas de trabajo que diseñamos—, actividades grupales y recursos audiovisuales, guiamos a los y las estudiantes de secundaria en la exploración de conceptos vinculados al infinito y a diferentes nociones de límite de una manera lúdica, intuitiva y dinámica.

Con esta experiencia confirmamos que es posible llevar ideas matemáticas avanzadas al aula de secundaria de una forma sencilla, didáctica y, sobre todo, que despierte la curiosidad y desafíe la intuición.

Este trabajo fue realizado por Fabrizio Agustín Quinteros Wagner y Solange del Cielo Pitronaci, estudiantes del PUES en Matemática (UNGS), con la guía y asesoramiento de Roberto Ben (UNGS).

Trabajo en conjunto con Solange del Cielo Pitronaci (Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina) y Roberto Ben (Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina).

FOTOGEBRA DISCOVERY

Karina Rizzo

Universidad Siglo 21. UTN.FRA, Argentina

karinarizzo71@gmail.com

A comienzos del año 2016 nació FotoGebra (<https://www.fotogebra.org/>), un proyecto que fusiona la fotografía, la matemática y la tecnología con el objetivo de acercar el pensamiento matemático a los estudiantes de manera creativa y significativa. FotoGebra no nació como un proyecto aislado, sino como la evolución de una práctica docente que comenzó en 1991, cuando la profesora K. Rizzo, uno de los autores de esta propuesta, comenzó a trabajar con sus estudiantes la relación entre matemática e imágenes, para fomentar el pensamiento matemático a partir de la observación del entorno. La iniciativa surgió de la necesidad de

encontrar nuevas formas de enseñar, aprender y divulgar matemáticas, partiendo de situaciones reales y promoviendo la exploración visual y la modelización matemática, en un contexto que permite establecer conexiones entre la matemática y otras áreas como el arte, la arquitectura, etc.

Durante años, esta experiencia se desarrolló dentro del aula, integrando herramientas tecnológicas a medida que evolucionaban. Finalmente, en 2016, FotoGebra trascendió al aula y se convirtió en un concurso abierto a todo público, permitiendo que estudiantes, docentes y entusiastas de la matemática y la fotografía de distintos países concursaran y compartieran sus creaciones, invitando a los participantes a capturar imágenes del entorno, formular una situación matemática basada en la imagen, estudiar dicha conjetura con el programa gratuito de Geometría Dinámica GeoGebra (<https://geogebra.org>), integrando el análisis de los aspectos matemáticos de dicha imagen con la creatividad y la observación del mundo que nos rodea.[1,2,3]

Más recientemente, el desarrollo de herramientas de razonamiento automático en GeoGebra ha dado lugar a la versión GeoGebra Discovery, disponible gratuitamente para distintos dispositivos y sistemas operativos, on y offline, accesible en <https://github.com/kovzol/geogebra/releases> Véanse las referencias [4,5,6] o el libro GeoGebra <https://www.geogebra.org/m/cwwx3ask>, para una introducción detallada a tales herramientas.

Nuestra contribución, que puede verse con detalle y múltiples imágenes en el libro GeoGebra <https://www.geogebra.org/m/fasamgae>, propone, como una herramienta tecnológica relevante para la divulgación matemática, la utilización de los comandos de razonamiento automático de GeoGebra Discovery en la formulación e interpretación de las propiedades geométricas de determinadas imágenes fotográficas captadas por los participantes en el concurso FotoGebra, o por el público en general a lo largo de un “paseo matemático”.

Argumentaremos, sobre imágenes de los edificios donde tendrá lugar el congreso UMA-RSME, que la utilización de esta tecnología de inteligencia artificial simbólica (y exacta) puede animar al usuario a plantearse la búsqueda y el descubrimiento de propiedades geométricas y a indagar en el por qué de las mismas, dado que el programa no le da argumentos intuitivos que las justifiquen, sólo respuestas. Diríamos que GeoGebra Discovery es un oráculo geométrico...por lo que no elimina, sino incrementa y motiva la construcción de conocimiento geométrico en el usuario.

Trabajo en conjunto con Tomás Recio (Universidad Antonio de Nebrija, Madrid, España).

Referencias

- [1] Rizzo, K. (2016). “Concurso Matemática, Fotografía y GeoGebra”. Congreso Latinoamericano de GeoGebra: Las TIC al servicio de la innovación educativa 2016. ITM–Campus Fraternidad. Medellín. Colombia. Del 30 de noviembre al 02 de diciembre de 2016 https://www.ugc.edu.co/sede/bogota/documentos/investigaciones/panel/geogebra_2016.pdf
- [2] Rizzo, K. (2021). FotoGebra: un recurso educativo y creativo en tiempo de pandemia, en Revista Académica, Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática (Universidad de Costa Rica). Número 20 (2021) <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/48502>
- [3] Rizzo, K. (2023). FotoGebra: Uso de Fotografías y GeoGebra para Explorar las Matemáticas. En XI Día GeoGebra Iberoamericano – GeoGebra em Aula, 27 y 28 de octubre de 2023. Organizado por el Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias y Tecnologías de la Universidad de Coimbra, Portugal. http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/11dgi/XIDGI_LivroResumos.pdf
- [4] Kovács, Z., Recio, T., and Vélez, M.P. (2022). Automated Reasoning Tools with GeoGebra: What are they? What are they good for? In Richard, P.R., Vélez, M.P., Van Vaerenbergh, S. (Eds.). Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence: How Artificial Intelligence can serve mathematical Series: Mathematics Education in the Digital Era, Springer, 2022, pp. 23-44. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0_2
- [5] Kovács, Z., Recio, T. and Vélez, M.P. (2024). On automated completion of geometry statements and proofs with GeoGebra Discovery. Annals of Mathematics and Artificial Intelligence, 2024 <https://doi.org/10.1007/s10472-024-09964-4> <https://rdcu.be/d4111>
- [6] Recio, T., van Vaerenbergh, S. y Vélez, M.P. (2020). Herramientas de Razonamiento Automático en GeoGebra: qué son y para qué sirven. Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática. Año XVI - Número 59. Agosto 2020, pp. 8–15. <https://revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/202>

CÓMO ENTRENAR A TU NEURÓN: UNA INTRODUCCIÓN INTERACTIVA AL APRENDIZAJE AUTOMÁTICO

Camila Soledad Roncoroni

Facultad de Ingeniería Química, Universidad Nacional del Litoral, Argentina
cami.roncoroni07@gmail.com

Se presentará la experiencia de creación y ejecución del taller “Cómo Entrenar a tu Neurón”, destinado en un principio a niñas de entre 10 y 12 años y luego adaptado a otros tipos de audiencia. Dicho taller tiene como objetivo que el público participante tenga un acercamiento lúdico y claro a ideas relacionadas con el aprendizaje automático, a partir de “entrenar” a Neurón, una máquina capaz de jugar al conocido juego del NIM. De esta manera, se busca desmitificar el concepto de inteligencia artificial, así como fomentar el pensamiento crítico respecto a cuestiones tales como en qué consiste la misma y si realmente se la puede considerar inteligencia.

Desarrollada por el grupo de comunicación de la ciencia ExtraPola, esta actividad forma parte de los talleres realizados en las Jornadas Ada Lovelace. En esta charla, se expondrán los desafíos encontrados durante el proceso de diseño y realización de la misma, así como las pautas didácticas que le dieron forma, buscando el equilibrio entre el rigor de los conceptos matemáticos involucrados y la jugabilidad de la propuesta. Asimismo, se reflexionará sobre el resultado general del taller y los aprendizajes obtenidos durante su desarrollo.

Trabajo en conjunto con Agustín Riveros, Itatí Zocola, Pablo Quijano, Sofía Feresin, Teo Valencia, Tomás Gerbazoni, Uma Tedesco y Valentina Correa (Universidad Nacional del Litoral, Argentina).

BURBUJUEGOS: UNA INTRODUCCIÓN LÚDICA A LA OPTIMIZACIÓN Y LAS SUPERFICIES MÍNIMAS.

Francisco Manuel Sosa

Universidad Nacional del Litoral - Facultad de Ingeniería Química, Argentina
franciscomanuelsosa584@gmail.com

Presentaremos nuestra experiencia en el diseño y ejecución de Burbujuegos, una actividad lúdico-experimental destinada originalmente a estudiantes de nivel secundario, en la que se exploran principalmente conceptos de optimización y superficies mínimas. Trabajando los mismos de forma tangible y participativa, aprovechando la cualidad de las burbujas para resolver problemas complejos de manera natural.

La actividad desarrollada por Extrapola, un grupo de divulgación científica con el que buscamos acercar las matemáticas a diversos públicos de forma creativa y accesible, fue especialmente pensada para despertar la curiosidad y fomentar el pensamiento científico en el público joven. Compartiremos los criterios utilizados para adaptar el discurso matemático a distintos contextos y detallaremos qué estrategias didácticas nos permitieron mantener el equilibrio entre juego y contenido conceptual. Finalmente, reflexionaremos sobre los aprendizajes que dejó la experiencia y las posibilidades de extenderla a nuevos formatos y públicos.

Trabajo en conjunto con Matías Nicolás Sollier, Teo Rafael Valencia y Tomás Gerbazoni (Universidad Nacional del Litoral, Argentina).

DEL EVENTO A LA ESCUELA: LA EXPERIENCIA DEL DÍA PI EN LA UNGS Y EL PROGRAMA VALICIENCIA

Marcela Patricia Villagra

Instituto de Ciencias, Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina
mvillagr@campus.ungs.edu.ar

La comunicación pública de la ciencia cumple un rol fundamental en la desmitificación y acercamiento de disciplinas como la matemática a un público más amplio. En este marco, el evento Día Pi en la Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS) se ha consolidado a lo largo de tres ediciones anuales como un espacio de interacción para la promoción de la matemática en el territorio.

La propuesta, lejos de limitarse a una jornada de celebración, logró trascender ese marco gracias a la articulación con las actividades de valijas didácticas “Valiciencia”, incluidas en el programa “Imaginario va a la Escuela” del Museo Imaginario. Esta colaboración permitió extender el alcance de las actividades más allá del evento, llevando propuestas didácticas y lúdicas a las aulas durante el resto del año. De esta manera, se

favoreció la implementación de experiencias matemáticas significativas en contextos escolares, enriqueciendo el proceso de enseñanza-aprendizaje.

En este trabajo presentaremos cómo esta colaboración ha permitido construir puentes entre la Universidad y la comunidad, generando un intercambio de saberes y una puesta en común de recursos y experiencias. Asimismo, se describirán las interacciones entre los distintos actores involucrados: docentes, investigadores y estudiantes de la UNGS, personal de divulgación del Museo Imaginario y la comunidad escolar.

En resumen, se mostrará cómo la experiencia del Día Pi en la UNGS y el programa “Valiciencia”, en su extensión y consolidación, constituyen un ejemplo de acercamiento de la matemática a la comunidad.

Trabajo en conjunto con Alberto Aguirre (Museo Interactivo Imaginario, Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina), Andrea C. Antúnez (Instituto de Ciencias, Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina), Gladys C. Antúnez (Museo Interactivo Imaginario, Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina) y Julio A. Coiro (Museo Interactivo Imaginario, Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina).

Noticiero de la Unión Matemática Argentina
<http://www.union-matematica.org.ar/noticiero/>
ISSN 1514-9595 (en línea)
Volumen 60, Número 3, 2025
✉ noticiero.editorial.uma@gmail.com

Editora en Jefe

Silvia Lassalle (Universidad de San Andrés - CONICET)

Comité Editorial

- Iván Angiono (Universidad Nacional de Córdoba - CONICET)
- Isolda Cardozo (Universidad Nacional de Rosario)
- Adrián Pastine (Universidad Nacional de San Luis - CONICET)
- Victoria Paternostro (Universidad de Buenos Aires - CONICET)