

# Noticiero de la Unión Matemática Argentina

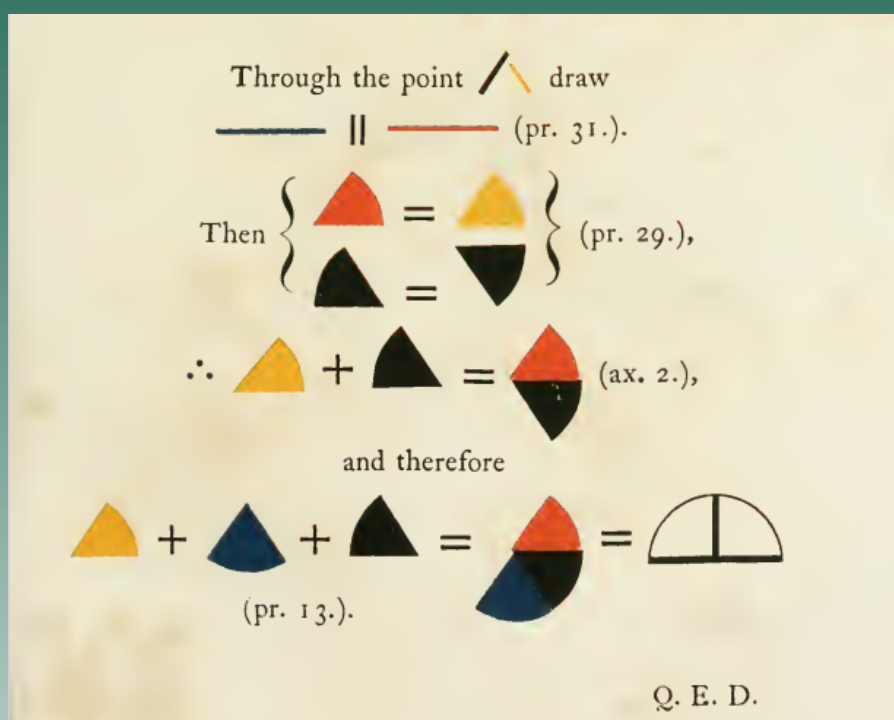


Imagen de portada: detalle de la demostración de la Proposición 32 del Libro I de Oliver Byrne (*la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos*). Extraída del artículo de Antonio Cafure incluido en este número.

# Índice general

<b>Editorial</b>	<b>3</b>
<i>por Adrián Pastine</i>	3
<b>Miradas Matemáticas</b>	<b>4</b>
La vereda de enfrente de la dominación en grafos <i>por Valeria Leoni</i>	4
Subespacios admisibles y aproximaciones de matrices <i>por Pedro Massey</i>	19
<b>Educación Matemática</b>	<b>31</b>
Acerca del sentido y las responsabilidades de los representantes nacionales ante la Comisión Internacional de Enseñanza de la Matemática <i>por Cristina Esteley</i>	31
<b>Comunicación Matemática</b>	<b>34</b>
La historia emocionante de una fórmula aburrida <i>por Teo López Puccio</i>	34
Ponete en mi lugar. Ejemplos de homogeneidad en geometría <i>por Marcos Salvai</i>	38
<b>Misceláneas</b>	<b>45</b>
El marginal <i>por Antonio Cafure</i>	45
El día que Newton se equivocó <i>por Pablo Groisman</i>	50
<b>Diálogos</b>	<b>58</b>
Entrevista a Vinton Cerf <i>por Demian Goos</i>	58

<b>Experiencias y herramientas</b>	<b>63</b>
De San Luis a Loughborough <i>por Martín De Borbón</i>	63
<b>Género UMA</b>	<b>66</b>
¿Por qué seguimos hablando de perspectiva de género? <i>por Comisión de Género</i>	66
<b>Competencia Interuniversitaria de Matemática Argentina</b>	<b>72</b>
Mates en la CIMA 2026 <i>por Martín Mereb</i>	72
<b>Distinciones y premios</b>	<b>76</b>
<b>Memoriales</b>	<b>81</b>

## Editorial

Es un placer presentarles un nuevo número del Noticiero de la Unión Matemática Argentina, iniciando su tercer año en el formato actual. Cada publicación es fruto del compromiso y del trabajo conjunto de quienes escriben artículos de investigación, de educación, de divulgación, comparten experiencias y reflexiones, y también de quienes colaboran en la revisión de los materiales. A todas y a todos queremos agradecerles especialmente su generosa dedicación.

Ese carácter colectivo cobra una relevancia aún mayor en el presente. En un contexto donde el tiempo parece cada vez más escaso y las demandas académicas, administrativas e incluso personales se multiplican, las universidades públicas y el sistema científico argentino enfrentan además incertidumbres, restricciones presupuestarias y dificultades que afectan tanto las condiciones materiales de trabajo como la planificación a mediano y largo plazo. En este escenario, sostener y cuidar los espacios de encuentro resulta especialmente importante, porque nos recuerda que no atravesamos estas dificultades en soledad, sino como parte de una comunidad presente en todo el país.

La comunidad matemática argentina tiene una larga tradición de intercambio, pertenencia y acompañamiento mutuo. Esa tradición no se expresa únicamente en congresos, proyectos o publicaciones científicas, sino también en iniciativas como este Noticiero: un lugar donde circulan ideas, noticias, discusiones, experiencias de aula e historias institucionales. Al mismo tiempo, estos espacios constituyen oportunidades para construir lazos de amistad y colaboración que exceden lo estrictamente académico.

Quizás una de las características más valiosas de esta comunidad sea su cercanía. Aun provenientes de áreas diversas y con intereses muy distintos, compartimos espacios que nos permiten encontrarnos, conocernos y acompañarnos a lo largo de nuestras trayectorias. Esa posibilidad de tender vínculos más allá de nuestras especialidades enriquece no solo nuestro trabajo académico, sino también la dimensión humana de nuestra vida universitaria y científica.

Esperamos que este nuevo número contribuya, una vez más, a ese objetivo. Que sus páginas sirvan no solo para informar y difundir, sino también para recordarnos que la matemática en Argentina se construye a partir del trabajo cotidiano, el compromiso y el aporte de muchas personas.

Gracias por ser parte.

*Adrián Pastine*

## Miradas Matemáticas

### La vereda de enfrente de la dominación en grafos

Valeria Leoni

Universidad Nacional de Rosario  
& CONICET



#### Resumen

En este breve artículo recopilamos el camino que hemos trazado desde 2010 hasta hoy, en torno al estudio de ciertas estructuras en grafos que, al igual que los conjuntos dominantes, modelan problemas de ubicación de servicios de diversa índole. A diferencia de los problemas que se modelan con conjuntos dominantes, consideramos que los sitios donde se pretende ubicar los servicios cuentan con limitaciones de capacidad, y que el desafío principal es optimizar estos espacios para ubicar la mayor cantidad posible de estos servicios.

En este resumen recordamos a quienes iniciaron esta construcción, así como los avances y las líneas actuales de investigación en relación a nuevas variantes del problema que pretenden modelar situaciones reales más complejas.

## 1. Introducción

En Matemática y Ciencias de la Computación, un grafo es un conjunto de objetos llamados vértices unidos por enlaces llamados aristas, que permiten estudiar las interrelaciones entre unidades que interactúan unas con otras. En general, un grafo se representa gráficamente como un conjunto de puntos (vértices) unidos por líneas (aristas). Un ejemplo puede verse en la Figura 2.

Para un grafo  $G$ ,  $V(G)$  es el conjunto de sus vértices y  $E(G)$  el de sus aristas. Dos vértices  $v_1$  y  $v_2$  se dicen adyacentes si  $(v_1, v_2)$  es parte de  $E(G)$ .

El tan conocido concepto de dominación en grafos fue definido por Øystein Ore en 1962, pero se asegura que ya había sido previamente introducido con un nombre diferente en 1958 por Claude Berge.

Un conjunto de vértices en un grafo es un conjunto dominante si cada vértice del grafo está en el conjunto dominante o es adyacente a algún vértice de ese conjunto.

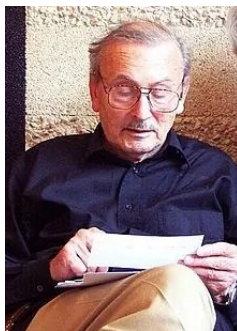


Figura 1: Claude Berge (1926-2002), el padre de la teoría de grafos.

Equivalentemente, si cada vecindad cerrada<sup>1</sup> en el grafo contiene **al menos** un vértice del conjunto dominante. En numerosos problemas reales que pueden modelarse con grafos, se busca hallar este tipo de estructuras, y entre ellas, una de mínimo tamaño. Se denomina a éste un **problema de dominación** en un grafo. La característica común de los problemas que se modelan como problemas de dominación es la necesidad de ubicar un determinado servicio en algunos de ciertos lugares preestablecidos (representados por los vértices del grafo), de modo que cada vértice reciba ese servicio —ya sea porque el servicio se ubicó en él o en un vértice adyacente— y que el número total de vértices con el servicio sea mínimo. Por ejemplo, si con un grafo modelamos las esquinas de un museo de modo que cada esquina del museo es un vértice y cada pasillo, una arista del grafo, un problema que puede mirarse como uno de dominación en ese grafo consiste en ubicar un sensor en algunas de sus esquinas de modo tal que cada esquina sea monitoreada por al menos un sensor (uno ubicado en esa esquina o alguno ubicado en esquinas adyacentes), y que en total se ubique la menor cantidad de sensores, tal vez, debido al costo que ésto acarrea.

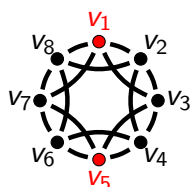


Figura 2: Un grafo con vértices  $v_1, v_2, \dots, v_8$ , y aristas  $(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_5), (v_4, v_6), (v_5, v_6), (v_5, v_7), (v_6, v_7), (v_6, v_8), (v_7, v_8), (v_7, v_1), (v_8, v_1), (v_8, v_2)$ . Los vértices en rojo forman un conjunto dominante de tamaño mínimo.

Por otro lado, la noción de empaquetamiento en grafos fue introducida por Meir y Moon en 1975. Un conjunto de vértices en un grafo es un **empaquetamiento** si sus vecindades cerradas son disjuntas de a pares. Equivalentemente, si cada vecindad cerrada del grafo contiene **como máximo** un vértice del empaquetamiento. En otros tantos problemas reales que pueden modelarse con grafos, se busca hallar este otro tipo de estructuras, y entre ellas, una de máximo tamaño. En estas situaciones, los servicios a ubicar son en general necesarios, pero posiblemente “molestos”. Por ello, interesa ubicar el máximo número de esos servicios, pero de tal manera que no haya más de uno “cerca” de cada sitio, en un escenario dado. Para citar un ejemplo concreto, pensemos ahora en el problema que puede surgir en un barrio de una ciudad que requiere la ubicación de contenedores de

<sup>1</sup>La **vecindad abierta** del vértice  $v$ ,  $N_G(v)$ , es el conjunto de vértices adyacentes a  $v$ , y la **vecindad cerrada** de  $v$ ,  $N_G[v]$ , es  $N_G(v)$  junto con  $v$  mismo.

basura. Es aconsejable que ningún vecino esté cerca de demasiados contenedores, ni éstos deberían estar demasiado cerca unos de otros. ¿Dónde deberían ubicarse los contenedores entonces? Si con un grafo modelamos las esquinas y las calles del barrio, éste es un problema que puede mirarse como una variante del de empaquetamientos en ese grafo.

La naturaleza opuesta de las restricciones —**al menos** en la definición de conjunto dominante y **como máximo** en la de empaquetamiento— permite situar los problemas planteados como problemas duales dentro de la teoría de grafos. Por esta razón, aquí nos referimos a “la vereda de la dominación” y “la vereda de enfrente”, respectivamente.

Por un lado, en la teoría de grafos el concepto de dominación tiene cerca de un centenar de variantes y generalizaciones que modelan situaciones similares a la del problema de los sensores arriba descritos (ya se han publicado más de 1200 artículos sobre dominación en grafos). De todas ellas, la generalización en la cual queremos enfocarnos aquí fue introducida por Harary y Haynes en el año 2000 [7] y es la siguiente: para un grafo  $G$  y un número entero  $k \geq 1$ , un **conjunto  $k$ -upla dominante** en un grafo  $G$  es un subconjunto  $D$  de  $V(G)$  que verifica que la vecindad cerrada de cada vértice de  $G$  tiene  $k$  vértices en común con  $D$ . En símbolos, si  $|N_G[v] \cap D| \geq k$  para todo  $v \in V(G)$ . Esta variante modela, por ejemplo, el escenario donde se requiere que cada esquina del museo sea monitoreada por, al menos, un número predefinido  $k$  de sensores. En este contexto, el problema se centra nuevamente en minimizar el cardinal del conjunto total de sensores necesarios para satisfacer dichas restricciones de cobertura.

Por otra parte, el concepto de empaquetamiento fue naturalmente generalizado por Gallant y otros autores, recién en el año 2010 [6]: para un grafo  $G$  y un entero positivo  $k$  dados, un **empaquetamiento  $k$ -limitado** en  $G$  es un subconjunto  $P$  de sus vértices que verifican que ninguna vecindad cerrada en el grafo contiene más de  $k$  vértices de  $P$ . En símbolos, si  $|N_G[v] \cap P| \leq k$  para todo  $v \in V(G)$ .

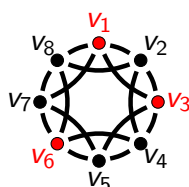


Figura 3: Mismo grafo que el de la Figura 2. Los vértices en rojo forman un empaquetamiento 2-limitado de tamaño máximo.

A diferencia de lo que venía desarrollándose en la “vereda de la dominación”, en la “vereda de enfrente” solo se había introducido hasta entonces en la literatura esta única generalización.

En 2003, Liao y Chang en [15] plantean el problema de optimización, al que denominamos MD, de hallar el menor tamaño posible de un conjunto  $k$ -upla dominante en  $G$ , para un grafo  $G$  y un número entero  $k \geq 1$  dados. Prueban que su versión como problema de decisión es NP-completo<sup>2</sup> aún en grafos con estructuras simples como son los bipartitos<sup>3</sup>

<sup>2</sup>Decimos que un problema de decisión es NP-completo si no se conoce un algoritmo que en tiempo polinomial en el tamaño de la entrada, pueda resolver cualquiera de sus instancias.

<sup>3</sup>Un grafo  $G$  es **bipartito** si  $V(G)$  puede particionarse en dos conjuntos estables (subconjunto de  $V(G)$  de vértices no adyacentes de a pares).

y también los grafos splits<sup>4</sup>. Como ocurre para todo problema NP-completo, pueden encontrarse clases particulares de grafos donde su resolución resulte “más sencilla”, y esto es lo que en general se explora. Estos mismos autores en [14], presentan algoritmos de resolución de MD de tiempo polinomial en algunas clases particulares de grafos que no detallamos aquí.

Respecto a los empaquetamientos  $k$ -limitados, no se había estudiado hasta el momento el problema de optimización asociado.

Un primer aporte personal en la vereda de enfrente de la dominación, fue formular el siguiente problema de optimización asociado a empaquetamientos  $k$ -limitados e iniciar también el estudio de su complejidad computacional:

### Problema LP [2]

Dado un grafo  $G$  y un número entero  $k \geq 1$ , hallar el tamaño máximo de un empaquetamiento  $k$ -limitado en  $G$ .

De esta manera, podemos afirmar que éste fue el comienzo de la construcción de la “vereda de enfrente”. En las siguientes secciones de este artículo recopilamos la mayoría de los resultados conseguidos desde entonces, tanto sobre LP como de nuevas variantes que fuimos introduciendo en trabajos sucesivos que pretenden modelar situaciones reales más complejas.

## 2. Empaquetamientos vs. conjuntos dominantes

Motivados por la simetría en las definiciones de los conceptos de dominación y empaquetamientos decriptos en la sección anterior, comenzamos en el año 2011 a confrontar estos problemas desde el punto de vista de sus complejidades computacionales. Esa simetría nos llevó a pensar que LP sería igualmente difícil de resolver en grafos split y en grafos bipartitos.

Hagamos una pausa para explicar brevemente algunas cuestiones que tienen que ver con el tratamiento de problemas NP-completos. Para probar que un problema  $A$  es NP-completo, lo que hacemos es mostrar que es equivalente resolver este problema a resolver alguno, digamos  $B$ , de los problemas que se conocen en la clase NP; formalmente, si existe una transformación (o procedimiento) que convierte una instancia del problema  $A$  en una instancia del problema  $B$  de manera que la respuesta a esa instancia del problema  $A$  está determinada por la respuesta del problema  $B$  en la instancia transformada. Si tenemos una transformación de  $A$  a  $B$  de tiempo polinomial y un algoritmo eficiente para resolver  $B$ , tendremos entonces un algoritmo eficiente para resolver  $A$ . Decimos entonces que el problema  $A$  se reduce al problema  $B$ . Ejemplos de problemas NP-completos son los problemas del conjunto estable<sup>5</sup> y del cubrimiento por vértices en grafos. El problema del cubrimiento por vértices de  $G$  consiste en encontrar un subconjunto de  $V(G)$  que contiene al menos un extremo de cada arista de  $E(G)$ , con tamaño mínimo.

<sup>4</sup>Un grafo  $G$  es split si  $V(G)$  puede particionarse en un clique (subconjunto de  $V(G)$  de vértices adyacentes de a pares) y un conjunto estable.

<sup>5</sup>El problema del conjunto estable consiste en encontrar un conjunto estable con tamaño máximo.

Retomando nuestro estudio, en primer lugar observamos que, para demostrar que el problema de dominación MD es NP-completo para grafos split y grafos bipartitos, en [15] se reduce, en ambos casos, el conocido problema de cubrimiento de vértices.

Con cierta desorientación en la vereda de enfrente, intentamos abordar el estudio de LP en esas mismas clases de grafos. Sin embargo, no encontramos un mismo problema que pudiera reducirse a LP en ambos casos. En primer lugar, en el caso de grafos split, logramos reducir el problema del conjunto estable en un grafo a LP en un grafo split, de la siguiente manera: a partir de un grafo  $G$  dado, con  $V(G) = \{v_j : j = 1, \dots, n\}$  y  $E(G) = \{e_l : l = 1, \dots, m\}$ , y números enteros positivos  $k$  y  $\alpha$ , construimos un grafo split  $G'$  con vértices  $E(G)$  formando una clique, más ciertos vértices adicionales formando un conjunto estable  $S = \bigcup_{j=1}^k \{v_j^i : j = 1, \dots, n\}$  y adyacencias como puede verse en la Figura 4, a modo de ejemplo. Probamos que  $G$  tiene un conjunto estable de tamaño al menos  $\alpha$  si y solo si  $G'$  tiene un empaquetamiento  $k$ -limitado de tamaño al menos  $k \cdot \alpha$ . En el ejemplo de la Figura 4,  $\{v_2, v_3\}$  es un conjunto estable en  $G$  y  $\{v_2^1, v_2^2, v_3^1, v_3^2\}$  es un empaquetamiento 2-limitado en  $G'$ . Observamos que la transformación presentada se lleva a cabo en tiempo polinomial. De esta manera queda demostrado el siguiente resultado:

**Teorema 1** ([3]). *LP es NP-completo en grafos split.*



Figura 4: Ejemplo de grafos  $G$  y  $G'$ , para  $k = 2$ , en la reducción de la prueba del Teorema 1

En segundo lugar, para grafos bipartitos, llevamos a cabo una reducción del problema MD en un grafo bipartito al problema LP en un grafo bipartito de la siguiente manera: a partir de un grafo bipartito  $G$  y números enteros positivos  $k$  y  $\alpha$ , construimos otro grafo bipartito al que llamamos  $G''$ , y probamos que  $G$  tiene un conjunto  $k$ -upla dominante de tamaño a lo sumo  $\alpha$  si y solo si  $G''$  tiene un empaquetamiento  $k$ -limitado de tamaño al menos  $|V(G'')| - \alpha$ . No mostramos aquí los detalles de la construcción del grafo  $G''$  por ser ésta un tanto técnica, pero remarcamos que la transformación diseñada puede realizarse en un tiempo polinomial. De esta manera, queda demostrado el siguiente resultado:

**Teorema 2** ([2]). *LP es NP-completo en grafos bipartitos.*

A partir de aquí, ya con algunos ladrillos firmes, continuamos la construcción de la “vereda de enfrente” de manera pausada y conscientes de que se trataría de una tarea algo más exigente.

Los resultados expuestos arriba, junto con otros que omitimos por espacio, nos llevaron naturalmente a preguntarnos si existe algún tipo de equivalencia entre los problemas MD y LP o, por el contrario, si es posible encontrar una clase de grafos en la que uno de estos problemas sea resoluble en tiempo polinomial mientras que el otro resulte NP-completo. Nos adentramos entonces en la búsqueda de reducciones de tiempo polinomial entre ambos

problemas. Esta búsqueda fue, sin duda, larga y nada sencilla. A continuación, detallamos en dos teoremas las reducciones diseñadas entre estos problemas. Con  $d_G(v)$  denotamos el grado en  $G$  del vértice  $v$ , éste es  $|N_G(v)|$ , y con  $\Delta(G)$  el grado máximo entre todos los vértices en  $G$ .

**Teorema 3** ([13]). *Dados un grafo  $G$  y números  $k$  y  $\alpha$ ,  $G$  tiene un conjunto  $k$ -upla dominante de tamaño a lo sumo  $\alpha$  si y solo si el grafo  $P(G)$  (ver su definición a continuación) tiene un empaquetamiento  $k'$ -limitado de tamaño al menos  $\alpha'$ , donde  $\alpha' := |V(P(G))| - \alpha$  y  $k' := \Delta(G) - k + 1$ .*

Una idea de la demostración del Teorema 3 es la siguiente: a partir del grafo dado  $G$ , construimos un grafo  $P(G)$  agregando para cada  $v \in V(G)$ ,  $\Delta(G) - d_G(v)$  vértices adyacentes a  $v$  que definen un conjunto estable (véase la Figura 5, donde las líneas punteadas en la imagen de la derecha indican aquellas que fueron agregadas a  $G$  para construir  $P(G)$ ). Notar que

$$|V(P(G))| = |V(G)| + \sum_{v \in V(G)} [\Delta(G) - d_G(v)] = |V(G)|[\Delta(G) + 1] - 2|E(G)|.$$

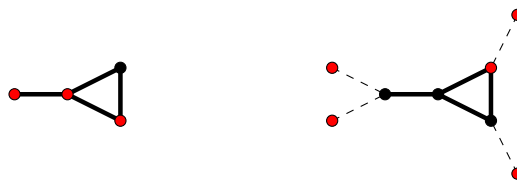


Figura 5: Ejemplo de grafos  $G$  y  $P(G)$  para  $k = 2$  del Teorema 3. En rojo, a la izquierda un conjunto 2-upla dominante  $R$  en  $G$ , y a la derecha, un empaquetamiento 2-limitado  $|V(P(G)) \setminus R|$  en  $P(G)$

A partir de esta reducción podemos desprender lo siguiente:

**Corolario 1.** *Sea  $\mathcal{G}$  una clase de grafos tal que, para un grafo  $G$  en  $\mathcal{G}$  se verifica que  $P(G)$  también está en  $\mathcal{G}$ . Entonces, si LP es resoluble en tiempo polinomial en los grafos de  $\mathcal{G}$ , MD es también resoluble en tiempo polinomial en  $\mathcal{G}$ . Además, si MD es NP-completo en  $\mathcal{G}$ , entonces LP es NP-completo en  $\mathcal{G}$ .*

En el otro sentido, podemos enunciar:

**Teorema 4** ([13]). *Dados un grafo  $G$  y números  $k$  y  $\alpha$ , sean  $k' := \Delta(G) - k + 1$  y*

$$\alpha' := |V(D(G))| - \sum_{\{v: d_G(v) \leq k-1\}} (k - d_G(v)) - \alpha.$$

*Entonces  $G$  tiene un empaquetamiento  $k$ -limitado de tamaño al menos  $\alpha$  si y solo si el grafo  $D(G)$  (ver su definición a continuación) tiene un conjunto  $k'$ -upla dominante de tamaño a lo sumo  $\alpha'$ .*

Una idea de la demostración del Teorema 4 se basa en lo siguiente: dado un grafo  $G$  y un entero positivo  $k$  con  $1 \leq k \leq \Delta(G)$ , construimos el grafo  $D(G)$  obtenido a partir de  $G$  agregando, para cada  $v \in V(G)$  con  $d_G(v) < \Delta(G)$ ,  $\Delta(G) + 1 - \min\{k, d_G(v)\}$  vértices que definen una clique  $Q_v$ , y haciendo que  $v$  sea adyacente a exactamente  $\Delta(G) - d_G(v)$  vértices de  $Q_v$  (véase la Figura 6, donde las líneas más finas en la imagen de la derecha indican aquellas que fueron agregadas a  $G$  para definir  $D(G)$ ). Es fácil notar que

$$|V(D(G))| = |V(G)| + \sum_{\{v: d_G(v) < \Delta(G)\}} [\Delta(G) + 1 - \min\{k, d_G(v)\}].$$

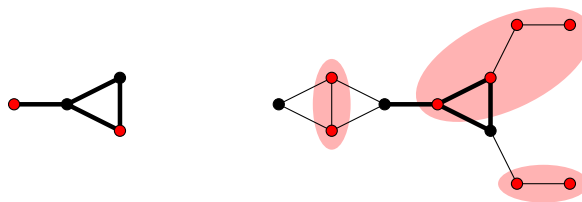


Figura 6: Grafos  $G$  y  $D(G)$  para  $k = 3$  del Teorema 4. En rojo, a la izquierda un empaquetamiento 2-limitado  $R$  en  $G$ , y a la derecha, un conjunto 2-upla dominante en  $D(G)$

A partir de esta reducción podemos desprender lo siguiente:

**Corolario 2.** *Sea  $\mathcal{G}$  una clase de grafos tal que, para un grafo  $G$  en  $\mathcal{G}$  se verifica que  $D(G)$  también está en  $\mathcal{G}$ . Entonces, si MD es resoluble en tiempo polinomial en  $\mathcal{G}$ , LP también es resoluble en tiempo polinomial en  $\mathcal{G}$ . Además, si LP es NP-completo en  $\mathcal{G}$ , entonces MD es NP-completo en  $\mathcal{G}$ .*

La clase de grafos fuertemente cordales (una superclase de los árboles, donde un grafo árbol es un grafo en el que cualquier par de vértices están conectados por exactamente un camino) verifica la hipótesis del Corolario 2. Si tenemos en cuenta el algoritmo de tiempo lineal proporcionado en [15] para resolver MD en grafos fuertemente cordales, el Teorema 4 nos permite afirmar que existe un algoritmo de tiempo cuadrático para resolver PL en esa clase de grafos.

En este punto, podemos afirmar que los problemas MD y LP poseen definiciones estrechamente relacionadas y presentan la misma complejidad computacional en diversas clases de grafos. Una tal clase es la de los grafos regulares<sup>6</sup>, y otras clases —cuyas definiciones resultaron un tanto técnicas— verifican también simultáneamente las hipótesis de los Corolarios 1 y 2.

### 3. Modelando problemas más generales con empaquetamientos

En esta sección, en subsecciones contiguas, introducimos distintas generalizaciones y variantes del problema de empaquetamientos LP, que abarcan diversas situaciones de mayor generalidad. En particular, nos interesa estudiar si la complejidad de resolución de cada variante introducida es o no superior, en comparación con LP. Para establecer

<sup>6</sup>Un grafo es regular si todos sus vértices tienen el mismo grado.

una jerarquía de complejidad formal, sabemos que se requiere una reducción polinomial entre cada una de ellas y LP. En este sentido, demostramos que ninguna de las variantes planteadas posee una complejidad superior a la de LP.

## Empaquetamientos generalizados

En sus primeros pasos, Liao y Chang en [14] diseñan un algoritmo que halla, en tiempo polinomial, conjuntos  $k$ -uplas dominantes en grafos árboles. Este algoritmo se basa en un método de etiquetado, del cual no presentamos aquí los detalles debido a que requiere la introducción de bastante notación específica.

En primer lugar, ese método de etiquetado nos inspiró de manera natural a introducir una versión generalizada del concepto de  $k$ -upla dominante que contempla la posibilidad de que algunos de los servicios a ubicar deban pertenecer necesariamente al conjunto dominante buscado, así como también que los requerimientos en cada vecindad cerrada no sean uniformes. Formalmente: dados un grafo  $G$ , un vector  $\mathbf{r} = (r_v) \in \mathbb{Z}^{V(G)}$  (que representa los requerimientos) y un subconjunto de vértices  $\mathcal{R}$  (que representa los vértices que tienen que estar necesariamente entre los elegidos), un subconjunto  $D$  de  $V(G)$  es un conjunto  $(\mathbf{r}, \mathcal{R})$ -dominante en  $G$  si  $\mathcal{R} \subseteq D$  y  $|N_G[v] \cap D| \geq r_v$ , para todo  $v \in V(G)$ .

En segundo lugar, nos propusimos investigar desde la perspectiva de los empaquetamientos, si una versión simétrica de esta generalización de conjuntos dominantes resulta conceptualmente adecuada. Como consecuencia, fue natural introducir una versión generalizada del concepto de empaquetamientos  $k$ -limitados de la siguiente manera:

**Definición 1** ([2]). Para un grafo  $G$ , un vector  $\mathbf{c} = (c_v) \in \mathbb{Z}^{V(G)}$  y  $\mathcal{A} \subseteq V(G)$ , decimos que  $B \subseteq V(G)$  es un empaquetamiento  $(\mathbf{c}, \mathcal{A})$ -limitado en  $G$  si  $B \subseteq \mathcal{A}$  y  $|N_G[v] \cap B| \leq c_v$ , para cada  $v \in V(G)$ .

Esta definición contempla situaciones en las que ciertos vértices **no pueden** ser seleccionados para ubicar servicios (aquellos que no están en  $\mathcal{A}$ ), como así también la posibilidad de que las restricciones de capacidad en las vecindades cerradas **no sean uniformes** (dadas por el vector  $\mathbf{c} = (c_v) \in \mathbb{Z}^{V(G)}$ ).

No fue difícil demostrar que, para un grafo  $G$ , un vector  $\mathbf{c} = (c_v) \in \mathbb{Z}^{V(G)}$  y  $\mathcal{A} \subseteq V(G)$ ,  $B \subseteq \mathcal{A}$  es un empaquetamiento  $(\mathbf{c}, \mathcal{A})$ -limitado en  $G$  si y solo si  $V(G) \setminus B$  es un conjunto  $(\mathbf{r}, V(G) \setminus \mathcal{A})$ -dominante en  $G$ , donde  $r_v = \max\{0, d_G(v) + 1 - c_v\}$ .

Definimos también de manera natural el siguiente problema de optimización:

### Problema LP [2]

Dados un grafo  $G$ , un vector  $\mathbf{c} = (c_v) \in \mathbb{Z}^{V(G)}$  y un conjunto  $\mathcal{A} \subseteq V(G)$ , hallar el tamaño máximo de un empaquetamiento  $(\mathbf{c}, \mathcal{A})$ -limitado de  $G$ .

Obsérvese que resolver LP dada para un grafo  $G$  y un número  $k$ , es equivalente a resolver GLP para  $G$ , el conjunto  $\mathcal{A} = V(G)$  y el vector  $\mathbf{c} = (c_v)$ , donde  $c_v = k$  para cada  $v \in V(G)$ . Entonces, la NP-completitud de LP para una clase de grafos implica la NP-completitud de GLP para la misma clase de grafos.

Por otra parte, diseñamos una reducción en tiempo polinomial de GLP a LP. Esto lo formaliza el siguiente teorema, aunque no detallamos la definición de la transformación  $P_{c,k}$  por ser ésta un tanto técnica:

**Teorema 5** ([13]). Sean un grafo  $G$ , un vector  $\mathbf{c}$ ,  $\mathcal{A} \subseteq V(G)$ ,  $k := \max\{c_v : v \in V(G)\}$  y  $G'' = P_{\mathbf{c},k}(G)$ . Entonces  $G$  tiene un empaquetamiento  $(\mathbf{c}, \mathcal{A})$ -limitado de tamaño al menos  $\alpha$  si y solo si  $G''$  tiene un empaquetamiento  $k$ -limitado de tamaño al menos  $\alpha + \sum_{v \in V(G)} (k - c_v)$ .

Parafraseando, podemos afirmar que este nuevo “ladrillo” (GLP) que hemos agregado en la vereda de enfrente no es “más duro” que el existente (LP).

### Funciones de empaquetamiento

En vista de otras aplicaciones aún no contempladas por las nociones introducidas hasta el momento, comenzamos a analizar aquellas en las que se requiere ubicar más de un servicio en algunos o en todos los lugares preestablecidos, con el objetivo de maximizar la cantidad total de servicios, respetando nuevamente las restricciones impuestas por las vecindades asociadas a cada lugar.

Si bien los empaquetamientos  $k$ -limitados fueron definidos como subconjuntos de vértices del grafo que modela la situación, es claro que podemos interpretarlos como funciones  $\{0, 1\}$ -valuadas (que asignan 0 a un vértice que no está en el empaquetamiento, y 1 a un vértice que si lo está). Si extendemos entonces estas funciones a funciones valuadas en los números enteros no negativos, podremos modelar este nuevo tipo de situaciones en las que estamos ahora interesados. Formalmente, introducimos el concepto de función de  $\{k\}$ -empaquetamiento de un grafo  $G$  para un entero positivo fijo  $k$  de la siguiente manera, donde  $f(S) = \sum_{v \in S} f(v)$  denota el **peso** de  $S$ , para  $S \subseteq V(G)$ .

**Definición 2** ([9]). Dado un grafo  $G$  y un entero positivo  $k$ , una **función de  $\{k\}$ -empaquetamiento** de  $G$  es una función  $f : V(G) \rightarrow \mathbb{Z}_+^0$ , tal que para todo  $v \in V(G)$ ,

$$f(N_G[v]) \leq k.$$

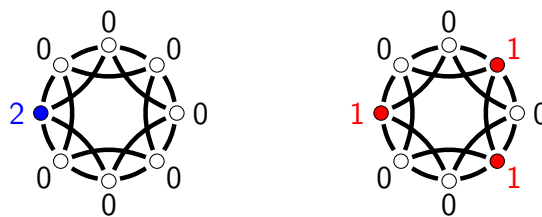


Figura 7: Dos funciones de  $\{2\}$ -empaquetamiento del mismo grafo.

Denotamos con  $L_{\{k\}}(G)$ , al máximo peso posible de  $V(G)$  entre todas las funciones de  $\{k\}$ -empaquetamiento de  $G$ .

Dado que cualquier empaquetamiento  $k$ -limitado en  $G$  puede ser visto como una función de  $\{k\}$ -empaquetamiento de  $G$ , es claro que  $L_{\{k\}}(G)$  es al menos tan grande como el mayor tamaño de un empaquetamiento  $k$ -limitado en  $G$ , si bien pueden ser distintos como lo muestra el ejemplo de la Figura 8:

Introducimos el siguiente problema de optimización asociado a funciones de  $\{k\}$ -empaquetamiento:



Figura 8: A la izquierda, un empaquetamiento 3-limitado de tamaño máximo, y a la derecha, en el mismo grafo  $G$  se observa que  $L_{\{3\}}(G) = 6$

### Problema $\{k\}$ PF, $k$ fijo

Para un grafo  $G$ , hallar el peso máximo de una función de  $\{k\}$ -empaquetamiento de  $G$ .

Este nuevo problema podría ser más difícil o no de resolver que LP para cada  $k$  fijo, desde el punto de vista de su complejidad computacional. Sabemos que, para establecer una jerarquía de complejidad formal, se requiere una reducción polinomial entre ambos problemas. El siguiente teorema muestra que  $\{k\}$ PF para  $k$  fijo puede reducirse linealmente a LP. Para enunciarlo, recordamos la siguiente operación entre grafos.

Dados dos grafos  $G_1$  y  $G_2$ , el **producto fuerte**  $G_1 \otimes G_2$  entre  $G_1$  y  $G_2$  es el grafo cuyo conjunto de vértices es el producto cartesiano entre  $V(G_1)$  y  $V(G_2)$ , y donde dos vértices  $u_1v_1$  y  $u_2v_2$  son adyacentes si y sólo si  $u_1 = u_2$  y  $(v_1, v_2) \in E(G_2)$ , o si  $v_1 = v_2$  y  $(u_1, u_2) \in E(G_1)$ , o si  $(v_1, v_2) \in E(G_2)$  y  $(u_1, u_2) \in E(G_1)$ .

**Teorema 6** ([9]). *Para cada  $k$  fijo, y siendo  $K_k$  el grafo completo de  $k$  vértices, vale que:*

$$L_{\{k\}}(G) = L_{\{k\}}(G \otimes K_k).$$

Parafraseando nuevamente, podemos decir que este otro ladrillo ( $\{k\}$ PF) que hemos agregado a nuestra construcción de la vereda de enfrente no es “más duro” que el ladrillo inicial (LP).

Pero la pregunta que surge es: ¿será  $\{k\}$ PF NP-completo?

Nos propusimos entonces estudiar la complejidad de  $\{k\}$ PF. Para ello, logramos reducir en tiempo polinomial el conocido problema NP-completo (Karp, 1972) de empaquetamiento de conjuntos<sup>7</sup>.

La reducción llevada a cabo se basa en la siguiente construcción (ver Figura 9). Para un conjunto no vacío  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  y una familia  $S = \{S_1, \dots, S_m\}$  de subconjuntos de  $X$ , construimos un grafo  $G$  de la siguiente manera: para cada  $S_j \in S$ , creamos un subgrafo  $G_j$  de  $G$  que consta de  $k$  caminos de tres vértices  $a_{j,r}, b_{j,r}, c_{j,r}$ , y un vértice  $d_j$ , y tal que  $N_G(b_{j,r}) = \{a_{j,r}, c_{j,r}\}$ , para cada  $r = 1, \dots, k$ . Además, el vértice  $d_j$  es adyacente a cada uno de los vértices  $a_{j,1}, \dots, a_{j,k}$ . Para cada elemento  $x_i \in X$  existe un vértice  $v_i$  en  $G$  que es adyacente a  $c_{j,1}, \dots, c_{j,k}$  si y solo si  $x_i \in S_j$ . Además, existe un vértice  $v$  adyacente a cada  $v_i$  y un vértice  $w$  de grado uno adyacente a  $v$ . La transformación se completa tomando  $\alpha = k^2|S| + k + q$ . Bajo esta transformación, podemos demostrar que existe una función de  $\{k\}$ -empaquetamiento de  $G$  con peso  $\alpha$  o mayor si y solamente si existe un empaquetamiento de conjuntos de  $X$  de tamaño  $q$  o mayor.

Entonces, podemos enunciar:

<sup>7</sup>Dado un conjunto no vacío  $X$  y una familia  $S$  de subconjuntos de  $X$ , un empaquetamiento de conjuntos de  $X$  es una subfamilia  $T$  de  $S$  tal que todos los miembros de  $T$  son disjuntos de a pares. El problema de empaquetamiento de conjuntos consiste en hallar un empaquetamiento de conjuntos de  $X$  de máximo tamaño.

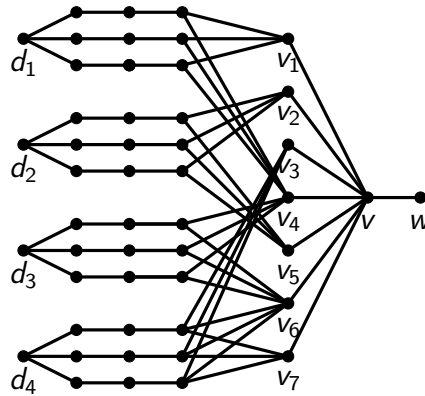


Figura 9: Transformación para  $X = \{x_1, \dots, x_7\}$ ,  $S_1 = \{x_1, x_4\}$ ,  $S_2 = \{x_2, x_5\}$ ,  $S_3 = \{x_4, x_6\}$ ,  $S_4 = \{x_3, x_6, x_7\}$  y  $k = 3$

**Teorema 7 ([8]).**  $\{k\}$ PF es NP-completo para todo número entero  $k \geq 1$  fijo.

También demostramos que  $\{k\}$ PF es NP-completo incluso en grafos split. Esto pudo llevarse a cabo reduciendo el problema  $\{k\}$ PF en un grafo general al propio  $\{k\}$ PF en un grafo split. No mostramos aquí esa reducción para no hacer tan extenso este artículo.

## Funciones de empaquetamiento con etiquetas

Los conceptos presentados en las Secciones 3 y 3 son variantes de la noción de empaquetamiento clásico en distintos aspectos, los cuales no están relacionados entre sí.

Surgió la inquietud de encontrar una manera de unificar todos estos conceptos. Introducimos entonces la siguiente noción que cumple este objetivo:

**Definición 3 ([10]).** Dado un grafo  $G$  y una función de etiquetado  $L$  sobre  $V(G)$ , esto es  $L(v) = (t(v); k(v))$  definida en  $V(G)$ , donde  $t(v) \in \{0, \dots, t\} \cup \{A\}$  ( $t$  es un número entero no negativo), una función de  **$L$ -empaquetamiento** de  $G$  es una función  $f : V(G) \rightarrow \{0, \dots, t\}$  que satisface las dos condiciones siguientes:

1. si  $t(v) \neq A$  entonces  $f(v) = t(v)$ ;
2. para todo  $v \in V(G)$ ,  $f(N_G[v]) \leq k(v)$ .

Es fácil observar que la versión unificada que muestra la Definición 3 generaliza a todas las variantes de empaquetamientos presentadas hasta aquí:

1. Cuando  $t = 1$  y  $L(v) = (A; k)$  para cada  $v \in V(G)$ , si  $f$  es una función de  $L$ -empaquetamiento de  $G$ , entonces  $\{v \in V(G) : f(v) = 1\}$  es un empaquetamiento  $k$ -limitado de  $G$  y recíprocamente, si  $B \subseteq V(G)$  es un empaquetamiento  $k$ -limitado de  $G$ , entonces la función  $f$  definida sobre  $V(G)$  como  $f(v) = 1$  para  $v \in B$  y  $f(v) = 0$  en caso contrario, es una función de  $L$ -empaquetamiento de  $G$ .
2. Cuando  $t = 1$  y  $t(v) \neq 1$  para cada  $v \in V(G)$ , si  $f$  es una función de  $L$ -empaquetamiento de  $G$ , entonces  $\{v \in V(G) : f(v) = 1\}$  es un empaquetamiento  $(k, A)$ -limitado de  $G$  para  $A = \{v \in V(G) : t(v) = A\}$ , y viceversa.
3. Cuando  $t = k$  y  $L(v) = (A; k)$  para cada  $v \in V(G)$ , si  $f$  es una función de  $L$ -empaquetamiento de  $G$ , entonces  $f$  es una función de  $\{k\}$ -empaquetamiento de  $G$ , y viceversa.

Formulamos también el problema de optimización asociado a funciones de  $L$ -empaquetamiento:

### Problema $LPF$

Para un grafo  $G$  y una función de etiquetado  $L$  sobre  $V(G)$ , hallar el peso máximo de una función de  $L$ -empaquetamiento de  $G$ .

Se puede demostrar que los problemas  $GLP$  y  $\{k\}PF$  introducidos en las Secciones 3 y 3 respectivamente, son tan difíciles de resolver, desde el punto de vista de sus complejidades computacionales, como este problema general  $LPF$ . No mostramos aquí los detalles de las reducciones realizadas para tal fin, para no hacer tan extenso este artículo. Parafraseando una vez más, podemos decir que todos los ladrillos agregados en nuestra construcción no fueron “más duros” que el inicial.

Ya casi llegando al fin del recorrido de nuestra construcción de la “vereda de los empaquetamientos”, no podemos dejar de mencionar y de agradecer, el aporte en este sentido realizado recientemente por otros autores en [11]). En ese trabajo se presenta una versión que generaliza aún más a esta última versión  $LPF$ , y por ende, a todas las nociones de empaquetamiento definidas hasta el momento y resumidas aquí en las secciones anteriores. Ésta es la siguiente:

Dados un grafo  $G$ , un vector de capacidades  $\mathbf{k} = (k_v) \in \mathbb{Z}^{V(G)}$  y dos vectores  $\mathbf{u} = (u_v) \in \mathbb{Z}^{V(G)}$  y  $\mathbf{l} = (l_v) \in \mathbb{Z}^{V(G)}$ , una función  $f : V \rightarrow \mathbb{Z}_0^+$  es una **función de  $(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{u})$ -empaquetamiento** en  $G$  si  $l_v \leq f(v) \leq u_v$  y  $f(N_G[v]) \leq k_v$ , para cada  $v \in V(G)$  [11].

## Funciones flexibles de empaquetamiento: en desarrollo

Recientemente, una de las últimas variantes introducidas en la vereda de la dominación, nació simplemente flexibilizando las restricciones de requerimientos a las vecindades de algunos vértices. Más precisamente, en esta variante las restricciones de dominancia son pedidas solo a aquellos vértices en los que no se ubica algún servicio. Formalmente, para un entero positivo  $k$ , se define una **función  $\{k\}$ -romana dominante** en un grafo  $G$  como una función  $f$  que satisface  $f(N_G[v]) \geq k$  para cada  $v \in V$  con  $f(v) = 0$  [16]. Para  $k = 2$ , los autores manifiestan que esta definición está basada en la estrategia de defensa planteada por el Emperador Constantino el Grande para proteger el Imperio Romano. En el modelo matemático presentado para esta situación, cada vértice del grafo corresponde a una localidad en el Imperio Romano, y existe una arista entre dos localidades cuando una legión puede desplazarse de alguna manera entre ambas, y pueden ubicarse a lo sumo dos legiones por localidad. Se considera que una ubicación sin ejércitos está protegida si tiene una localidad vecina con dos legiones en servicio, o al menos dos localidades vecinas con una legión en servicio.

Debido a su reciente definición, pocos resultados pueden encontrarse en la literatura sobre esta nueva variante “romana” de conjuntos dominantes.

Nos propusimos una vez más investigar, desde la perspectiva de los empaquetamientos, si una versión simétrica a esta variante romana de conjuntos dominantes resulta conceptualmente adecuada. En el caso de empaquetamientos, esta idea de “flexibilizar” restricciones — de capacidad en este caso— correspondería a pensar en situaciones en las que no sea necesario solicitar la restricción a los vértices en los que no se ubican servicios. Dicho de manera similar, correspondería a pedirle la restricción de capacidad solo a las vecindades de los vértices en los que se ha ubicado un servicio.

Una situación real que requiere de un tal planteo podría ser por ejemplo la situación que surge en la gestión de interferencias en redes inalámbricas, donde en el diseño de tales redes, los nodos activos no deben tener demasiados vecinos transmitiendo simultáneamente para evitar colisiones de paquetes. Los empaquetamientos clásicos imponen esta restricción a **todos** los nodos, sin embargo, si se permite la existencia de nodos receptores pasivos o en modo de suspensión (vértices  $v$  con  $f(v) = 0$ ), al estar inactivos, estos nodos no sufren interferencias, lo que permite a sus vecinos activos transmitir a mayor densidad, aumentando así el rendimiento total del sistema.

De este modo, introducimos la siguiente variante de empaquetamientos:

**Definición 4.** *Dado un grafo  $G$  y un entero no negativo  $k$ , una función  $f : V \rightarrow \{0, 1\}$  es una función flexible de  $k$ -empaquetamiento en  $G$  si ocurre que:*

$$f(N_G[v]) \leq k \text{ para cada } v \in V \text{ con } f(v) = 1.$$

La flexibilización de algunas restricciones podría sugerir inicialmente una complejidad inferior a la de LP. No obstante, y a diferencia de las variantes de empaquetamientos analizadas, en este caso no ha sido posible demostrar que esta versión “flexibilizada” posea una complejidad menor o igual a la del problema original. Sin embargo, demostramos que estas funciones flexibles de empaquetamiento se corresponden a estructuras conocidas con otros nombres en la literatura. Específicamente, una función flexible de 1-empaquetamiento equivale a un conjunto estable en el grafo. Además, y bajo esta analogía, podemos afirmar que, para un entero positivo  $k$  cualquiera, una función flexible de  $k$ -empaquetamiento es un conjunto  $(k - 1)$ -dependiente<sup>8</sup> en el grafo. Esto permite establecer la complejidad computacional del modelo propuesto. Específicamente la NP-completitud del problema orientado a hallar una función flexible de  $k$ -empaquetamiento de mínimo peso se deriva directamente de la complejidad de los problemas asociados a conjuntos  $r$ -dependientes en grafos, los cuales pertenecen a la clase NP-completo[1].

## 4. Nuevos desafíos

Tras quince años dedicados a la construcción de la “vereda de enfrente” de la dominación en grafos, el aporte realizado en [11] y detallado al final de la Sección 3 establece las condiciones de mayor generalidad, dejando abierta la exploración de nuevas extensiones y/o variantes. Consideramos interesante abordar ahora el estudio de su correspondiente variante “flexibilizada”, basándonos en las ideas expuestas en la Sección 3. Nos encontramos actualmente iniciando el estudio de una tal variante, la cual toma la forma:

**Definición 5.** *Dado un grafo  $G$  y un vector entero de capacidades  $\mathbf{k} = (k_v) \in \mathbb{Z}^{V(G)}$  y dos vectores enteros  $\mathbf{u} = (u_v) \in \mathbb{Z}^{V(G)}$  y  $\mathbf{l} = (l_v) \in \mathbb{Z}^{V(G)}$ , una función  $f : V \rightarrow \mathbb{Z}_0^+$  es una función flexible de  $(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{u})$ -empaquetamiento de  $G$  si ocurre que:*

1. para todo  $v \in V(G)$ ,  $l_v \leq f(v) \leq u_v$ , y
2. para  $v \in V(G)$  con  $f(v) = u_v$ ,  $f(N_G[v]) \leq k_v$ .

A modo de cierre, retomamos el enfoque que ha servido de motivación fundamental desde el inicio, que es el recorrido de la vereda de la dominación. Como contribución final,

<sup>8</sup>Un conjunto  $r$ -dependiente en un grafo es un subconjunto de vértices que induce un subgrafo con grado máximo  $r$ , con  $r \geq 0$  [1]. Notar que un conjunto 0-dependiente equivale a un conjunto estable.

queremos proponer el estudio de estructuras simétricas a las descritas en la Definición 5, las cuales extienden su aplicación al área específica de la dominación romana. Introducimos entonces:

**Definición 6.** *Dado un grafo  $G$ , un vector entero de requerimientos  $\mathbf{k} = (k_v) \in \mathbb{Z}^{V(G)}$  y dos vectores enteros  $\mathbf{u} = (u_v) \in \mathbb{Z}^{V(G)}$  y  $\mathbf{l} = (l_v) \in \mathbb{Z}^{V(G)}$ , una función  $f : V \rightarrow \mathbb{Z}_0^+$  es una función romana generalizada de  $(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{u})$ -dominación de  $G$  si ocurre que:*

1. para todo  $v \in V$ ,  $l_v \leq f(v) \leq u_v$ , y
2. para  $v \in V(G)$  con  $f(v) = l_v$ ,  $f(N[v]) \geq k_v$ .

Esta última definición generaliza a todas las versiones de dominaciones romanas que están siendo tan estudiadas en trabajos recientes y actuales ([16], [4], [12] y [5], entre otros) y abre otra línea de estudio en este sentido.

## Referencias

- [1] Dessmark, A., J. K. L. A. (1993). The maximum  $k$ -dependent and  $f$ -dependent set problem. Algorithms and Computation. ISAAC 1993. Lecture Notes in Computer Science, vol 762. Springer, Berlin, Heidelberg.
- [2] Dobson, M., Leoni, V., and Nasini, G. (2010). The  $k$ -limited packing and  $k$ -tuple domination problems in strongly chordal,  $p_4$ -tidy and split graphs. Electronic Notes in Discrete Mathematics, pages 559—566.
- [3] Dobson, M., Leoni, V., and Nasini, G. (2011). The multiple domination and limited packing problems in graphs. Int. Procc. Lett., pages 1108—1113.
- [4] Fernández, L. and Leoni, V. (2023). New complexity results on roman  $\{2\}$ -domination in graphs. RAIRO Oper. Res., 57:1905–1912.
- [5] Ferrari, A. J., Leoni, V., and Pujato, M. I. L. (2025). Characterizations of Italian graphs and Sicilian graphs. RAIRO Oper. Res., 59(1):239–249.
- [6] Gallant, R., Gunther, G., Hartnell, B., and Rall, D. (2010). Limited packings in graphs. Discrete Applied Mathematics, 158(12):1357–1364.
- [7] Harary, F. and Haynes, T. (2000). Double domination in graphs. Ars Combinatoria, 55:201–213.
- [8] Hinrichsen, E., Dobson, M., and Leoni, V. (2017). On the complexity of the  $\{k\}$ -packing function problem. International Transactions in Operational Research, 24:347–354.
- [9] Hinrichsen, E. and Leoni, V. (2014).  $\{k\}$ -packing functions of graphs. LNCS, 8596:325–335.
- [10] Hinrichsen, E., Leoni, V., and Safe, M. (2020). Labelled packing functions in graphs. Int. Procc. Lett.

- [11] Hinrichsen, E., Nasini, G., and Vansteenkiste, N. (2023). On general packing functions in graphs. Procedia Computer Science, 223:367–369.
- [12] Kim, K. (2024). Italian, 2-rainbow and Roman domination numbers in middle graphs. RAIRO Oper. Res., 58(2):2045–2053.
- [13] Leoni, V. and Nasini, G. (2014). Limited packing and multiple domination problems: Polynomial time reductions. Discrete Applied Mathematics, pages 547—553.
- [14] Liao, C. and Chang, G. (2002). Algorithmic aspect of  $k$ -tuple domination in graphs. Taiwanese Journal of Mathematics, page 415–420.
- [15] Liao, C. and Chang, G. (2003).  $k$ -tuple domination in graphs. Inform. Process. Lett., 87:45–50.
- [16] Wang, C.-X., Yang, Y., Wang, H.-J., and Xu, S.-J. (2021). Roman  $\{k\}$ -domination in trees and complexity results for some classes of graphs. Journal of Combinatorial Optimization, 42:174–186.

## Miradas Matemáticas

### Subespacios admisibles y aproximaciones de matrices

Pedro Massey

Centro de Matemática de La Plata-FCEX-UNLP  
& IAM-CONICET



#### Resumen

En esta nota breve comentamos algunos aspectos relacionados con el cálculo de aproximaciones de matrices rectangulares  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  a través de matrices  $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$  que verifican la restricción  $\text{rk}(B) = \dim B(\mathbb{C}^n) \leq h$ . El análisis clásico de varios métodos iterativos para la construcción de aproximaciones de la forma  $B = P_{\mathcal{T}}A$  para subespacios  $\mathcal{T} \subset \mathbb{C}^m$  con  $\dim \mathcal{T} = h$ , se basa en estimaciones de la distancia entre el subespacio  $\mathcal{T}$  y el llamado subespacio dominante a izquierda de  $A$  de dimensión  $h$ . Sin embargo, es sabido que el cálculo de aproximaciones de la forma  $B = P_{\mathcal{T}}A$  puede estar bien condicionado en casos en que el cálculo de aproximaciones del subespacio dominante de dimensión  $h$  de  $A$  está mal condicionado, lo que afecta al análisis clásico de los métodos iterativos. En lo que sigue desarrollamos algunas cuestiones relacionadas con esta aparente paradoja y compartimos algunas de las consideraciones que, en trabajo conjunto con Francisco Arrieta Zuccalli, nos han llevado a proponer una visión alternativa para el análisis de los métodos iterativos en términos de una nueva clase de subespacios.

#### Introducción

En la actualidad, la información digitalizada se presenta frecuentemente en términos de una matriz  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ . Estas matrices de información suelen ser de gran tamaño, lo que corresponde a que modelan grandes volúmenes de datos. En ese contexto, las matrices no pueden ser cargadas de forma completa en la memoria rápida de las computadoras y típicamente se accede solo a partes de estas matrices (por ejemplo a filas y columnas). Este último hecho hace que sea posible calcular la acción de la matriz en vectores  $Ax$ , lo que a su vez permite definir expresiones del tipo  $A^*A$  ó  $AA^*$  y sus potencias (que sólo siguen siendo parcialmente accesibles en la memoria rápida de una computadora). Sin embargo, en general no es posible calcular de forma explícita algunas formas canónicas

o representaciones conocidas del álgebra lineal: por ejemplo, no es posible calcular de forma directa la descomposición polar, ó la descomposición en valores singulares de  $A$ . En general, tampoco es posible calcular los llamados vectores singulares e incluso los valores singulares de forma directa y completa.

Por otro lado, el hecho de que la matriz  $A$  provenga de datos reales muchas veces garantiza que su información más relevante puede quedar representada por matrices con cierta estructura especial. Por ejemplo, la información representada por  $A$  contiene unas pocas tendencias bien marcadas; ó la información representada por  $A$  tiene una precisión demasiado alta para nuestro interés, y podemos pensar en comprimir esta información de forma que la versión comprimida sea aún de interés. En este contexto, la idea general es tratar de aproximar esta información relevante de  $A$  a través de matrices  $B$ , que admitan una manipulación algebraica directa en la computadora. Por supuesto, el planteo anterior es muy general; en lo que sigue vamos a considerar un modelo bien definido para describir el problema de aproximar la información más relevante de  $A$  y veremos algunos de los problemas asociados a su cálculo. También describiremos algunos de los problemas teóricos asociados a este tipo de modelo y plantearemos una posible perspectiva (nueva) para su análisis.

## 1. Aproximaciones ideales de $A$ con restricciones

A partir de la matriz  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  proponemos representar su información más relevante (con cierto nivel de precisión) a través de matrices  $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , que tengan una estructura más sencilla. En nuestro contexto, vamos a elegir de forma conveniente matrices  $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , que satisfagan  $\text{rk}(B) = \dim B(\mathbb{C}^n) \leq h$ , donde  $1 \leq h \ll \min\{m, n\}$  es un parámetro que podemos establecer en función de distintos criterios (fijo de aquí en adelante). En principio, estamos interesados en elegir las matrices  $B_{op}$  que sean soluciones del problema de mejor aproximación con restricciones:

$$\|A - B_{op}\| = \min\{\|A - B\| : B \in \mathbb{C}^{m \times n}, \text{rk}(B) \leq h\}.$$

En este contexto, dada una matriz  $C$ ,  $\|C\|$  denotará la norma espectral  $\|C\|_{sp} = \max\{\|Cx\| : \|x\| \leq 1\}$  o la norma Frobenius  $\|A\|_F = \text{tr}(A^*A)^{1/2}$ . Las matrices  $B_{op}$  extraen la información más relevante de  $A$ , en el sentido de que el residuo de aproximación  $\|A - B_{op}\|$  es lo más pequeño posible.

Aquí conviene notar que la restricción sobre el rank de  $B_{op}$  permite deducir representaciones útiles (computables) de esta matriz. De hecho, para cualquier  $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$  con  $\text{rk}(B) \leq h$  podemos calcular de forma efectiva representaciones de  $B = F_1 F_2^*$ , donde  $F_1 \in \mathbb{C}^{m \times h}$  y  $F_2 \in \mathbb{C}^{n \times h}$  son matrices que tienen solo  $h$  columnas (recordemos que  $h \ll \min\{m, n\}$ ), lo que permite calcular representaciones canónicas de  $B$  con la computadora. Esto indica que el modelo propuesto más arriba da una respuesta al problema de hallar la manera de manipular de forma computable aproximaciones convenientes de  $A$ .

Por otro lado, notamos que las soluciones  $B_{op}$  del problema de mejor aproximación pueden no ser únicas y pueden depender de la norma de matrices que usemos. Sin embargo, existen matrices  $A_h \in \mathbb{C}^{m \times n}$  que son mejores aproximaciones de  $A$  bajo las restricciones anteriores, con respecto a las normas Frobenius y espectral (y muchas otras más) simultáneamente. Para poder describir estas matrices  $A_h$ , necesitamos detallar una descomposición muy importante del análisis matricial, denominada descomposición en valores singulares.

Para comenzar, recordemos que los valores singulares de  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , notados por  $\sigma_1(A) \geq \dots \geq \sigma_p(A)$ , donde  $p = \min\{m, n\}$ , están dados por  $\sigma_i^2 = \lambda_i(A^*A)$ ,  $1 \leq i \leq p$ , donde  $\lambda_1(A^*A) \geq \dots \geq \lambda_n(A^*A) \geq 0$  denotan los autovalores de la matriz semidefinida positiva  $A^*A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , contando multiplicidades y ordenados en forma decreciente. A partir de los valores singulares podemos describir una descomposición en valores singulares (DVS) de  $A$  como una factorización  $A = U\Sigma V^*$ , donde  $U \in \mathbb{C}^{m \times m}$  y  $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$  son matrices unitarias, y  $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es una matriz *diagonal* que satisface  $\Sigma_{ii} = \sigma_i(A)$  ( $= \sigma_i$ ), para  $1 \leq i \leq p$ . Si denotamos por  $u_1, \dots, u_m$  y  $v_1, \dots, v_n$  las columnas de las matrices  $U$  y  $V$  en la DVS de  $A$  anterior, entonces se puede verificar que  $Au_i = \sigma_i v_i$ , para  $1 \leq i \leq p$ . Los vectores  $u_i$  y  $v_i$  son llamados los  $i$ -ésimos vectores singulares a izquierda y derecha de  $A$ , respectivamente. El hecho de que  $u_1, \dots, u_m$  sean las columnas de una matriz unitaria implica que forman una base ortonormal de  $\mathbb{C}^m$ ; de forma similar,  $v_1, \dots, v_n$  es una base ortonormal de  $\mathbb{C}^n$ . Un resultado básico, pero muy importante, del análisis matricial garantiza la existencia de descomposiciones en valores singulares para toda matriz  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  (ver [1]).

La descomposición en valores singulares es una herramienta fundamental. Como consecuencia de esta descomposición, vemos que los valores singulares pueden ser usados para **medir** la matriz  $A$ . De hecho, usando esta descomposición y las propiedades de las matrices unitarias y la traza, es sencillo verificar que  $\|A\|_{sp} = \sigma_1$  mientras que  $\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^p \sigma_i^2$ .

Notemos que si  $A = U\Sigma V^*$  es una DVS entonces  $A^*A = V\Sigma^*\Sigma V^*$ , donde  $D = \Sigma^*\Sigma \in \mathbb{C}^{n \times n}$  es la matriz diagonal tal que  $D_{ii} = \sigma_i^2$ ,  $1 \leq i \leq p$  y  $D_{ii} = 0$ ,  $p+1 \leq i \leq n$ . En este sentido, los vectores singulares a derecha  $v_1, \dots, v_n$  corresponden a una diagonalización de  $A^*A$  a través de una base ortonormal. Más aún, es sencillo verificar que toda diagonalización  $A^*A = \tilde{V}D\tilde{V}^*$  de  $A^*A$  corresponde a una DVS tal que  $A = \tilde{U}\Sigma\tilde{V}^*$ . Es bien sabido que si los autovalores de  $A^*A$  tienen multiplicidad mayor a uno, entonces existen diagonalizaciones de  $A^*A$  que son muy diferentes entre sí: por ejemplo, si  $\sigma_1^2 = \lambda_1(A^*A)$  tiene multiplicidad dos, entonces podemos reemplazar a los vectores  $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^n$  de cualquier diagonalización  $A^*A = VDV^*$  (con  $D$  como antes) por los vectores  $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \in \mathbb{C}^n$  tales que formen una base ortonormal del subespacio de  $\mathbb{C}^n$  generado por  $\{v_1, v_2\}$  y obtener una nueva diagonalización  $A^*A = \tilde{V}D\tilde{V}^*$ . A su vez, esto implicará que tendremos DVS's  $A = U\Sigma V^*$  y  $A = \tilde{U}\Sigma\tilde{V}^*$ , con sus correspondientes vectores singulares muy diferentes entre sí. Por otro lado, el hecho de que exista un salto singular  $\sigma_h = \lambda_h(A^*A)^{1/2} > \sigma_{h+1} = \lambda_{h+1}(A^*A)^{1/2}$  garantiza que el subespacio generado por  $\{v_1, \dots, v_h\}$  está unívocamente asociado a  $A^*A$  (y por lo tanto a  $A$ ). Notemos que podemos repetir todos los argumentos anteriores, pero ahora en términos de los vectores singulares a izquierda  $\{u_1, \dots, u_m\}$  y la matriz semidefinida positiva  $AA^* \in \mathbb{C}^{m \times m}$ .

Finalmente, dada cualquier DVS de  $A = U\Sigma V^*$  y  $1 \leq h \leq p = \min\{m, n\}$  podemos definir la DVS truncada correspondiente, notada  $A_h \in \mathbb{C}^{m \times n}$  y dada por  $A_h = U_h \Sigma_h V_h^*$  donde  $U_h \in \mathbb{C}^{m \times h}$  tiene columnas  $u_1, \dots, u_h$ ,  $V_h \in \mathbb{C}^{n \times h}$  tiene columnas  $v_1, \dots, v_h$ , y  $\Sigma_h \in \mathbb{C}^{h \times h}$  es una matriz diagonal con  $(\Sigma_h)_{ii} = \sigma_i$ ,  $1 \leq i \leq h$ . Notemos que  $\text{rk}(A_h) \leq h$ , por construcción. El llamado Teorema de Lidskii (ver [1]), que es un resultado central de la teoría de aproximación de matrices, garantiza las desigualdades

$$\|A - A_h\|_{sp} \leq \|A - B\|_{sp} \quad \text{y} \quad \|A - A_h\|_F \leq \|A - B\|_F \quad \text{para toda } B \in \mathbb{C}^{m \times n}, \text{ rk}(B) \leq h.$$

De hecho, tenemos que el residuo óptimo puede calcularse:

$$\|A - A_h\|_{sp} = \sigma_{h+1} \quad \text{y} \quad \|A - A_h\|_F = \left( \sum_{i=h+1}^p \sigma_i^2 \right)^{1/2}. \quad (1.1)$$

Por otro lado, como consecuencia de la construcción de  $A_h$  se deduce de forma directa que

$$\sigma_i(A_h) = \sigma_i, \quad 1 \leq i \leq h \quad \text{y} \quad \sigma_i(A_h) = 0, \quad h+1 \leq i \leq p. \quad (1.2)$$

Notemos que la no unicidad de la DVS en presencia de valores singulares repetidos (múltiples), mencionada más arriba, implica la no unicidad de la matriz  $A_h$  en estos casos. Así, en general no hay una única  $A_h$  (y la notación puede resultar confusa). Por otro lado, la condición  $\sigma_h > \sigma_{h+1}$  garantiza la unicidad de la mejor aproximación  $A_h$ , que resulta independiente de la DVS de  $A$  que hayamos considerado.

## 2. Aproximaciones computables de $A$ con restricciones

Dada una matriz  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  (de tamaño grande), hemos visto en la sección anterior que existen matrices  $A_h \in \mathbb{C}^{m \times n}$  que son las mejores aproximaciones de  $A$  entre las matrices  $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$  bajo la restricción  $\text{rk}(B) \leq h$ , para  $1 \leq h \ll p = \min\{m, n\}$  fijo. Cabe notar que estas matrices  $A_h$  se construyen a través de cualquier DVS de  $A$ . Sin embargo, como hemos mencionado en la introducción, en los casos de interés no es posible calcular (de forma explícita, usando una computadora) una DVS de  $A$ , debido a su tamaño. Para poder plantear una salida a esta encrucijada, conviene notar cierta estructura de las matrices  $A_h$ : dada una DVS  $A = U\Sigma V^*$ , si  $U_h \in \mathbb{C}^{m \times h}$  denota la matriz con columnas  $u_1, \dots, u_h$  entonces  $A_h = U_h(U_h^*A)$ : en efecto,

$$\begin{aligned} U_h(U_h^*A) &= U_h(U_h^*U)\Sigma V^* = U_h \begin{pmatrix} I_h & 0_{h \times m-h} \end{pmatrix} \Sigma V^* = U_h \Sigma_h \begin{pmatrix} I_h \\ 0_{n-h \times h} \end{pmatrix} V^* \\ &= U_h \Sigma_h (V \begin{pmatrix} I_h & 0_{h \times n-h} \end{pmatrix})^* = U_h \Sigma_h V_h^* = A_h. \end{aligned}$$

La representación anterior muestra el rol que cumple el subespacio  $\mathcal{U}_h \subset \mathbb{C}^m$  generado por  $\{u_1, \dots, u_h\} \subset \mathbb{C}^m$ , denominado subespacio **dominante a izquierda** de  $A$  de dimensión  $h$ : de hecho, el producto  $U_h U_h^* \in \mathbb{C}^{m \times m}$  coincide con el proyector ortogonal sobre este subespacio. Más aún, si fuera posible calcular  $U_h$  entonces la representación anterior  $A_h = U_h(U_h^*A) = F_1 F_2^*$ , con  $F_1 = U_h \in \mathbb{C}^{m \times h}$  y  $F_2 = A^* U_h \in \mathbb{C}^{n \times h}$ , permitiría realizar manipulaciones algebraicas con  $A_h$  a través de manipulaciones de  $F_2^* = U_h^* A$  que es una matriz con pocas filas.

Por supuesto, el problema aún subsiste, dado que el cálculo de los vectores  $\{u_1, \dots, u_h\}$  depende del cálculo de una DVS. Sin embargo, hay numerosos resultados del álgebra lineal numérica que garantizan **aproximaciones** del subespacio dominante a izquierda  $\mathcal{U}_h$  a través de subespacios que pueden calcularse con el uso de la computadora. Esta última afirmación (que desarrollaremos más adelante) hace que esta perspectiva para el cálculo de matrices  $B = P_{\mathcal{T}} A$  con  $\dim \mathcal{T} = h$ , y tales que sean **buenas aproximaciones** de  $A$ , sea computacionalmente viable.

Para llevar adelante el enfoque de aproximación anterior es necesario definir alguna noción de distancia (ó proximidad) entre subespacios. Vamos a considerar dos situaciones diferentes, según los subespacios tengan la misma dimensión o no, y las nociones en cada uno de estos casos se presentan de forma diferenciada. El primer paso es identificar un subespacio  $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}^n$  con su proyección ortogonal  $P_{\mathcal{S}} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , que satisface  $P_{\mathcal{S}} = P_{\mathcal{S}}^* = P_{\mathcal{S}}^2$  y  $P_{\mathcal{S}}(\mathbb{C}^n) = \mathcal{S}$ . Es sencillo verificar que esta identificación es buena, en el sentido de que es una biyección entre subespacios y proyecciones ortogonales. Así, dados dos subespacios  $\mathcal{S}, \mathcal{T} \subset \mathbb{C}^n$  de la misma dimensión, podemos definir la distancia entre ellos como  $d(\mathcal{S}, \mathcal{T}) = \|P_{\mathcal{S}} - P_{\mathcal{T}}\|_{\text{sp}}$ : a partir de la definición (y del hecho de que  $\|\cdot\|_{\text{sp}}$  es una norma en  $\mathbb{C}^{n \times n}$ ) se

puede verificar que  $d(\mathcal{S}, \mathcal{T})$  es una función distancia (o métrica) en

$$\text{Gr}(n, k) := \{\mathcal{S} \subset \mathbb{C}^n : \dim \mathcal{S} = k\},$$

para  $1 \leq k \leq n$ . Por otro lado, si  $\dim \mathcal{S} < \dim \mathcal{T}$  entonces definimos la proximidad (o cercanía) de  $\mathcal{S}$  a  $\mathcal{T}$  dada por

$$d(\mathcal{S}, \mathcal{T}) = \|(I - P_{\mathcal{T}})P_{\mathcal{S}}\|_{\text{sp}}.$$

Notamos que cuando los subespacios tienen distinta dimensión, sus roles en la expresión  $\|(I - P_{\mathcal{T}})P_{\mathcal{S}}\|_{\text{sp}}$  no son simétricos. Hemos usado la misma notación  $d(\mathcal{S}, \mathcal{T})$  ya sea que  $\dim \mathcal{S} = \dim \mathcal{T}$  o  $\dim \mathcal{S} < \dim \mathcal{T}$ . Una justificación de este hecho es la siguiente: dados dos subespacios cualesquiera  $\mathcal{S}, \mathcal{T} \subset \mathbb{C}^n$  tales que  $\dim \mathcal{S} \leq \dim \mathcal{T}$ , podemos definir la apertura (o ángulo máximo) entre los subespacios como el valor

$$\theta_{\text{máx}}(\mathcal{S}, \mathcal{T}) = \text{máx}\{\arccos(|\langle s, t \rangle|) : s \in \mathcal{S}, t \in \mathcal{T}, \|s\| = \|t\| = 1\} \in [0, \pi/2].$$

Es claro que esta cantidad describe la posición relativa entre los subespacios, es decir, es una noción geométrica. En este caso, sucede que  $d(\mathcal{S}, \mathcal{T}) = \sin(\theta_{\text{máx}}(\mathcal{S}, \mathcal{T})) \in [0, 1]$ , ya sea que las dimensiones de los subespacios sean iguales o no.

Ahora que hemos definido la noción de distancia o proximidad entre subespacios, podemos describir algunos de los resultados clásicos del álgebra lineal numérica relacionados con la aproximación de subespacios dominantes. Vamos a considerar un análisis **determinista** de un proceso iterativo que describimos a continuación; más aún, vamos a iniciar considerando un caso que llamaremos **genérico** (refiriéndonos a que se da con muchísima frecuencia), pero que no cubre todos los casos. Partimos de una DVS (arbitraria, pero fija)  $A = U\Sigma V^* \in \mathbb{C}^{m \times n}$  y consideramos la dimensión objetivo  $1 \leq h \ll p = \min\{m, n\}$ . Vamos a asumir que, además,  $\sigma_h > \sigma_{h+1}$ , de forma que la mejor aproximación  $A_h$  está unívocamente determinada. Dado un subespacio inicial  $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^n$  y tal que  $h \leq r := \dim \mathcal{X} \ll p = \min\{m, n\}$  (genérico), entonces (ver [2, 9]) se verifica que para todo  $q \geq 0$ : si  $\mathcal{U}_h$  y  $\mathcal{V}_h$  son los subespacios dominantes a izquierda y derecha de  $A$  de dimensión  $h$ , generados por  $\{u_1, \dots, u_h\}$  y  $\{v_1, \dots, v_h\}$  respectivamente, entonces

$$d(\mathcal{U}_h, (AA^*)^q A(\mathcal{X})) \leq \left(\frac{\sigma_{h+1}}{\sigma_h}\right)^{2q+1} \tan(\theta_{\text{máx}}(\mathcal{X}, \mathcal{V}_h)). \quad (2.1)$$

Lo anterior puede interpretarse de la siguiente manera: comenzando con el subespacio inicial  $\mathcal{T}_1 = (AA^*)A(\mathcal{X})$  de dimensión baja (a lo sumo  $r \ll p$ ), calculamos de forma iterativa los subespacios  $\mathcal{T}_\ell = (AA^*)(\mathcal{T}_{\ell-1})$ , para  $2 \leq \ell \leq q$ . De esta forma, la sucesión de subespacios satisface:  $\mathcal{T}_q = (AA^*)^q A(\mathcal{X})$ . En particular, dado que  $\frac{\sigma_{h+1}}{\sigma_h} < 1$ , los subespacios  $\mathcal{T}_q$  aproximan arbitrariamente bien al subespacio  $\mathcal{U}_h$ , es decir,  $d(\mathcal{U}_h, \mathcal{T}_q) \rightarrow 0$  cuando  $q \rightarrow \infty$ . Remarcamos que los subespacios dominantes no juegan ningún papel en la construcción de  $\mathcal{T}_q$ . El resultado anterior, basado en el llamado método de subespacios iterativos para la construcción de los subespacios  $\mathcal{T}_q$ , es el primer paso para la construcción **computable** de aproximaciones de  $A$ , dadas por matrices  $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$  que satisfacen que  $\text{rk}(B) \leq h$ . Si comenzamos con un subespacio genérico  $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^n$  con  $\dim \mathcal{X} = h$  entonces, de forma genérica,  $\dim \mathcal{T}_q = h$ ; en tal caso  $d(\mathcal{U}_h, \mathcal{T}_q) = \|P_{\mathcal{U}_h} - P_{\mathcal{T}_q}\|_{\text{sp}}$  y entonces, por ejemplo:

$$\|A - P_{\mathcal{T}_q}A\|_{\text{sp}} \leq \|A - A_h\|_{\text{sp}} + \|A_h - P_{\mathcal{T}_q}A\|_{\text{sp}} \leq \sigma_h + d(\mathcal{U}_h, \mathcal{T}_q) \|A\|_{\text{sp}},$$

donde usamos que  $A_h = P_{\mathcal{U}_h}A$  y que

$$\|P_{\mathcal{U}_h}A - P_{\mathcal{T}_q}A\|_{\text{sp}} \leq \|P_{\mathcal{U}_h} - P_{\mathcal{T}_q}\|_{\text{sp}} \|A\|_{\text{sp}} = d(\mathcal{U}_h, \mathcal{T}_q) \|A\|_{\text{sp}}.$$

De esta forma, los residuos  $\|A - P_{\mathcal{T}_q} A\|_{\text{sp}}$  convergen al residuo óptimo  $\|A - A_h\|_{\text{sp}}$ , cuando  $q$  se hace arbitrariamente grande. A partir de la Ec. (2.1) es posible concluir que  $\sigma_i(P_{\mathcal{T}_q} A) \rightarrow \sigma_i$ , cuando  $q$  se hace arbitrariamente grande, para  $1 \leq i \leq h$ .

### 3. El rol del salto singular $\sigma_h - \sigma_{h+1}$

Con las notaciones de la sección anterior, el análisis del comportamiento de la sucesión de subespacios  $\mathcal{T}_q = (AA^*)^q A(\mathcal{X})$  que aparece en la Ec. (2.1) está fuertemente influenciado por el valor  $\sigma_{h+1}/\sigma_h < 1$ . Si este valor es muy cercano a 1, entonces la estimación (superior) de la distancia  $d(\mathcal{U}_h, \mathcal{T}_q)$  no será realmente informativa.

Una primera pregunta es si se trata de una limitación del análisis realizado para llegar a la Ec. (2.1). Sucede que este no es el caso: desde un punto numérico, ejemplos realizados muestran que los valores (reales) de  $d(\mathcal{U}_h, (AA^*)^q A(\mathcal{X}))$  dependen de cociente  $\sigma_{h+1}/\sigma_h$  y que cuando este cociente se acerca a 1, entonces  $d(\mathcal{U}_h, (AA^*)^q A(\mathcal{X}))$  se mantiene cerca de 1, incluso para valores grandes de  $q$ . Por otro lado, desde un punto de vista teórico, se puede mostrar que el problema del cálculo de  $\mathcal{U}_h$  se vuelve inestable, cuando el cociente  $\sigma_{h+1}/\sigma_h$  se acerca a 1 (i.e. cuando el salto singular  $\sigma_h - \sigma_{h+1}$  se hace pequeño). Como medida de estabilidad del cálculo (en nuestro caso, de la aproximación) del subespacio  $\mathcal{U}_h$ , se puede considerar el llamado número de condición, que definimos a continuación. Dada  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  tal que  $\sigma_h > \sigma_{h+1}$  como antes, consideramos  $\mathcal{M}_h = \{C \in \mathbb{C}^{m \times n} : \sigma_h(C) > \sigma_{h+1}(C)\} \subset \mathbb{C}^{m \times n}$  (que resulta un conjunto abierto de  $\mathbb{C}^{m \times n}$  con respecto a la topología inducida por la norma  $\|\cdot\|_{\text{sp}}$ ). Para cada  $C \in \mathcal{M}_h$ , notamos por  $\mathcal{U}_h(C) \subset \mathbb{C}^m$  al subespacio dominante a izquierda de dimensión  $h$ , que está unívocamente definido. En este contexto, el número de condición del cálculo de  $\mathcal{U}_h = \mathcal{U}_h(A)$  está dado por

$$\kappa(A, h) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup_{C \in \mathcal{M}_h, 0 < \|A - C\|_{\text{sp}} \leq \varepsilon} \frac{d(\mathcal{U}_h, \mathcal{U}_h(C))}{\|A - C\|_{\text{sp}}} \quad (3.1)$$

y satisface que  $\kappa(A, h) = \alpha(\sigma_h(A) - \sigma_{h+1}(A))^{-1}$ , para una constante  $1 \leq \alpha \leq 2$  (ver [8]). Es decir, en la medida en que el salto singular  $\sigma_h - \sigma_{h+1}$  sea muy pequeño (ó equivalentemente, en la medida en que  $\sigma_{h+1}/\sigma_h$  esté muy cercano a 1) el cálculo de  $\mathcal{U}_h = \mathcal{U}_h(A)$  se vuelve muy inestable, en el sentido de que para matrices  $C$  cercanas a  $A$ ,  $\mathcal{U}_h(C)$  puede estar lejos de  $\mathcal{U}_h$ .

Cabe remarcar que hay otros métodos de aproximación de  $\mathcal{U}_h$  a través de sucesiones de subespacios  $\tilde{\mathcal{T}}_q \subset \mathbb{C}^m$  que son efectivamente computables: sin embargo, los análisis clásicos (del caso determinista) de estos algoritmos producen estimaciones de la distancia  $d(\mathcal{U}_h, \tilde{\mathcal{T}}_q)$  que también dejan de ser informativas cuando  $\sigma_h - \sigma_{h+1}$  se hace pequeño (ver [2]). De forma análoga, ejemplos numéricos de estos algoritmos muestran que los valores  $d(\mathcal{U}_h, \tilde{\mathcal{T}}_q)$  efectivamente dependen del salto singular  $\sigma_h - \sigma_{h+1}$  en el sentido anterior. Más aún, en numerosos ejemplos numéricos se verifica que  $d(\mathcal{T}_{q-1}, \mathcal{T}_q)$  se mantiene por arriba de un umbral (inferior) estrictamente positivo como función de  $q \geq 1$ , lo que indica que la sucesión no se aproxima a ningún subespacio; más bien, parece vagar por  $\text{Gr}(n, h)$ .

Es ahora cuando conviene recordar nuestro problema de aproximación inicial: dada la matriz  $A$ , estamos interesados en calcular aproximaciones computables  $B$  de la matriz  $A$  que satisfagan la restricción  $\text{rk}(B) \leq h$  y tales que  $\|A - B\|_{2,F}$  sea del orden de  $\|A - A_h\|_{2,F}$  (error de aproximación óptimo). Hasta ahora, hemos considerado la estrategia clásica de resolver el problema anterior a través de aproximaciones de la forma  $P_{\mathcal{T}} A$ , donde  $\mathcal{T} \subset \mathbb{C}^m$  denota un subespacio computable y tal que  $\dim \mathcal{T} = h$  y  $d(\mathcal{U}_h, \mathcal{T})$  sea pequeña. Pero si el salto singular  $\sigma_h - \sigma_{h+1}$  es muy pequeño, entonces esta estrategia de resolver un problema auxiliar de

calcular subespacios  $\mathcal{T}_q$  que se acerquen a  $\mathcal{U}_h$  (cuando  $q$  crece) no parece conveniente, porque el problema de aproximar el subespacio  $\mathcal{U}_h$  se vuelve inestable. Un planteo natural es el de cambiar la estrategia y resolver el problema inicial de forma más directa, al menos en los casos en donde  $\sigma_h - \sigma_{h+1}$  es muy pequeño.

Sin embargo, pasa algo insospechado: los ejemplos numéricos realizados sobre matrices  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  tales que  $\sigma_h - \sigma_{h+1}$  es muy pequeño (incluso cuando  $\sigma_h = \sigma_{h+1}$ !), muestran que las aproximaciones de la forma  $P_{\mathcal{T}_q}A$  obtenidas a partir del método del subespacio iterativo, i.e.  $\mathcal{T}_q = (AA^*)^q A(\mathcal{X})$  para un subespacio genérico inicial  $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^n$  con  $\dim \mathcal{X} = h$ , son buenas aproximaciones de  $A$  en el sentido de que los errores de aproximación  $\|A - P_{\mathcal{T}_q}A\|_{2,F}$  decrecen hasta mantenerse muy cerca de  $\|A - A_h\|_{2,F}$ , cuando  $q$  crece. Más aún, lo anterior muestra que los valores singulares  $\sigma_i(P_{\mathcal{T}_q}A)$  crecen hasta valores muy cercanos a  $\sigma_i(A)$  cuando  $q$  se hace grande, para  $1 \leq i \leq h$ . Estos hechos parecen entrar en contradicción con el comportamiento de la distancia  $d(\mathcal{U}_h, \mathcal{T}_q)$  mencionado más arriba (ver [6]).

Como veremos más adelante, los hechos anteriores pueden explicarse a través de la clase de subespacios admisibles a izquierda  $\text{Adm}_l(A, h)$  asociada a  $A$  y  $h$ , cuando  $\sigma_h \approx \sigma_{h+1}$  (incluso si  $\sigma_h = \sigma_{h+1}$ ): esta clase, que definiremos en breve, está formada por subespacios  $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}^m$ , cada uno de los cuales induce una buena aproximación  $P_{\mathcal{S}}A$  de  $A$ , y de forma que  $\text{Adm}_l(A, h)$  es lo suficientemente abundante como para garantizar que  $\min\{d(\mathcal{T}_q, \mathcal{S}) : \mathcal{S} \in \text{Adm}_l(A, h)\} \rightarrow 0$ , cuando  $q \rightarrow \infty$ . Estos hechos, junto con propiedades elementales de continuidad, validan teóricamente que el cálculo de aproximaciones de la forma  $P_{\mathcal{T}_q}A$  es relevante en estos casos.

#### 4. El caso extremo $\sigma_h = \sigma_{h+1}$ .

Continuando con el contexto de las secciones anteriores, partamos ahora de una matriz  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , pero supongamos que  $\sigma_h = \sigma_{h+1}$ . En este caso definimos  $j + 1 = \min\{1 \leq i \leq h : \sigma_i = \sigma_h\}$  y  $k = \max\{h \leq i \leq p : \sigma_i = \sigma_h\}$ . En lo que sigue vamos a suponer que  $1 \leq j < h < k < \text{rk}(A)$ : de esta forma,

$$\sigma_j > \sigma_{j+1} = \cdots = \sigma_h = \cdots = \sigma_k > \sigma_{k+1} > 0. \quad (4.1)$$

Los saltos de los valores singulares que figuran arriba indican que los subespacios dominantes a izquierda  $\mathcal{U}_j, \mathcal{U}_k \subset \mathbb{C}^m$  así como los subespacios dominantes a derecha  $\mathcal{V}_j, \mathcal{V}_k \subset \mathbb{C}^n$  están unívocamente determinados. Por otro lado, hay una infinidad de subespacios dominantes a izquierda de  $A$  de dimensión  $h$ : más aún, en este caso los podemos describir a todos mediante el conjunto

$$\text{Dom}_l(A, h) = \{\mathcal{U}_j \oplus \mathcal{D} : \mathcal{D} \subset \mathcal{U}_k \ominus \mathcal{U}_j, \dim \mathcal{D} = h - j\} \subset \mathbb{C}^m, \quad (4.2)$$

donde  $\mathcal{U}_k \ominus \mathcal{U}_j = \mathcal{U}_k \cap \mathcal{U}_j^\perp$ . Una primera observación a tener en cuenta es que la clase  $\text{Dom}_l(A, h) \subset \text{Gr}(m, h)$  tiene diámetro máximo: es decir,

$$\max\{d(\mathcal{S}, \tilde{\mathcal{S}}) : \mathcal{S}, \tilde{\mathcal{S}} \in \text{Dom}_l(A, h)\} = 1.$$

Esto último indica que la clase de subespacios dominantes no se concentra en ningún lugar de  $\text{Gr}(m, h)$ . Estas observaciones comienzan a explicar por qué la expresión en la Ec. (3.1) deja de tener sentido en el caso en que  $\sigma_h = \sigma_{h+1}$ : por un lado, la función que a la matriz  $A$  (y matrices cercanas) le asigna sus subespacios dominantes a izquierda de dimensión  $h$  resulta multivaluada, y en consecuencia no puede ser analizada por el cociente planteado

en (3.1) (que sólo se aplica a expresiones funcionales univaluadas). Por otro lado, en el caso multivaluado, el conjunto que representa los posibles valores (es decir, los subespacios dominantes) a considerar está disperso (no concentrado) lo que no permite elegir algún elemento representativo de la clase.

Las observaciones anteriores ponen de manifiesto el cambio de naturaleza (para bien!) del problema de aproximación cuando  $\sigma_h = \sigma_{h+1}$ : hemos mencionado que un subespacio  $\mathcal{T} \subset \mathbb{C}^m$  cercano a cualquier subespacio dominante  $\mathcal{U}_h$  de  $A$  da lugar a una buena aproximación  $P_{\mathcal{T}}A$  de  $A$ . En el contexto actual, la existencia de infinitos subespacios dominantes a izquierda de  $A$  de dimensión  $h$  induce el problema de determinar, dado  $\mathcal{T} \subset \mathbb{C}^m$  con  $\dim \mathcal{T} = h$ ,

$$d(\mathcal{T}, \text{Dom}_l(A, h)) := \min\{d(\mathcal{T}, \mathcal{U}) : \mathcal{U} \in \text{Dom}_l(A, h)\}. \quad (4.3)$$

Dado que el diámetro del conjunto  $\text{Dom}_l(A, h)$  es grande, el problema anterior resulta no trivial. Por otro lado, notemos que bastaría con poder calcular una cota superior (informativa) del valor  $d(\mathcal{T}, \text{Dom}_l(A, h))$  para determinar la **calidad** del subespacio  $\mathcal{T}$  con respecto a  $A$ , y posteriormente, la calidad de la aproximación  $P_{\mathcal{T}}A$ . El problema planteado en la Ec. (4.3) no parece haber sido considerado previamente en la literatura. De hecho, no parece haber resultados de convergencia correspondientes a un análisis determinístico como el descrito para los subespacios  $\mathcal{T}_q$ , cuando  $\dim \mathcal{X} = h$  y  $\sigma_h = \sigma_{h+1}$ . Hay una buena razón para eso: como ya hemos mencionado, ejemplos numéricos muestran que los subespacios  $\mathcal{T}_q$  no parecen estabilizarse alrededor de ningún subespacio. Sin embargo, en este contexto, resulta más adecuado estudiar el decaimiento de  $d(\mathcal{T}_q, \text{Dom}_l(A, h))$  como función de  $q$ . Notemos que en principio es posible que  $d(\mathcal{T}_q, \text{Dom}_l(A, h)) \rightarrow 0$  cuando  $q \rightarrow \infty$ , aún cuando la sucesión de subespacios  $(\mathcal{T}_q)_{q \geq 1}$  no se estabilice alrededor de ningún subespacio fijo.

## 5. Subespacios admisibles

Veamos que podemos flexibilizar algunas de las hipótesis consideradas previamente, para poder extender la propuesta de análisis como en la Ec. (4.3) a casos más generales. Concretamente, vamos a asumir que  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  es una matriz tal que los valores singulares satisfacen

$$\sigma_{j+1} \geq \cdots \geq \sigma_h \geq \cdots \geq \sigma_k \quad \text{con} \quad 0 \leq \sigma_{j+1} - \sigma_k \approx 0,$$

con  $1 \leq j < h \leq k < \text{rk}(A)$ , y que este grupo de valores singulares tiene una dispersión  $\delta := \sigma_{j+1} - \sigma_k \geq 0$  muy pequeña. También vamos a asumir también que  $\sigma_j > \sigma_{j+1}$  y  $\sigma_k > \sigma_{k+1}$  son saltos singulares significativos. Como consecuencia de nuestras hipótesis, el salto singular  $\sigma_h - \sigma_{h+1} \leq \delta$  resulta pequeño; este hecho indica que la desigualdad en la Ec. (2.1) no será informativa en este contexto. Este caso puede ser pensado como una perturbación del caso correspondiente a las condiciones en la Ec. (4.1); bajo estas hipótesis, podemos considerar una clase similar a la definida en la Ec. (4.2) para determinar la calidad de subespacios  $\mathcal{T} \subset \mathbb{C}^m$  con  $\dim \mathcal{T} = h$ .

Motivados por las observaciones anteriores introducimos la clase de **subespacios admisibles a izquierda de dimensión  $h$** , asociados a  $A$  y los índices  $1 \leq j < h < k$ , dada por

$$\text{Adm}_l(A, h) = \{\mathcal{U}_j \oplus \mathcal{D} : \mathcal{D} \subset \mathcal{U}_k \ominus \mathcal{U}_j, \dim \mathcal{D} = h - j\} \subset \mathbb{C}^m. \quad (5.1)$$

Notemos que, como hemos asumido saltos singulares (significativos)  $\sigma_j > \sigma_{j+1}$  y  $\sigma_k > \sigma_{k+1}$ , los subespacios dominantes  $\mathcal{U}_j$  y  $\mathcal{U}_k$  están unívocamente determinados. Así, la clase de

subespacios admisibles está parametrizada por  $\text{Gr}(k - j, h - j)$ , es decir, la variedad de todos los subespacios de dimensión  $h - j$  dentro de  $\mathbb{C}^{k-j}$ . Se puede verificar de forma sencilla que cualquier  $S \in \text{Adm}_l(A, h)$  es tal que  $P_S A$  es una buena aproximación de rango bajo de  $A$ , en el sentido de que los valores singulares  $\sigma_i(P_S A)$  son una buena aproximación de  $\sigma_i(A)$ , para  $1 \leq i \leq h$ , y el residuo  $\|A - P_S A\|$  es casi óptimo, en la medida en que la dispersión  $\delta = \sigma_{j+1} - \sigma_k$  del grupo de valores singulares  $\sigma_{j+1} \geq \dots \geq \sigma_k$  sea pequeña. De forma explícita, se tienen las siguientes acotaciones para los valores singulares de  $P_S A$

$$\begin{aligned} \sigma_i(P_S A) &= \sigma_i \quad \text{para } 1 \leq i \leq j \quad \text{y} \\ \sigma_i - \delta &\leq \sigma_i(P_S A) \leq \sigma_i \quad \text{para } j + 1 \leq i \leq h, \end{aligned} \quad (5.2)$$

y las siguientes acotaciones para las normas de los residuos (o errores de aproximación):

$$\|A - P_S\|_{\text{sp}} \leq \|A - A_h\|_{\text{sp}} + \delta \quad \text{y} \quad \|A - P_S\|_F \leq \|A - A_h\|_F + \sqrt{k - h} \cdot \delta. \quad (5.3)$$

El concepto de subespacios admisibles a izquierda de dimensión  $h$  intenta formalizar un hecho que informalmente era bien conocido dentro del álgebra lineal numérica: en la medida que  $\sigma_h \approx \sigma_{h+1}$ , el subespacio dominante  $\mathcal{U}_h$  es más difícil de calcular. En este caso, su papel es menos protagónico, en el sentido de que puede ser reemplazado de forma satisfactoria por otros subespacios (los subespacios admisibles) que cumplen un rol similar, en el sentido que valen las Ecs. (5.2) y (5.3), por ejemplo.

A partir de lo anterior, y haciendo uso de las propiedades de continuidad de valores singulares y residuos, concluimos que si  $\mathcal{T} \subset \mathbb{C}^m$ ,  $\dim \mathcal{T} = h$ , es tal que

$$d(\mathcal{T}, \text{Adm}_l(A, h)) = \min\{d(\mathcal{T}, S) : S \in \text{Adm}_l(A, h)\} \quad (5.4)$$

es pequeña, entonces  $\mathcal{T}$  también dará lugar a una aproximación de rango bajo  $P_{\mathcal{T}} A$  con buenas propiedades. Tal como en el caso de la Ec. (4.3), el problema de hallar cotas superiores informativas para  $d(\mathcal{T}, \text{Adm}_l(A, h))$  definida como en Ec. (5.4) no es trivial, dado que el conjunto  $\text{Adm}_l(A, h)$  tiene un diámetro grande. Por otro lado, el hecho de que  $\text{Adm}_l(A, h)$  tenga un diámetro grande puede ser considerado como una ventaja al momento de probar que las distancias  $d(\mathcal{T}_q, \text{Adm}_l(A, h))$  decrecen cuando el parámetro  $q$  crece, para la sucesión de subespacios  $\mathcal{T}_q = (AA^*)^q A(\mathcal{X})$ , generada a partir de un subespacio inicial  $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^n$ ,  $\dim \mathcal{X} = h$ . Incluso más: en este contexto puede suceder que las distancias  $d(\mathcal{T}_i, \text{Adm}_l(A, h))$  decrezcan, aún cuando las variaciones  $d(\mathcal{T}_i, \mathcal{T}_{i+1})$ ,  $1 \leq i \leq q - 1$ , asuman valores grandes (es decir, aún cuando la sucesión finita  $\{\mathcal{T}_i\}_{i=1}^q$  no se estabilice alrededor de algún subespacio (límite)  $\mathcal{T}$ ). Estas observaciones indican que el análisis correspondiente al estudio de  $d(\mathcal{T}_q, \text{Adm}_l(A, h))$  definida como en la Ec. (5.4) corresponde a un análisis de cercanía a esta clase, y no a un análisis de convergencia a un subespacio particular.

## 6. Propiedades de los subespacios admisibles

En esta última sección consideramos algunas propiedades básicas de los subespacios admisibles, que permiten responder algunas de las cuestiones que hemos discutido previamente. Los resultados contenidos en esta sección han sido desarrollados en conjunto con Francisco Arrieta Zuccalli (ver [3]).

Vamos a recordar aquí las hipótesis generales que hemos considerado hasta ahora: por un lado,  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  es una matriz rectangular y  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0$  denotan sus valores singulares (aquí  $p = \min\{m, n\}$ ). Hemos fijado una dimensión objetivo  $1 < h < \text{rk}(A)$  (como restricción), hemos supuesto la existencia de índices  $1 \leq j < h < k < \text{rk}(A)$  tales que

$\sigma_j > \sigma_{j+1}$  y  $\sigma_k > \sigma_{k+1}$  son saltos singulares significativos, y  $0 \leq \delta := \sigma_{j+1} - \sigma_k \approx 0$ ; es decir,  $\sigma_h$  está dentro de grupo de valores singulares, muy parecidos entre sí (posiblemente el mismo, repetido  $k - j$  veces). Notemos que entonces están unívocamente definidos los subespacios dominantes a izquierda y derecha  $\mathcal{U}_j, \mathcal{U}_k \subset \mathbb{C}^m$  y  $\mathcal{V}_j, \mathcal{V}_k \subset \mathbb{C}^n$ .

**Sobre la cercanía a la clase de subespacios admisibles:** La distancia o proximidad entre subespacios que hemos considerado previamente satisface una importante propiedad de monotonía: si  $S' \subset S$  y  $\mathcal{T} \subset \tilde{\mathcal{T}}$  de forma que  $\dim S \leq \dim \mathcal{T}$  entonces:

$$d(S', \mathcal{T}) \leq d(S, \mathcal{T}) \text{ y } d(S, \mathcal{T}) \leq d(S, \tilde{\mathcal{T}}).$$

Recordemos que si  $S \in \text{Adm}_I(A, h)$  entonces, en particular,  $\mathcal{U}_j \subset S$  y  $S \subset \mathcal{U}_k$ . Así, si  $\mathcal{T} \subset \mathbb{C}^m$  con  $\dim \mathcal{T} = h$  entonces, por la propiedad de monotonía,  $d(\mathcal{T}, \mathcal{U}_j) \leq d(\mathcal{T}, S)$  y  $d(\mathcal{T}, \mathcal{U}_k) \leq d(\mathcal{T}, S)$ . Así, si  $\mathcal{T}$  es cercano a algún subespacio admisible  $S \in \text{Adm}_I(A, h)$ , entonces  $\mathcal{U}_j$  es cercano a  $\mathcal{T}$  y  $\mathcal{T}$  es cercano a  $\mathcal{U}_k$ . Sucede que vale también una suerte de recíproca: si  $h \leq \dim \mathcal{T} \leq k$  entonces (ver [3]):

$$d(\mathcal{T}, \text{Adm}_I(A, h)) \leq d(\mathcal{T}, \mathcal{U}_j) + d(\mathcal{T}, \mathcal{U}_k). \quad (6.1)$$

La desigualdad anterior es el punto de partida de una serie de consecuencias importantes para los subespacios admisibles. La prueba de esta desigualdad se obtiene eligiendo explícitamente un subespacio  $S \in \text{Adm}_I(A, h)$  tal que  $d(\mathcal{T}, S) \leq d(\mathcal{T}, \mathcal{U}_j) + d(\mathcal{T}, \mathcal{U}_k)$ .

**Sobre el análisis de los algoritmos iterativos.** Una de las principales motivaciones para considerar la clase de subespacios admisibles (bajo las hipótesis que estamos asumiendo) era la de proveer una clase bien comportada de subespacios, que sirviera para medir la calidad de un subespacio  $\mathcal{T} \subset \mathbb{C}^m$  como base para la construcción de una aproximación con rango bajo  $P_{\mathcal{T}} A$ . De hecho, planteamos considerar  $d(\mathcal{T}, \text{Adm}_I(A, h))$  como medida de la calidad del subespacio  $\mathcal{T}$ . En este sentido, podemos indicar el siguiente comportamiento: dado un subespacio  $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^n$  con  $h \leq r := \dim \mathcal{X} \leq k$ , en posición genérica, si consideramos la sucesión finita de subespacios computables, dada por  $\mathcal{T}_q = (AA^*)^q A(\mathcal{X})$  para  $q \geq 1$ , entonces

$$d(\mathcal{T}_q, \text{Adm}_I(A, h)) \leq \left( \frac{\sigma_{j+1}}{\sigma_j} \right)^{2q+1} \tan(\theta_{\max}(\mathcal{X}, \mathcal{V}_j)) + \left( \frac{\sigma_{k+1}}{\sigma_k} \right)^{2q+1} \tan(\theta_{\max}(\mathcal{X}, \mathcal{V}_k)). \quad (6.2)$$

Notemos que bajo las hipótesis que hemos asumido, los saltos singulares en los índices  $j$  y  $k$  son significativos (mientras que el salto singular en el índice  $h$  no lo es). En este caso, la estimación anterior resulta informativa y muestra que la sucesión de subespacios computables  $\{\mathcal{T}_q\}_q$  se aproxima arbitrariamente a la clase de subespacios admisibles (aún cuando la sucesión no se estabilice alrededor de ningún subespacio). Este último hecho valida teóricamente que las matrices de la forma  $P_{\mathcal{T}_q} A$  sean buenas aproximaciones con restricciones de rango de la matriz  $A$ , lo que era bien conocido en el plano de los experimentos numéricos con el método del subespacio iterativo.

**Sobre la estabilidad de la clase de subespacios admisibles:** recordemos que el número de condición, considerado previamente para subespacios dominantes en la Ec. (3.1), indica una medida de la estabilidad del cálculo de  $\mathcal{U}_h$ . En el presente contexto, veremos que es posible definir una cantidad similar para el cálculo de la clase de subespacios admisibles, y daremos una estimación para este nuevo número de condición. En efecto, bajo las hipótesis de esta sección, es posible elegir  $\varepsilon_0(A) = \varepsilon_0 > 0$  suficientemente chico, tal que si  $\|A - B\|_{\text{sp}} \leq \varepsilon_0$ , entonces  $\sigma_j(B) > \sigma_{j+1}(B)$  y  $\sigma_k(B) > \sigma_{k+1}(B)$  son saltos singulares significativos

y  $0 \leq \delta(B) := \sigma_{j+1}(B) - \sigma_k(B) \approx 0$ . Así, si  $\|A - B\|_{\text{sp}} \leq \varepsilon_0$ , tiene sentido considerar la clase de subespacios admisibles a izquierda de dimensión  $h$  de  $B$ :

$$\text{Adm}_I(B, h) = \{\mathcal{U}_j(B) \oplus \mathcal{D} : \mathcal{D} \subset \mathcal{U}_k(B) \ominus \mathcal{U}_j(B), \dim \mathcal{D} = h - j\}.$$

Para considerar una expresión formalmente similar a la dada en la Ec. (3.1), introducimos una función distancia  $d_H$  en  $\mathcal{P}(\text{Gr}(m, h))$ , donde  $\mathcal{P}(\text{Gr}(m, h))$  denota el conjunto de partes de  $\text{Gr}(m, h)$ . En efecto, consideramos la métrica de Hausdorff inducida por la función distancia en  $\text{Gr}(m, h)$ : en este caso, dados  $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \mathcal{P}(\text{Gr}(m, h))$  entonces

$$d_H(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \max\left\{ \sup_{M \in \mathcal{M}} d(M, \mathcal{N}), \sup_{N \in \mathcal{N}} d(N, \mathcal{M}) \right\},$$

donde, como antes,  $d(N, \mathcal{M}) = \inf\{d(N, M) : M \in \mathcal{M}\}$  y similar para  $d(M, \mathcal{N})$ . Con el lenguaje anterior, consideramos la siguiente noción de número de condición para los subespacios admisibles en  $A$ :

$$\kappa(\text{Adm}_I(A, h)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup_{0 < \|A - B\|_{\text{sp}} < \varepsilon} \frac{d_H(\text{Adm}_I(B, h), \text{Adm}_I(A, h))}{\|A - B\|_{\text{sp}}}. \quad (6.3)$$

Como consecuencia de la desigualdad en la Ec. (6.1), obtenemos la siguiente acotación de la variación de las clases de subespacios admisibles en  $A$  (ver [3]):

$$\kappa(\text{Adm}_I(A, h)) \leq \alpha \left( \frac{1}{\sigma_j - \sigma_{j+1}} + \frac{1}{\sigma_k - \sigma_{k+1}} \right), \quad (6.4)$$

para una constante  $1 \leq \alpha \leq 2$ . La estimación anterior indica el rol que cumplen los saltos singulares antes y después del grupo de valores singulares, en la estabilidad de la clase de subespacios admisibles a izquierda y de dimensión  $h$ , para matrices cercanas a  $A$ .

Si consideramos el caso particular en que  $\sigma_{j+1} = \dots = \sigma_h = \dots = \sigma_k$  (de forma que  $\sigma_h = \sigma_{h+1}$  y la expresión en la Ec. (3.1) no está definida), la Ec. (6.4) indica una cota superior para la variación de las clases de subespacios admisibles (con respecto a la métrica de Hausdorff) que está bien definida. Esto último muestra que los subespacios admisibles permiten tratar el caso multivaluado que corresponde a los subespacios dominantes, cuando hay repetición del valor singular  $\sigma_h$ .

## 7. Comentarios finales

Hemos considerado la estrategia clásica de evaluar la calidad de las aproximaciones de rango bajo de la forma  $P_{\mathcal{T}}A$  de una matriz  $A$ , a través de la estimación de la distancia al subespacio dominante a izquierda  $d(\mathcal{U}_h, \mathcal{T})$ , para subespacios  $\mathcal{T} \subset \mathbb{C}^m$ ,  $\dim \mathcal{T} = h$ . Hemos observado que la estabilidad del cálculo de aproximaciones de los subespacios  $\mathcal{U}_h$  no es buena en el caso en que  $\sigma_h \approx \sigma_{h+1}$ . En el caso en que  $\sigma_h$  forma parte de un grupo de valores singulares cercanos (es decir, en donde  $\sigma_h \approx \sigma_{h+1}$ ), hemos introducido la clase de subespacios admisibles y hemos mostrado que: por un lado, los subespacios admisibles  $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}^m$  dan lugar a buenas aproximaciones de la forma  $P_{\mathcal{S}}A$ . Por otro lado, los subespacios admisibles forman una clase abundante, en el sentido que  $d(\mathcal{T}_q, \text{Adm}_I(A, h))$  se hace arbitrariamente pequeña cuando  $q$  crece, para sucesiones  $\{\mathcal{T}_q\}_q$  de subespacios construidos con métodos computables bien conocidos (ver Eq. (6.2)). Esto último permite explicar por qué las sucesiones  $\{\mathcal{T}_q\}_q$  dan lugar a buenas aproximaciones de la forma  $P_{\mathcal{T}_q}A$ , aún cuando  $d(\mathcal{T}_q, \mathcal{U}_h)$  sea grande.

La clase de subespacios admisibles tiene un rol de interés en otras áreas del álgebra lineal numérica. Por ejemplo, parece una clase natural para el estudio de los llamados

subespacios activos (ver [4]). Por otro lado, en conjunto con Francisco Arrieta Zuccalli, estamos desarrollando aplicaciones en el contexto de las llamadas aproximaciones CUR de matrices (ver [5]).

Finalmente, cabe remarcar que el enfoque de los subespacios admisibles tiene sus limitaciones: de hecho, el éxito de este enfoque radica en disponer de matrices cuyos valores singulares estén agrupados en clases tales que cada clase tenga una pequeña dispersión, y que clases distintas se mantengan a una distancia significativa entre sí. Por ejemplo, en el caso de una matriz cuyos valores singulares tienen un decaimiento lineal de la forma  $\sigma_i = b - a \cdot i$ ,  $1 \leq i \leq p = \min\{m, n\}$ , para  $a, b > 0$  y tales que  $a \approx 0$ , entonces estos valores no pueden agruparse en el sentido anterior y la técnica de subespacios admisibles no tiene una aplicación evidente.

**Agradecimientos.** Quiero agradecer a Francisco Arrieta Zuccalli por permitirme hacer uso en esta nota del material que hemos desarrollado en conjunto. Quiero agradecer también a los editores del “Noticiero de la UMA”, y en particular a Iván Angiono, por invitarme a participar de este espacio sobre Miradas Matemáticas.

## Referencias

- [1] Antezana, J., Stojanoff, D.: Análisis Matricial, Cursos y Seminarios de matemática Serie B (2008).
- [2] Arrieta Zuccalli, F., Massey, P., Stojanoff, D.: Block subspace expansions for eigenvalue and eigenvector approximation (enviado). Accesible en: <https://arxiv.org/pdf/2411.14578>
- [3] Arrieta Zuccalli, F., Massey, P.:  $\Lambda$ -admissible subspaces of self-adjoint matrices (enviado). Accesible en: <https://arxiv.org/pdf/2602.11976>
- [4] Constantine, P. G.: Active subspaces. Emerging ideas for dimension reduction in parameter studies. SIAM Spotlights, 2. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2015.
- [5] Drineas, P., Mahoney, M., Muthukrishnan, S.: Relative-error CUR matrix decompositions. SIAM J. Matrix Anal. Appl. 30 (2008), no. 2, 844-881
- [6] Drineas, P., Ipsen, I.: Low-rank matrix approximations do not need a singular value gap. SIAM J. Matrix Anal. Appl. 40 (2019), no. 1, 299-319.
- [7] Massey, P.: Admissible subspaces and the subspace iteration method. BIT 64 (2024), no. 1, Paper No. 12, 36 pp.
- [8] Vannieuwenhoven, N.: The condition number of singular subspaces, revisited. Linear Algebra Appl. 687 (2024), 157–180
- [9] Saibaba, A.: Randomized subspace iteration: analysis of canonical angles and unitarily invariant norms. SIAM J. Matrix Anal. Appl. 40 (2019), no. 1, 23-48.

## Educación Matemática

Acerca del sentido y las responsabilidades de los representantes nacionales ante la Comisión Internacional de Enseñanza de la Matemática



Cristina Esteley

FAMAF - UNC

Representante por Argentina ante ICMI desde setiembre de 2024

### Introducción

Este escrito tiene por finalidad difundir aspectos referidos al sentido, las funciones y responsabilidades de quienes se desempeñan como los representantes nacionales ante la [Comisión Internacional de Enseñanza de la Matemática \(ICMI\)](#) (ICMI por su sigla en inglés), así como destacar su relevancia para las comunidades locales de educadores matemáticos.

A tal efecto, se recurre a la Figura 1, que ilustra la estructura de ICMI y el lugar que ocupan los representantes nacionales en dicho marco. La figura corresponde a una versión parcial en español del diagrama original publicado en el sitio web oficial de ICMI-IMU; su traducción y uso en este escrito han sido autorizados oportunamente por la Secretaría General de ICMI.

Operativamente, el vínculo entre la IMU y la ICMI se articula a través de reuniones periódicas —virtuales o presenciales— entre sus autoridades. Desde 2011, los encuentros presenciales de trabajo de ICMI y/o ICMI-IMU se realizan en Berlín, en la sede del Instituto Weierstrass de Análisis Aplicado y Estocástica (WIAS).

### Designación de los representantes nacionales

Actualmente más de 90 países cuentan con representantes en ICMI, de los cuales, más de 80 son también miembros asociados a la IMU. Un país no miembro puede incorporarse al ICMI previa aprobación de los Comités Ejecutivos de ambas instituciones siempre que se

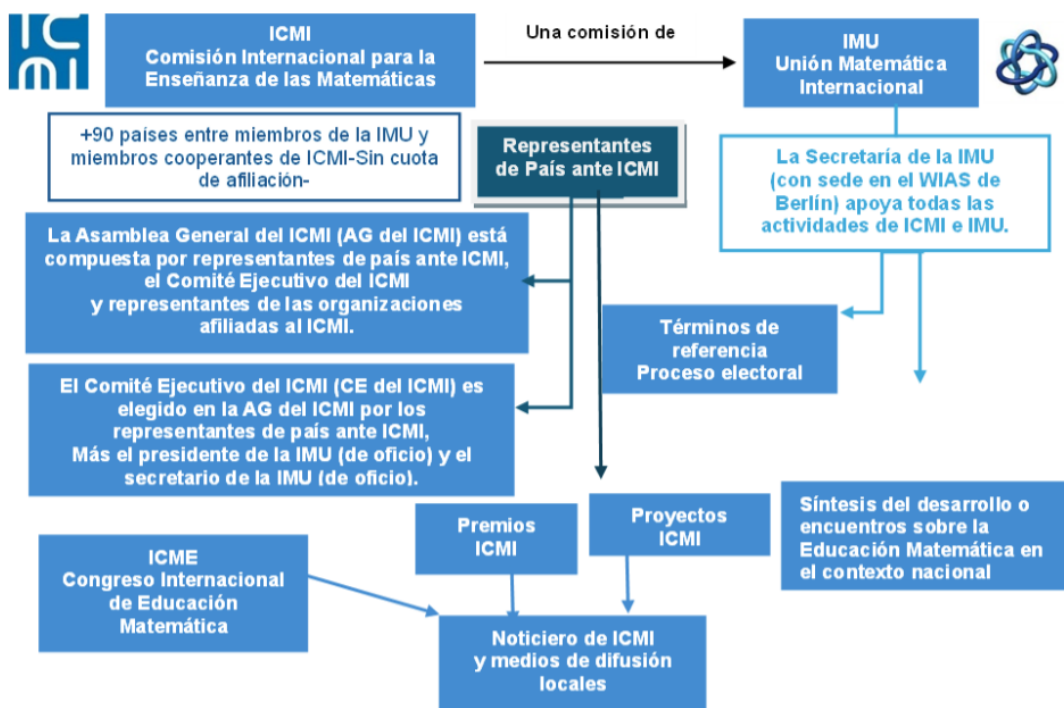


Figura 1: Diagrama representativo de la estructura de ICMI (versión recortada del original en inglés, traducción propia al español).

verifique la existencia de una participación coordinada entre actores relevantes del campo de la educación matemática

En el caso de Argentina, al ser la Unión Matemática Argentina (UMA) miembro de la IMU, la designación del representante nacional se realiza en coordinación con su Comisión de Educación y en diálogo con la comunidad local de educadores matemáticos, en concordancia con las normativas vigentes de ICMI.

## Funciones y responsabilidades

Una de las responsabilidades centrales del representante nacional es participar en la elección de los miembros del Comité Ejecutivo de ICMI -presidente, secretario general, dos vicepresidentes, cinco vocales- que se lleva a cabo cada cuatro años en el marco de la Asamblea General. Este proceso incluye una etapa previa de nominación a cargo de un comité específico, que recoge propuestas de las organizaciones adherentes y elabora la lista de candidatos que será considerada en la votación.

La última Asamblea General tuvo lugar en julio de 2024 en Sídney (Australia), ocasión en la que participó la Dra. M. Villarreal como representante por Argentina (2016–2024). En dicha instancia se eligieron las actuales autoridades del Comité Ejecutivo, cuyos miembros desarrollan sus actividades en diversos países. La próxima elección se realizará en 2028, en Praga, en el contexto del ICME 16.

En este proceso, resulta fundamental el rol del representante nacional en la circulación de información y en la consulta a la comunidad local, de modo de contribuir a una toma de decisiones informada y representativa.

Más allá de su participación en instancias electorales, los representantes nacionales intervienen en diversas actividades relevantes de ICMI. Entre ellas, se destacan su posible contribución en la organización de los Congresos Internacionales de Educación Matemática (ICME), la sugerencia de especialistas para estudios temáticos y conferencias, y la propuesta de candidaturas a los premios que reconocen aportes significativos en

investigación y práctica en educación matemática (como los premios Felix Klein, Hans Freudenthal y Emma Castelnuovo).

Asimismo, una tarea fundamental consiste en la difusión periódica, en el ámbito local, de las principales iniciativas, proyectos y eventos de ICMI, así como en la elaboración de informes sobre actividades nacionales para su publicación en el Noticiero de ICMI o Newsletter.

## Consideraciones finales

En Argentina, la difusión de estas iniciativas de ICMI se articula principalmente a través de la Comisión de Educación de la UMA y de los canales de difusión de noticias y novedades de la UMA, espacios que resultan clave para fortalecer la circulación de información y la participación de la comunidad.

El rol de representante nacional ante ICMI constituye, en este sentido, una oportunidad relevante no solo para promover la vinculación con iniciativas internacionales, sino también para contribuir al desarrollo y consolidación del campo de la educación matemática en el país, así como para visibilizar sus avances en el escenario internacional.

En este marco, resulta especialmente valioso y desafiante trabajar para fortalecer los lazos de colaboración entre la comunidad de matemáticos y la de educadores matemáticos, reconociendo la complementariedad de sus perspectivas y aportes. En este sentido, el rol del representante nacional puede contribuir a propiciar y sostener estos diálogos, favoreciendo una participación más articulada en iniciativas tanto locales como internacionales vinculadas con la educación matemática.

Finalmente, se agradece a la UMA y al equipo del Noticiero por brindar este espacio para dar a conocer el alcance y la relevancia de la función, del representante nacional ante ICMI.

## Comunicación de la ciencia

### La historia emocionante de una fórmula aburrida

Teo López Puccio



Lo que quiero contar trata de historia de la ciencia, astronomía, y matemática aplicada. Pero empieza en otro lugar.

Recuerdo estar cursando alguna de mis primeras materias de matemática en el ingreso a la universidad y que se me presentaran por primera vez unas fórmulas trigonométricas:

$$\sin(A - B) = \sin(A) \cos(B) - \sin(B) \cos(A) \quad (1.1)$$

$$\sin^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1 - \cos(A)}{2} \quad (1.2)$$

Quien fuera que estaba dando la clase dijo que no las demostraría: hoy sé que se usan rutinariamente, y son tan estándar que casi se dan por sabidas. Entonces, como yo ya era un chico grande, hice como todo buen aspirante a matemático: googleé alguna de las muchas demostraciones que existen de esas fórmulas, y sacié mi duda yo solito.

Pero en lo profundo siempre tuve una duda mayor, más difícil de resolver: ¿De dónde salieron? ¿Cómo se descubre algo así? **¿Quién quiso el seno de una resta y para qué?** La sensación era que ahí, hacía mucho tiempo, había habido alguien buscando algo. Y haberlo encontrado tiene que haber sido importante. ¿Qué era?

La respuesta la supe años después. Le habría fascinado a mi yo de 17 años, y ojalá le interese a alguien más: la primera aparición que se conoce de fórmulas de este estilo fue para intentar **comprender el movimiento de los planetas**. Pero tenían otra pinta.

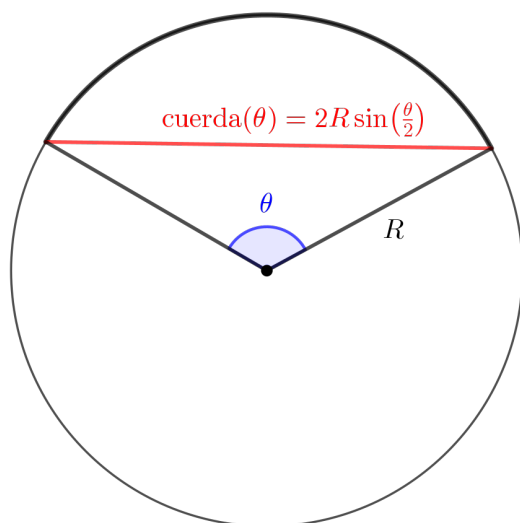
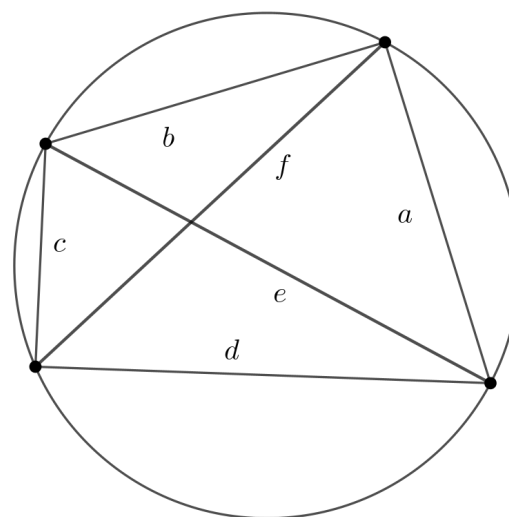

 Figura 1: Cuerda de un ángulo  $\theta$ 


Figura 2: Teorema de Ptolomeo

Alrededor del año 150 d.C., el astrónomo griego Claudio Ptolomeo publicó uno de los textos más importantes de la astronomía antigua. Hoy se conoce como “Almagesto”, que en árabe significa “el más grande”. El tratado sentó las bases del que sería el mejor modelo astronómico por casi catorce siglos: el modelo geocéntrico ptolemaico. La tierra se ponía en el centro del universo, sí, pero no por eso era un texto simple. Era un complejo catálogo de estrellas, y un manual pionero en matemática aplicada con un objetivo concreto: dar un modelo matemático para predecir el movimiento de los planetas.

Aunque suene moderno, el tono de Ptolomeo a lo largo del texto se siente como quien realmente busca que se ponga a prueba su teoría. Le ofrece al lector todo lo necesario para replicar sus propias observaciones, explica cómo construir los instrumentos que usa, y hasta permite dudas sobre algunas de sus propias hipótesis. ¿Y cómo comienza este texto científico? Con el resultado más verificable de todos: la demostración de un teorema.

### Teorema de Ptolomeo

Dado un cuadrilátero cuyos vértices están sobre una misma circunferencia, sean  $a, b, c, d$  sus lados (nombrados en orden), y  $e, f$  sus dos diagonales (fig. 2).

Entonces

$$a c + b d = e f$$

No daré su demostración acá, porque hoy no es mi intención. Definitivamente te incito a googlearla como hice yo con las fórmulas que no conocía. Vas a encontrar la misma demostración que dio Ptolomeo hace dos mil años, y eso de por sí es emocionante. Pero mi intención acá es explicar por qué el teorema existe, y qué tiene que ver con lo anterior.

Resulta que para hacer astronomía se necesitaba saber cuánto valía algo así como el seno y el coseno de muchos ángulos distintos. Algo que hoy le preguntaríamos a una calculadora. Pero la función trigonométrica de la época no eran nuestro seno y coseno, sino la *cuerda* (fig. 1). Si tenemos una circunferencia, digamos de radio  $R$ , y si tenemos un ángulo  $\theta$  en el centro abarcando cierto arco de la circunferencia, la **cuerda asociada al ángulo**  $\theta$  es simplemente la longitud del segmento que une los dos extremos del arco. Le diremos  $\text{cuerda}(\theta)$ . Si queremos traducir a nuestra forma moderna,

$$\text{cuerda}(\theta) = 2R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad \text{cuerda}(180^\circ - \theta) = 2R \cos\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (1.3)$$

Para algunos valores especiales de  $\theta$  la cuerda se puede hallar exactamente con facilidad. Por ejemplo,  $\text{cuerda}(60^\circ) = R$ ,  $\text{cuerda}(90^\circ) = \sqrt{2}R$ , etc. Fijando un valor de  $R$ , esto permitía calcular con precisión algunas pocas cuerdas. Pero si necesitamos una tabla completa para las cuerdas de *todos los ángulos de  $1^\circ$  a  $180^\circ$* , ¿cómo podemos hacerla?

Ptolomeo necesitaba una forma de combinar ángulos ya resueltos para obtener otros nuevos. O sea, si sabemos los valores de  $\text{cuerda}(A)$  y  $\text{cuerda}(B)$ , **queríamos poder hallar la cuerda( $A - B$ )**, o incluso la **cuerda( $\frac{A}{2}$ )**. Quizás ya sospeches un paralelismo con las fórmulas que presenté al principio. Y es para eso que Ptolomeo usa su teorema.

Ahora sí, apreciémoslo: el teorema de Ptolomeo es bellísimo por varias razones. Por ejemplo, si el cuadrilátero en cuestión es un rectángulo, tenemos  $a = c$ ,  $b = d$  y  $e = f$ , y nos devuelve  $a^2 + b^2 = e^2$ , el teorema de Pitágoras. Pero, más importantemente para Ptolomeo, su teorema está a un paso de darle una fórmula para la cuerda de una resta de ángulos. Para ver por qué, imaginemos que tenemos dos ángulos para los cuales ya conocemos sus cuerdas,  $A$  y  $B$ , y pongámoslos superpuestos en el centro de un semicírculo.

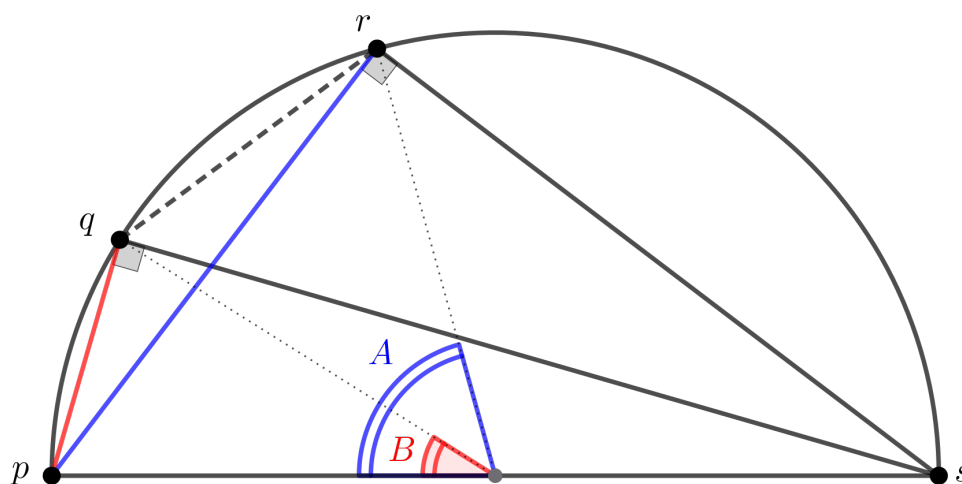


Figura 3: La cuerda de una resta de ángulos.

En este dibujo conocemos  $\text{cuerda}(A) = \overline{pr}$ ,  $\text{cuerda}(B) = \overline{pq}$  y el diámetro  $\overline{ps} = 2R$ . El primer truco es saber que, tan solo por estar inscritos en un semicírculo, los triángulos  $pqs$  y  $prs$  son triángulos rectángulos. Esto lo dejo para que el lector reflexione, pero era un hecho muy usado en geometría clásica. Sabiendo esto, en ambos triángulos conocemos dos de sus tres lados, así que podemos usar el teorema de Pitágoras para hallar  $\overline{qs}$  y  $\overline{rs}$ . Finalmente,  $pqr s$  es un cuadrilátero cuyos vértices se encuentran en una circunferencia, y del cual conocemos ya todos sus segmentos salvo  $\overline{qr}$ . El teorema de Ptolomeo es exactamente lo que necesitamos para hallar ese último lado, que es precisamente  $\text{cuerda}(A - B)$ .

Pero entonces, ¿la moraleja es que esto era “parecido” a nuestras fórmulas trigonométricas? No: lo que hicimos recién **es exactamente lo mismo que la fórmula 1.1**. Prepárate. Notemos que  $\overline{rs} = \text{cuerda}(180^\circ - A)$  y  $\overline{qs} = \text{cuerda}(180^\circ - B)$ . Si hacemos que el radio sea  $R = \frac{1}{2}$ , de modo que el diámetro  $\overline{ps}$  sea 1, y aplicamos el teorema de Ptolomeo, tendremos:

$$\text{cuerda}(A - B) = \text{cuerda}(A) \text{cuerda}(180^\circ - B) - \text{cuerda}(B) \text{cuerda}(180^\circ - A).$$

Si usamos la ecuación 1.3 para traducir cuerdas a las funciones seno y coseno, obtendremos

$$\sin\left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right) = \sin\left(\frac{A}{2}\right) \cos\left(\frac{B}{2}\right) - \sin\left(\frac{B}{2}\right) \cos\left(\frac{A}{2}\right)$$

y como esto vale para dos ángulos cualesquiera, ¡acabamos de probar la fórmula 1.1!

Para hallar una fórmula para la cuerda de la mitad de un ángulo, como 1.2, Ptolomeo usa un truco similar. Con esta técnica logra construir una tabla con los valores de las cuerdas de todos los ángulos hasta  $180^\circ$  en incrementos de  $\frac{1}{2}^\circ$ . Este trabajo numérico fue crucial para la adopción de su modelo: no solo publicó sus resultados, sino el método completo para construir la tabla, de forma que cualquiera pudiera detectar errores de copiado y mejorarla de ser necesario.

Esto cambió cómo veo estas fórmulas. Me produce algo muy especial abrir un texto tan antiguo, con pretensiones tan grandiosas, y encontrar estos mismos resultados que hoy son cotidianos, que a tantos alumnos se nos figuraron sin ninguna épica. Le da valor e historicidad a algo que no sabía que lo tenía. Pero es así: cada fórmula fue un hallazgo importante alguna vez, y saber sus historias vale la pena.

## Comunicación de la ciencia

### Ponete en mi lugar. Ejemplos de homogeneidad en geometría \*

Marcos Salvai

FAMAF (Universidad Nacional de Córdoba) y CIEM (CONICET)



#### Resumen

¿Con qué argumentos se puede justificar que los elementos de un conjunto son todos “lo mismo” en cierto sentido? La razón puede ser en principio ingenua, basada en (auto-)percepción o empatía, pero en aras de la precisión y para organizar mejor las ideas puede convenir recurrir a un grupo transitivo de transformaciones.

En esta nota presentamos tres ejemplos: a) Simetrías ocultas de una distribución de planos. b) Una distancia compatible con la homogeneidad en el conjunto de todas las elipses, que puede resultar extraña a simple vista. c) Un vistazo a la geometría de la esfera de Lie (admitir puntos como circunferencias de radio cero en este contexto).

## Homogeneidad

Se puede pensar que los triángulos en la Figura 1 son los mismos, ya que solo la posición y el tamaño son diferentes, o bien que no lo son, con la misma explicación sin la palabra “solo”. En el primer caso viene a la mente el grupo  $G$  generado por todos los movimientos rígidos y las homotecias del plano, y abre la posibilidad de que una cantidad infinita de triángulos sean también los mismos que los dos dados.

Con esta motivación, consideraremos conjuntos con un grupo de transformaciones transitivo adecuado. Esto nos dará la idea de que no hay elementos distinguidos y que no omitimos ninguno.

Sea  $A$  un conjunto. Recordamos que un conjunto  $G$  de transformaciones biyectivas de  $A$  (funciones biyectivas de  $A$  en  $A$ ) forma un **grupo** si  $f^{-1}$  y  $f \circ g$  pertenecen a  $G$  cuando  $f$  y  $g$  pertenecen a  $G$ .

\*Publicado originalmente como Salvai, M. If You Were in My Shoes: Examples of Homogeneity in Geometry. Math Intelligencer 47, 323–326 (2025).

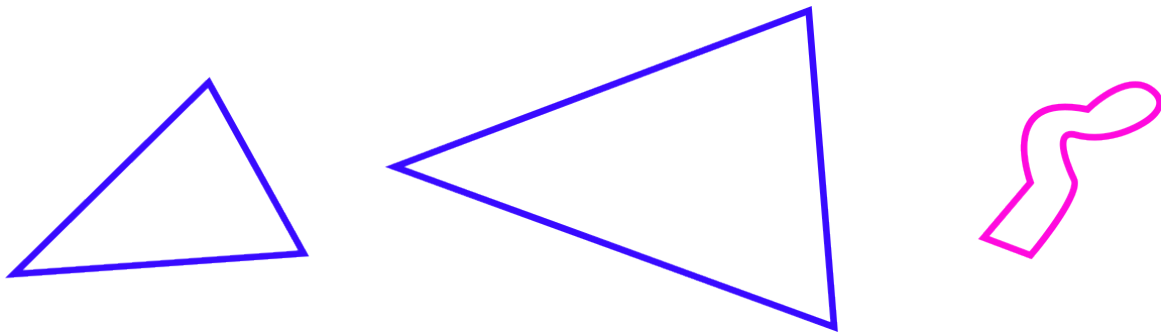


Figura 1: ¿Dos triángulos diferentes o el mismo triángulo en diferentes tamaños y posiciones?

El grupo  $G$  es **transitivo** en  $A$  si para cada  $p, q \in A$  existe  $f \in G$  tal que  $f(p) = q$ . Invitamos al lector o a la lectora a relacionar las propiedades de una acción transitiva con las características de “ser lo mismo”, por ejemplo, que  $b$  es lo mismo que  $a$  si  $a$  es lo mismo que  $b$ .

Así, ningún punto de la esfera es especial, y podemos tomar como grupo de transformaciones transitivo el grupo  $G$  de todas las rotaciones alrededor del centro. De manera similar para los subespacios de dimensión  $k$  de un espacio vectorial de dimensión  $n$ , con  $G = GL(n, \mathbb{R})$ , el grupo lineal general (cuyos elementos llevan subespacios en subespacios, preservando la dimensión).

Encontrar un grupo transitivo de transformaciones puede contribuir a una mejor comprensión y precisión; además, a descubrir nuevos objetos que son lo mismo que los que ya tenemos y que no habíamos tomado en consideración. Por supuesto, podemos elegir el grupo transitivo guiándonos por nuestros instintos. Incluso podemos forzar que todos los elementos de un conjunto sean lo mismo, mediante el grupo de todas las biyecciones (por ejemplo, si estamos convencidos, por alguna razón que no podemos discernir, de que el tercer dibujo de la figura 1 encaja bien con los triángulos).

La búsqueda de la homogeneidad es una expresión de la máxima de **Gottfried Leibniz** *la unidad en la diversidad*. Es el punto central del **programa de Erlangen**, de **Félix Klein**, que ha influido significativamente en la geometría desde su publicación en 1872. Si un conjunto exhibe lo que se reconoce claramente como simetría, pero ningún grupo transitivo de transformaciones parece adecuado, quizás convenga darle una mirada al concepto de grupoide [7].

Presentamos tres ejemplos concretos. Pertenecen al ámbito de la geometría, por un lado, porque involucran simetrías y, por el otro, porque tratamos con conjuntos formados por objetos geométricos, es decir, conjuntos cuyos elementos son ciertos subconjuntos del espacio euclidiano (pero no en sí mismos puntos del espacio euclidiano, en contraste con la concepción primitiva del alcance de la geometría).

El patrón de cada ejemplo es el siguiente. En primer lugar, damos razones ingenuas para que el conjunto no tenga elementos distinguidos; a continuación, buscamos un grupo transitivo de transformaciones, confirmando así el objetivo expresado anteriormente. En el segundo ejemplo, exploramos además las implicaciones de la homogeneidad en la noción de distancia.

## Simetrías de una distribución de planos en $\mathbb{R}^3$

Sea  $\mathcal{P}$  el conjunto de planos punteados dispuestos como en la Figura 2, que es una de las presentaciones de la forma de contacto estándar en  $\mathbb{R}^3$ . A cada punto  $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  le asignamos el plano

$$P_p = \text{span} \{(1, 0, y), (0, 1, -x)\}$$

por  $p$  (el origen descansa en  $p$ ). Solo están representados los planos  $P_{(x,y,0)}$ ; la disposición es la misma en el nivel  $z = c$  para todo  $c$ , es decir, es invariante por traslaciones verticales.

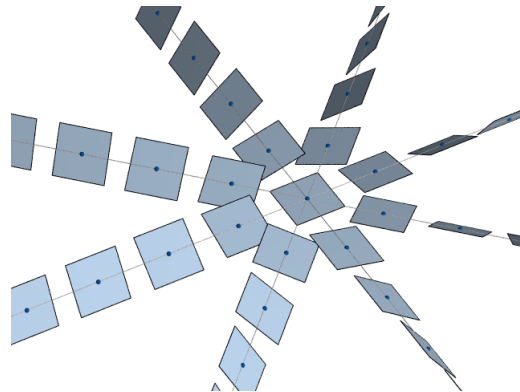


Figura 2: La distribución de contacto estándar. Dibujo de Patrick Massot

De hecho, el plano en el medio puede no ser especial. **Recurrimos a la empatía:** Otro plano va a ver los planos alrededor de él con diversas pendientes, de manera no muy diferente que desde la perspectiva del plano ubicado en el origen.

Una de las ideas fundamentales de esta nota es reforzar esto encontrando un grupo transitivo  $G$  de transformaciones de  $\mathcal{P}$ . Podemos tomar como  $G$  una de las personificaciones del grupo de Heisenberg, como se muestra a continuación.

Para  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , sea  $F_{a,b,c} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la transformación afín definida por

$$F_{a,b,c}(x, y, z) = A_{a,b}(x, y, z) + (a, b, c),$$

con  $A_{a,b} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $A_{a,b}(x, y, z) = (x, y, z - ay + bx)$ .

No es difícil verificar que  $G = \{F_{a,b,c} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$  es un grupo transitivo de transformaciones de  $\mathbb{R}^3$  que induce, a través de sus aproximaciones lineales, es decir, sus diferenciales  $(dF_{a,b,c})_p = A_{a,b}$ , un grupo transitivo de transformaciones de  $\mathcal{P}$ . Esto sigue del cálculo directo  $A_{a,b}(P_{(x,y,z)}) = P_{F_{a,b,c}(x,y,z)}$ .

Hay simetrías obvias que no se han tenido en cuenta en la elección de  $G$ , a saber, las rotaciones  $R_t$  en un ángulo  $t$  alrededor del eje  $z$ . En efecto, el conjunto de todas las aplicaciones  $F_{a,b,c} \circ R_t$ , con  $a, b, c, t \in \mathbb{R}$ , es un grupo transitivo de biyecciones de  $\mathcal{P}$  que contiene a  $G$  como un subconjunto propio; se denomina grupo oscilador. En realidad, el grupo de transformaciones suaves de  $\mathbb{R}^3$  con inversas suaves que conservan la distribución de planos  $\mathcal{P}$  es de dimensión infinita (véase, por ejemplo, el corolario 2.6.3 en [3]).

## Peculiaridades de una manera afínmente invariante de medir la distancia entre elipses

Recordamos que una elipse (con ejes no necesariamente paralelos a los ejes coordenados) es un conjunto congruente a  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} = 1\}$ , para ciertos  $\alpha, \beta > 0$ , por el grupo de transformaciones rígidas del plano. Sea  $\mathcal{E}$  el conjunto de todas las elipses en el plano, que pueden parametrizarse localmente con cinco números reales (por ejemplo, dos números determinan el centro, otros dos, los tamaños de los ejes, y el quinto, la pendiente de uno de los ejes).

Si no queremos favorecer a las circunferencias, podemos hacer actuar en  $\mathcal{E}$  el grupo  $\mathcal{A}$  de transformaciones afines del plano, de la manera canónica. Las aplicaciones en  $\mathcal{A}$  son aquellas  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de la forma  $T(u) = Au + a$  para alguna matriz  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  con  $\det A > 0$

y  $a \in \mathbb{R}^2$ . Llevan elipses en elipses, aunque no se conservan los ejes. No es difícil demostrar que la acción de  $\mathcal{A}$  en  $\mathcal{E}$  es transitiva.

Si sos una elipse, la acción afín te impide percibir la proporción entre las longitudes de tus ejes. Mirás a tu alrededor y ves que las elipses vecinas son más estrechas o más anchas que vos en determinadas direcciones, pero la redondez ya no es un factor relevante.

Se dice que una función de distancia  $d$  en  $\mathcal{E}$  es compatible con la acción de  $\mathcal{A}$  si para cualquier par de elipses  $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$  y para cualquier transformación afín  $F$  tenemos

$$d(F(E_1), F(E_2)) = d(E_1, E_2). \quad (1.1)$$

En realidad existen funciones de distancia que satisfacen esta propiedad: Las elipses pueden identificarse naturalmente con distribuciones normales bivariadas (superficies de campanas gaussianas con secciones horizontales elípticas) y la forma canónica de medir la distancia entre ellas, dada por la métrica de Fisher-Rao, es invariante por transformaciones afines; lamentablemente, no parece existir una fórmula explícita para ella. Comentamos esto al final de la sección.

Estudiamos el ejemplo de dos circunferencias de radio 1 cuyos centros están separados por 4 unidades de longitud (las circunferencias azules de la figura 3). Les aplicamos la transformación lineal  $F$  de  $\mathbb{R}^2$  determinada por  $F(e_1) = 4e_1$ ,  $F(e_2) = \frac{1}{4}e_2$ , que pertenece a  $\mathcal{A}$  ( $a = 0$ ), obteniendo las elipses rojas.

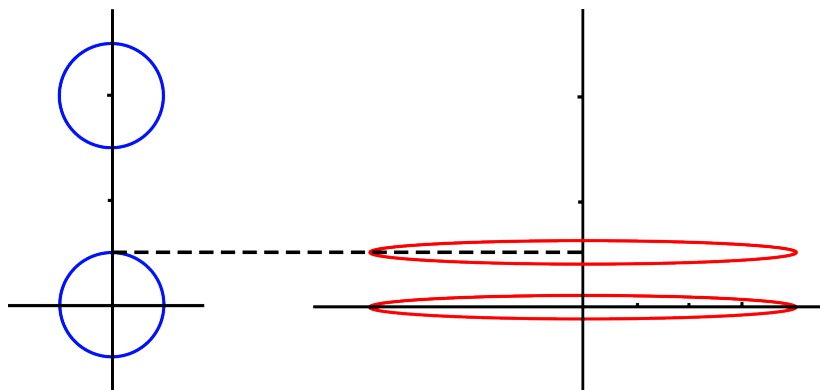


Figura 3: Las dos circunferencias azules y sus imágenes por el mapeo  $F$

Observamos algo que a primera vista parece una contradicción con (1.1): Si  $d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$  es compatible con la acción de  $\mathcal{A}$ , la distancia entre las elipses azules (circunferencias) es la misma que entre las rojas, aunque a primera vista estas últimas parecen estar más cerca entre sí que las primeras.

Interpretamos el fenómeno como que cada elipse toma su propio cuerpo como referencia para estimar la distancia a sus vecinas. Así, se puede explicar diciendo que, dado que las elipses rojas son delgadas verticalmente, se mueven verticalmente con pasos cortos.

Como lo hemos anunciado anteriormente, comentamos la existencia de una distancia afinmente invariante en  $\mathcal{E}$ . Sea  $\text{Symm}_+(2)$  el conjunto de todas las matrices simétricas  $2 \times 2$  definidas positivas (en particular, sus elementos diagonalizan con respecto a bases ortonormales). Dados  $c \in \mathbb{R}^2$  y  $C \in \text{Symm}_+(2)$ , el conjunto

$$E(c, C) = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \langle C^{-1}(z - c), z - c \rangle = 1\}$$

es una elipse (y cualquier elipse tiene esta forma). Está centrada en  $c$  y las rectas propias de  $C$  son los ejes. Por ejemplo, para  $\alpha, \beta > 0$ ,  $E(0, \text{diag}(\alpha, \beta))$  es la elipse presentada al principio de la sección. Esto induce una biyección de  $\mathcal{E}$  con  $\mathbb{R}^2 \times \text{Symm}_+(2)$ , que puede

considerarse como un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^5$  (obsérvese que  $C_{12} = C_{21}$ ). Se puede aplicar la transformación afín  $z \mapsto a + Az$  a la elipse  $E(c, C)$ , obteniendo

$$a + A(E(c, C)) = E(a + Ac, ACA^T),$$

donde  $T$  denota la transpuesta. Esto da una acción transitiva de  $\mathcal{A}$  en  $\mathcal{E}$ . El estabilizador de la circunferencia de radio 1 centrado en el origen es el grupo de rotaciones alrededor del origen. Al ser este grupo compacto, un resultado clásico (véase, por ejemplo, [5], Teorema 3.17) implica que  $\mathcal{E}$  admite una manera afínmente invariante de asignar longitudes a curvas suaves en  $E$ , es decir, la longitud de  $F \circ \varepsilon$  es la misma que la longitud de  $\varepsilon$  para cualquier curva  $\varepsilon$  en  $\mathcal{E}$  y cualquier  $F \in \mathcal{A}$ . La distancia entre dos elipses es ahora el mínimo de las longitudes de las curvas suaves a trozos en  $\mathcal{E}$  que las unen, y conserva la propiedad de invariancia.

Concretamente, no es difícil demostrar que la manera de medir las longitudes de las curvas en  $E$  de Fisher-Rao es afínmente invariante. Se define así: Sea  $\varepsilon : [a, b] \rightarrow E$  una curva. Si  $\varepsilon(t) = E(c_t, C_t)$  (con  $c_t$  vectores de columna), la longitud al cuadrado del vector velocidad  $\varepsilon'(t)$  viene dada por

$$\|\varepsilon'(t)\|^2 = (c_t')^T C_t^{-1} c_t + \frac{1}{2} \text{tr} \left( (C_t^{-1} c_t')^2 \right)$$

y, como es habitual,  $\text{long}(\varepsilon) = \int_a^b \|\varepsilon'(t)\|^2 dt$ . Para ello, véase, por ejemplo, [4]. Nuestros argumentos intuitivos anteriores coinciden con la siguiente interpretación de este último artículo: Desde el punto de vista estadístico, el tamaño de la elipse (que representa una superficie gaussiana en forma de campana) indica con qué precisión (dada por  $C^{-1}$ ) se conoce el centro, y cuanto mayor es la precisión, más esfuerzo se necesita para desplazar el centro. En ese artículo también se pueden encontrar imágenes de geodésicas en  $E$  (curvas en  $E$  que minimizan la distancia localmente).

Por último, podemos plantear la siguiente pregunta: En este contexto, ¿cuál es la trayectoria más corta de las elipses que unen las dos circunferencias azules (o las dos elipses rojas)? Consiste en elipses que son más grandes que las de los extremos (véase, por ejemplo, la sección 3.1 en [1]), ya que las elipses más grandes cubrirán distancias grandes más fácilmente. Es una situación similar a la de [6].

## Una mirada a la geometría de la esfera de Lie

Una circunferencia en la esfera  $S^2 = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \|p\| = 1\}$  es la intersección de  $S^2$  con un plano en  $\mathbb{R}^3$  a una distancia menor que 1 del origen; véase la figura 4 (izquierda). Consideramos el conjunto

$$\mathcal{C} = \{\text{circunferencias orientadas sobre la esfera}\}.$$

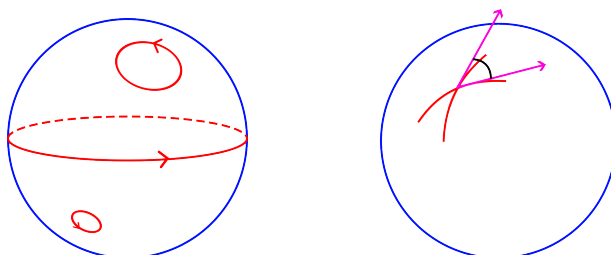


Figura 4: *Izquierda*: Circunferencias orientadas sobre la esfera. *Derecha*: El ángulo entre dos curvas que se cortan.

Los circunferencias *máximas* orientadas parecen elementos especiales de  $\mathcal{C}$ , pero si queremos poner todas las circunferencias en igualdad de condiciones, podemos considerar el grupo  $G$  de transformaciones conformes de la esfera (las que preservan el ángulo formado por dos curvas que se cortan; véase la figura 4 (derecha)), que llevan circunferencias en circunferencias de manera transitiva. El grupo  $G$  e puede realizar mediante transformaciones de Möbius del plano extendido  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , a través de la proyección estereográfica.

Ahora bien, ¿podemos ampliar el criterio para que los puntos y las circunferencias sean “lo mismo” en cierto sentido? Una respuesta es: Sí, **los puntos son circunferencias de radio cero**.

Pero recordemos el **efecto reconfortante de tener un grupo transitivo** de transformaciones de nuestro conjunto, que es la esencia de esta nota. Así que llamamos  $\widehat{\mathcal{C}}$  al conjunto de todas las circunferencias orientadas y puntos de la esfera,

$$\widehat{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \cup \{\{p\} \mid p \in S^2\},$$

y buscamos un grupo  $\widehat{G}$  que actúe en  $\widehat{\mathcal{C}}$ . Lo hacemos recurriendo a la geometría de la esfera de Lie, para lo cual nos remitimos al capítulo 15 de [2]. Observamos que ninguna biyección de la esfera envía un punto a una circunferencia. Por lo tanto, se usa un artificio: Ajustamos coronas a círculos y puntos orientados; estas consisten en flechas de longitud unitaria tangentes a la esfera, como en la figura 5 (una circunferencia no orientada admite dos coronas, con flechas ortogonales a la circunferencia; la orientación de estas últimas determina qué corona se elige).

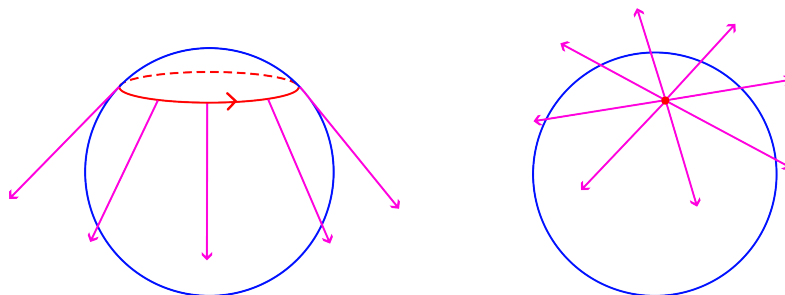


Figura 5: Coronas en circunferencias orientadas y puntos de la esfera

Sea  $\mathcal{D}$  el conjunto de coronas. Existe una biyección natural entre  $\mathcal{D}$  y  $\widehat{\mathcal{C}}$ , por lo que podemos hacer que  $\widehat{G}$  actúe sobre  $\mathcal{D}$ . Observamos que cada corona es un subconjunto de

$$\mathcal{T} = \{\text{flechas de longitud 1 tangentes a la esfera}\}.$$

Para cada  $t \in \mathbb{R}$  tenemos la transformación biyectiva  $\phi_t : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$  representada en la figura 6. Dados  $u \in \mathcal{T}$  y  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\phi_t(u)$  se define como el resultado de mover  $u$  una distancia  $|t|$  a lo largo del círculo máximo determinado por  $u$ , hacia adelante o hacia atrás, dependiendo del signo de  $t$  (véase la figura 6;  $\phi$  se denomina flujo geodésico de la esfera).

Se puede demostrar que  $\phi_t$  lleva coronas en puntos o circunferencias en coronas en puntos o circunferencias. Ahora estamos en condiciones de presentar un grupo  $\widehat{G}$  con las características deseadas. Podemos tomar como  $\widehat{G}$  el grupo de todas las transformaciones generadas por los mapeos conformes y las transformaciones  $\phi_t$  ( $t \in \mathbb{R}$ ), que afortunadamente resulta ser de dimensión finita; de hecho, tiene dimensión 10. Esto corrobora que la introducción de las coronas tiene un efecto de equiparación sobre las circunferencias y los puntos. Comentamos que al aplicar (las diferenciales de) las

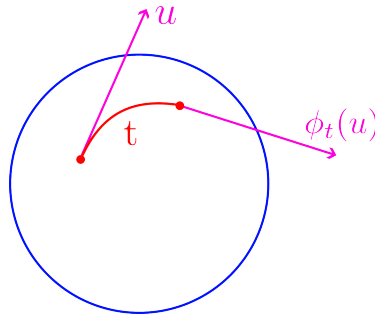


Figura 6: El flujo geodésico de la esfera

aplicaciones conformes a las coronas, se debe realizar una normalización a la longitud unitaria.

Existe un análogo de la teoría anterior para puntos e hiperesferas orientadas en  $S^n$ , que pueden parametrizarse localmente mediante  $n + 1$  números reales. El grupo  $\widehat{G}$  resulta ser localmente isomorfo al grupo de automorfismos de la forma cuadrática  $b$  en  $\mathbb{R}^{n+3}$  dada por  $b(s, t, x_1, \dots, x_{n+1}) = -s^2 - t^2 + x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2$ , de dimensión  $\frac{1}{2}(n+3)(n+2)$ .

**Agradecimientos.** Este trabajo ha sido parcialmente financiado por la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional de Córdoba, Argentina. Quisiera agradecer también a Patrick Massot por permitirme utilizar una de sus fotografías, a Mabel y Ramiro Salvai por su ayuda con el idioma inglés y las ilustraciones, y al Instituto Max Planck de Matematica (Bonn, Alemania) por la hospitalidad durante la redacción de esta nota.

## Referencias

- [1] Costa, S.I.R., Santos, S.A., Strapasson, J.E.: Fisher information distance: a geometrical reading. *Discrete Appl. Math.* **197**, 59–69 (2015)
- [2] Jensen, G., Musso, E., Nicolodi, L.: *Surfaces in classical geometries. A treatment by moving frames.* Universitext. Springer, Cham (2016)
- [3] Geiges, H.: *An introduction to contact topology.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 109. Cambridge University Press, Cambridge (2008)
- [4] Lawson, B.A.J., Burrage, K., Mengersen, K., Weber dos Santos, R.: *The Fisher Geometry and Geodesics of the Multivariate Normals, without Differential Geometry.* arXiv:2306.01278 math.ST
- [5] Lee, J.M.: *Introduction to Riemannian manifolds.* Graduate Texts in Mathematics, 176. Springer, Cham (2018)
- [6] Salvai, M.: Another motivation for the hyperbolic plane. *Segments moving on the line.* *Math. Intell.* **29**(2), 6–7 (2007)
- [7] Weinstein, A.: Groupoids: unifying internal and external symmetry. A tour through some examples. *Notices Am. Math. Soc.* **43**(7), 744–752 (1996)

## Misceláneas

### El marginal

Antonio Cafure

Universidad Nacional de General Sarmiento - CONICET



### 1. La belleza desnuda

Corría el año 1847. Tras años de ostracismo, la matemática inglesa volvía a florecer y a situarse en el centro de la escena. Una nueva generación de matemáticos ilustres, con ideas nuevas y poderosas, volvía a iluminar el continente. Cayley, Hamilton y Sylvester gestaban el álgebra abstracta. Dos textos capitales veían la luz y sentaban las bases de la lógica formal: *The Mathematical Analysis of Logic* de Boole y *Formal Logic* de De Morgan.

Ese mismo año, un ingeniero y agrimensor del asentamiento de la reina Victoria en las Islas Malvinas publicaba una versión ilustrada e inusitada de los *Elementos* de Euclides. El texto llevaba por título *The First Six Books of the Elements of Euclid in which Coloured Diagrams and Symbols are Used for the Greater Ease of Learners*. Su autor, Oliver Byrne, aspiraba revolucionar la enseñanza de la geometría.

En la introducción a la obra, Byrne deja en claro sus intenciones y sus expectativas:

Quizás esta sea la única mejora que ha recibido la geometría plana desde los días de Euclides, y si hubo algunos geómetras notables antes de ese tiempo, el éxito de Euclides ha eclipsado bastante su memoria, e incluso ocasionó que todas las cosas buenas de ese tipo fueran asignadas a él; como Esopo entre los escritores de fábulas.

Durante más de dos mil años los *Elementos* constituyeron un museo de grandes novedades, un edificio imponente y generoso, admirable, abierto a todo aquel que se animara a recorrer sus pisos, sus habitaciones, sus salas de práctica. Fue visitado por geómetras, filósofos, científicos, religiosos, estudiosos, artistas y aventureros de todas las latitudes y de toda laya. Algunos buscaban entender las herramientas y los materiales con los que se habían construido ciertos espacios; otros embellecían algunas dependencias. Algunos otros sucumbían sin más ante la belleza sin par de esa obra maestra, de esa proeza del pensamiento. La poetisa estadounidense Edna St. Vincent Millay lo expresó magistralmente en el verso inicial de su poema "Euclid alone": *Euclid alone has looked on Beauty bare* (Solo Euclides ha contemplado la belleza desnuda)..

---

Traducción del autor

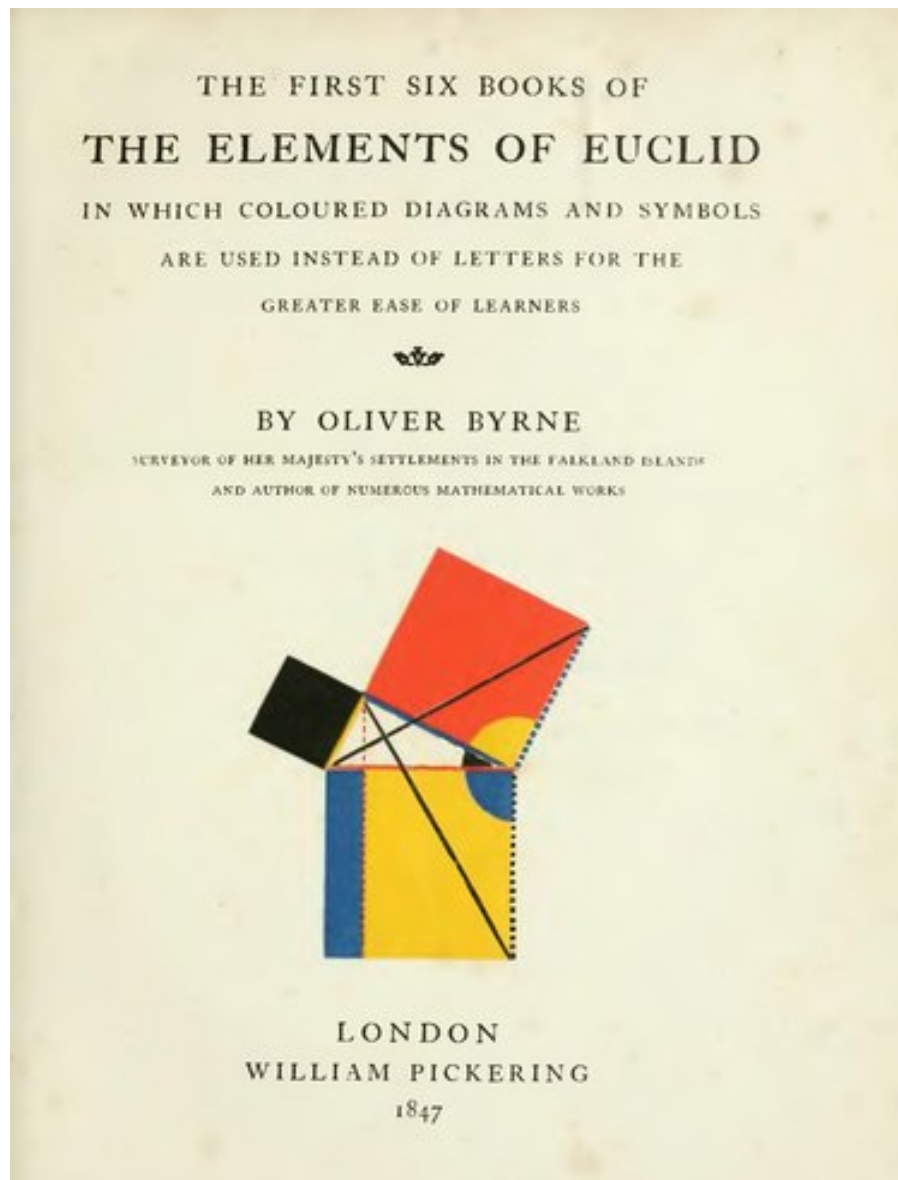


Figura 1: Portada

Así como sucede con algunos nombres propios que dan origen a adjetivos que los trascienden (una escena dantesca, un plan maquiavélico, una tarea quijotesca), Euclides dejó una huella imperecedera: geometrías no euclidianas, espacio euclidiano, algoritmo euclidiano, anillo euclidiano, diseños euclidianos. Aún hoy su epopeya sigue siendo una fuente de inspiración. Así lo expresa el historiador de la matemática Benjamin Wardhaugh en su libro *Encounters with Euclid: How an Ancient Greek Geometry Text Shaped the World* (2021):

Durante veintitrés siglos, los *Elementos* de Euclides han transformado el mundo. Este compendio sobre el espacio y sus propiedades -líneas, formas, números y razones- ha cautivado a innumerables lectores, atrayéndolos hacia su inmenso universo de bellezas abstractas e ideas puras. Y ha sido un viaje extraordinario. Pocos objetos sobreviven al derrumbe de la civilización que los creó; pocos textos sobreviven al olvido de la lengua en que fueron escritos. Los *Elementos* han sobrevivido a ambos.

No cabe el más mínimo atisbo de duda, el acuerdo es total. Como indica Wardhaugh, la obra de Euclides moldeó de manera definitiva el mundo. Este es el libro que Oliver Byrne se proponía renovar.

## 2. La revolución es un sueño eterno

Byrne era un ferviente defensor de la enseñanza basada en imágenes. Entendía que este enfoque facilitaba de manera decisiva la comprensión de distintas disciplinas, en particular, la matemática:

La experiencia de todos los que han elaborado sistemas para inculcar los hechos sobre el entendimiento, demuestra que las representaciones con colores, como imágenes, cortes, diagramas, etc., se fijan más fácilmente en la mente que las simples oraciones sin ninguna particularidad. Por curioso que parezca, los poetas parecen ser más conscientes de este hecho que los matemáticos; muchos poetas modernos aluden a este sistema visible de comunicación del conocimiento, uno de ellos ha expresado sus razones:

*Sounds which address the ear are lost and die  
In one short hour, but these which strike the eye,  
Live long upon the mind, the faithful sight  
Engraves the knowledge with a beam of light*

Los sonidos llegan al oído, se pierden y mueren  
en una breve hora. Lo que nos conmueve, lo  
que perdura en nuestra mente, lo que graba el conocimiento  
como si fuera un rayo de luz: la vista fiel

Con esta convicción, Byrne emprendió la ambiciosa tarea de elaborar una versión ilustrada y a colores de los *Elementos*: rojo, azul, amarillo y negro. Su revolución consistía en dejar que las imágenes se explicaran por sí solas, casi como una anticipación de las “proofs without words”.

Su punto de partida fue la edición de los *Elementos* elaborada por el matemático escocés Robert Simson en 1756, quien editó los libros I a VI junto con el XI y el XII. Durante muchos años esta edición, la primera escrita en inglés, fue la versión más difundida en el Reino Unido. Como señala Wardhaugh, en la Gran Bretaña del siglo XIX, “Euclides” era principalmente, aunque no en forma exclusiva, “la popular edición inglesa de Robert Simson (1756), y sus varias y variadas imitaciones y reformulaciones”. Estas eran ediciones “escolares” de los *Elementos* que, antes que la fidelidad textual, privilegiaban la “pedagogía”, ese concepto siempre dudoso, arbitrario, y librado a las diferentes interpretaciones de las personas.

Byrne buscó elaborar un texto fiel al de Simson, pero supeditado a su concepción pedagógica y su interés por difundir la palabra euclidiana. Sostenía que el estudio y aprendizaje de la geometría, además de acercarnos a la contemplación de la belleza que mencionaba Millay, constituía al mismo tiempo una forma de liberación intelectual.

Los enunciados siguen la tradición heredada de siglos y son casi idénticos a los de Simson. De todos modos, Byrne se permite introducir gráficos que ilustran algunos de los conceptos básicos: lado, ángulo, triángulo, circunferencia.

La mayor innovación se encuentra en las demostraciones. Van al grano, con una distribución austera de palabras, unas pocas que se repiten y se repiten, dedicadas a presentar los argumentos con el rigor correspondiente.

El aspecto más notable de la edición, una proeza editorial para la época, es la distribución armónica de texto e imágenes en la página. Ambos forman un conjunto

único, como si cada enunciado y su demostración constituyeran una pintura digna de ser contemplada.

La Figura 2 permite apreciar claramente el singular estilo del Euclides de Byrne. Muestra el enunciado y la demostración de la proposición 32 del Libro I: la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos.

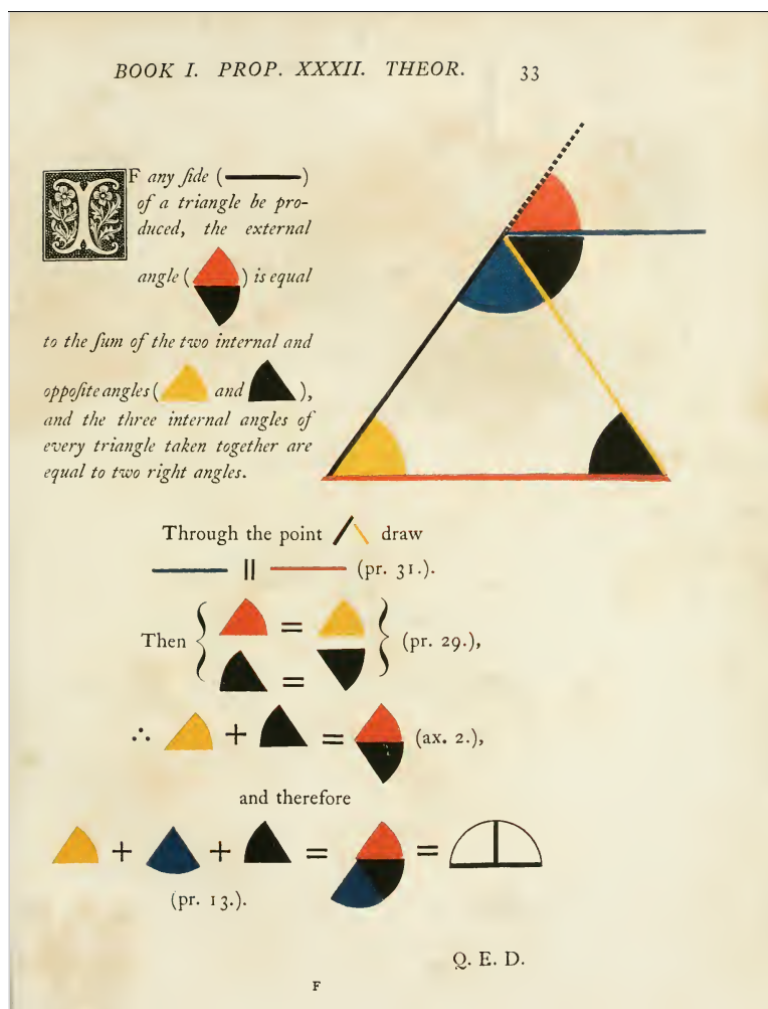


Figura 2: La suma de los ángulos interiores

Byrne insistió siempre en que no lo impulsaban inclinaciones o motivaciones artísticas. Sus decisiones eran de carácter puramente intelectual, lo movilizaba un interés genuino por difundir el conocimiento matemático.

### 3. Tras su manto de neblinas

Nadie se sorprendió demasiado con el Euclides de Byrne, menos que menos, la comunidad matemática. El precio exorbitante del texto no colaboró con la causa, las ventas fueron escasas. Años después el editor se declaró en bancarrota. La revolución en ciernes de la enseñanza de la matemática quedó trunca.

A diferencia de otros fantasmas que recorrían Europa en esos tiempos, el fantasma de la geometría no euclidiana asustaba cada vez menos; es más, comenzaba a ser recibido con los brazos abiertos por la comunidad matemática que lentamente abandonaba el recelo con que la había considerado. Lo no euclidiano asomaba su cabeza y el mundo

matemático entendía que su existencia era real. Se abrían las puertas de nuevos mundos. En consecuencia, el valor matemático y pedagógico de un nuevo libro que tratara de Euclides no parecía ser algo digno de consideración, menos si la innovación propuesta descansaba sobre la inclusión de diagramas y colores. Los matemáticos ingleses estaban abocados a expandir las fronteras del pensamiento matemático, sentando las bases de nuevas teorías que serían fundamentales para el desarrollo de nuestra disciplina.

Aunque Byrne era agrimensor al servicio de la reina Victoria -lo que da una idea de cierto estatus-, las evidencias sugieren que no pertenecía a la clase alta académica ni gozaba de prestigio como matemático. Existía un modo de enseñar, aprender y transmitir geometría; no parecía razonable que alguien como él se atreviera siquiera a imaginar que su creación pudiera reemplazar los modos tradicionales de acercamiento a la geometría.

Con todo, el libro fue presentado en la Gran Exposición de Londres de 1851, la primera exposición universal de la historia, como una muestra destacada de la innovación técnica y artística de la industria editorial británica: un objeto de diseño industrial y excelencia técnica y estética.

Byrne continuó predicando sin éxito, hasta el final de sus días, los beneficios del uso de colores en la enseñanza de la geometría. Fue una suerte de buscavidas, todos sus proyectos lo condujeron a una derrota inexorable. Escribe Wardhaugh:

Sus proyectos para reformar la enseñanza de la matemática no inspiraron a sus contemporáneos; es más, en un escrito solicitando apoyo financiero escribió que “parece que todos mis libros, inventos y descubrimientos importantes sólo me causan problemas”.

Hacia el año 2000 algunas de las páginas de su Euclides comenzaron a difundirse online. Internet amplificó el impacto y cada vez más gente empezó a querer conocer más sobre el autor de esta obra de arte. ¿Cómo había sido posible que esa maravilla se editara en 1847?

En 2010, la prestigiosa editorial Taschen, especializada en arte, fotografía, diseño y arquitectura, editó una reproducción del libro.

En 2018, el diseñador gráfico Nicholas Rougeux le dio forma al sueño de Byrne. Creó el sitio web Byrne's Euclid en el que la obra completa se expresa en toda plenitud gracias a las posibilidades que brinda la tecnología: diagramas interactivos, referencias cruzadas y, como si fuera poco, una tienda virtual en la que se pueden adquirir pósteres y rompecabezas que reúnen todos los gráficos presentes en el libro. La labor de Rougeux, a todas luces superlativa, incluyó un minucioso trabajo de diseño con el fin de recrear las tipografías y los colores originales.

Como colofón, en 2019 la editorial boutique Kronecker Wallis editó los trece libros de los *Elementos* a la manera de Byrne, completando la tarea que había quedado inconclusa.

Byrne nació el año de nuestra revolución de mayo, y murió en 1880, el año de otra revolución que sentó las bases de la Argentina moderna. No hay evidencia de que haya pisado las Islas Malvinas.

## Misceláneas

### El día que Newton se equivocó

Pablo Groisman

Departamento de Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UBA

e IMAS-CONICET



### Introducción

El 22 de noviembre de 1693, Samuel Pepys le escribió una carta nada menos que a Isaac Newton preguntándole:

**¿cuál de las siguientes tres proposiciones tiene más chances de ocurrir?**

- A. Se lanzan 6 dados equilibrados y obtenemos al menos un  $\square$ .
- B. Se lanzan 12 dados equilibrados y obtenemos al menos dos  $\square$ .
- C. Se lanzan 18 dados equilibrados y obtenemos al menos tres  $\square$ .

El hecho de que sean 6 lanzamientos (o  $2 \cdot 6 = 12$ , o  $3 \cdot 6 = 18$ ) y el dado tenga 6 caras no es casual, pero ocuparse de la cara  $\square$  no tiene nada de especial para lo que nos ocupa, así que nosotros acá vamos a cambiar el  $\square$  por  $\square$  para separar la paja del trigo. Nos concentraremos en la cantidad de  $\square$  obtenidos en lugar de los  $\square$ .

Pepys fue un funcionario naval, político y célebre en tanto diarista, pero ejerció como presidente de la Royal Society of London entre 1684 y 1686, justo el momento en que Newton presentó ahí su *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* para que fuera publicado luego en 1687. De hecho su nombre aparece en la primera página, autorizando la publicación en nombre de la Real Sociedad. Así que es de esperar que tuvieran cierta relación, como se transluce en la correspondencia. Más aún, parece ser que más que un clásico intercambio epistolar científico, estamos ante un caso de “preguntémosle a mi a amigo matemático que seguro sabe”.

Newton le contestó en tres cartas distintas, pero antes de seguir leyendo para encontrarte con su respuesta, te invito disfrazarte de Newton por un rato e intentar una solución para Pepys. ¿Cuál crees que tiene más chances?

El intercambio epistolar puede consultarse en [5]. Ahí Newton le cuenta a Pepys que la probabilidad de A es

$$1 - \mathbb{P}(\text{ningún } \square \text{ en 6 lanzamientos}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 = \frac{31031}{46656} = 0.665,$$

la de B es

$$1 - \mathbb{P}(\text{ningún } \square \text{ en 12 lanzamientos}) - \mathbb{P}(\text{un } \square \text{ en 12 lanzamientos}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{12} - 12 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{11} = \frac{1346704211}{2176782336} = 0.619,$$

que es más chica que la de A. Para C Newton dice “En el tercer caso se puede ver que el valor es aún más bajo”. En la carta de Pepys no había opción D, pero si la hubiera habido, podríamos imaginar qué hubiera dicho Sir Isaac: ejercicio para el lector.

Así que la respuesta correcta es la A. Dicho sea de paso, Pepys creía que la respuesta correcta era la C, lo que le valió tener que pagar una apuesta que había hecho con un tal John Smith.

No conforme con la simple respuesta numérica, como tal vez estés vos ahora, Newton intentó buscar una explicación. Si nuestro objetivo es entender y no solo responder correctamente, queremos saber también qué pasa cuando se lanzan 24, 30, 36 y en general  $6n$  dados para cualquier  $n$ . Y también queremos saber qué pasa si se usan dados con otras cantidades de caras. ¿Es importante que sean justo 6 caras? ¿Qué pasa si son sólo 2 (el caso de las monedas)? Recordar: el objetivo es entender. No generalizar per se. Queremos entender cómo funciona la cosa.

Acá nuevamente les recomiendo parar de leer y jugar un poco con el caso de las monedas. ¿Qué es más probable, al menos una cara en 2 lanzamientos o al menos 2 caras en 4 lanzamientos? ¿y qué de al menos 100 caras en 200 lanzamientos?

Resulta entonces que Newton continuó escribiéndole a Pepys con un argumento bastante discutible, pero que conduce a una respuesta correcta. Newton dice: si dividimos a los dados en grupos de seis, en el caso A necesitamos tener un  $\square$  en un grupo, mientras que en B necesitamos un  $\square$  en el primer grupo y otro  $\square$  en el segundo. Para el C necesitamos un  $\square$  en cada grupo. Entonces las probabilidades son cada vez más chicas porque estamos requiriendo más cosas.

El argumento está mal, porque no está considerando la posibilidad de, por ejemplo, sacar dos  $\square$  en el primer grupo y ninguno en el segundo. Puede que Sir Isaac haya asumido que podían descartarse esos casos por ser de orden menor, pero no parece ser el caso. Más bien parece que la pifió. Entre otras cosas porque el argumento de Newton no usa el hecho de que los dados son equilibrados. Y adivinen qué. Si los dados no están equilibrados la respuesta A deja de ser la correcta. Por ejemplo si  $p =$  probabilidad de que salga  $\square$  es  $1/4$ , entonces B es más probable que A, como pueden chequear ustedes mismos.

Así que el argumento de Newton está mal nomás. No hay mucha vuelta que darle. Stigler [6] se ocupó de recolectar la evidencia. Desde ya, no con el fin de caerle encima a Newton (¡quién podría animarse a semejante cosa!) sino más bien con la muy recomendable idea de aprender de los errores. Además, vale la pena notar que

1. En 1693 la teoría de probabilidades estaba en pañales, dando sus primeros pasos. Los conocimientos del momento eran bastante rudimentarios y ni siquiera había una teoría rigurosa en el sentido matemático (aunque sí había ideas brillantes). Eso llegaría recién 240 años después, en 1933 de la mano de Kolmogorov. La famosa correspondencia entre Fermat y Pascal, que es considerada como el inicio de la

teoría de probabilidades, se desarrolló en 1654. Si veinte años no es nada, cuarenta es dos veces nada, que puede parecer mucho pero es insignificante al lado de los casi 300 años que pasaron hasta el día de hoy. La teoría de probabilidades que tenemos hoy tiene un nivel de desarrollo muy superior al que tenía al momento de la correspondencia entre Pepys y Newton e incluso que el que tenía hace ya casi 100 años, cuando Kolmogorov nos regaló su maravillosa teoría axiomática que metió a la teoría de probabilidades dentro de la casa de la matemática, a la que no pertenecía hasta ese momento.

2. El argumento de Newton lamentablemente es incorrecto, pero hay una idea muy valiosa en él que forma parte central de la teoría moderna de probabilidades. Es lo que hoy conocemos como acoplamientos (coupling). Su desarrollo se dio recién en el siglo XX. Para interiorizarse sobre el asunto puede consultarse el libro de Lindvall [4] o el de Thorisson [7].

Si el argumento de Newton fuera correcto, sería mucho más potente que el cálculo que hicimos arriba porque

1. Es conceptual más que un cálculo. Un cálculo no suele dar razones más allá de que la cuenta da lo que da. Y siempre podemos cometer algún error en la cuenta y llegar a conclusiones erróneas. Un error en un signo, un término que se nos pasa por alto, etc. Un argumento conceptual expone sus falacias -si las tiene- de forma mucho más transparente. Y de hecho eso es lo que ocurre con el argumento de Newton.
2. Un argumento conceptual expone los alcances y limitaciones de la afirmación que estamos intentando demostrar. ¿Es importante que los dados estén equilibrados? ¿Es importante que sean dados de seis caras? ¿Vale sólo para 6, 12 y 18 lanzamientos o para cualquier  $6n$  cantidad de lanzamientos? En otras palabras, ayuda a entender.

## Acoplamientos

Casi que podríamos decir que los acoplamientos nacieron para poder dar demostraciones conceptuales.

¿Y qué son los acoplamientos? La voz popular dice que son el arte de construir objetos aleatorios en un mismo espacio de probabilidad para poder compararlos.

Uno de los primeros que los puso en práctica en la forma que los conocemos hoy fue Wolfgang Doeblin en los años treinta, para dar una prueba constructiva de la convergencia al equilibrio para cadenas de Markov construyendo cadenas que comienzan con distintas condiciones iniciales en un mismo espacio de probabilidad y mostrando que (gracias a la forma en que las construyó) siempre hay un momento en que se juntan y a partir de ahí siguen juntas para siempre [3]. Eso demuestra que la distribución límite de la cadena no puede depender de las condiciones iniciales y es por lo tanto invariante. Tal es el impacto que produjo que a la condición necesaria para poder hacer esta construcción hoy la llamamos condición de Doeblin. Si tu cadena de Markov la verifica, tu día será más fácil.

Otra gran estrella del arte de acoplar ha sido Anatoliy Skorokhod, que se anotó con dos perlitas: su famoso teorema de representación, que permite intercambiar convergencia en distribución por convergencia casi segura [1, pag. 70] y su teorema de inmersión, que permite meter a cualquier sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.) con segundo momento finito dentro de un movimiento browniano y obtener así una prueba espectacularmente directa del Teorema Central del Límite [2, Teoremas 37.6 y 37.7].

Casualmente, sobre los métodos directos, Kolmogorov decía

Es de esperar que . . . los probabilistas de la generación más joven, en la locura por el poder de métodos relacionados con las distribuciones en los espacios funcionales, no olviden los métodos directos.

Los acoplamientos son la quintaesencia de los métodos directos. Para entender un poco más de qué se tratan, nada mejor que verlos en acción. Empecemos con un ejemplo simple.

Diremos que la variable aleatoria  $X$  tiene distribución de Bernoulli de parámetro  $p$  si

$$\mathbb{P}(X = 1) = p, \quad \text{y} \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p,$$

y lo notamos  $X \sim \text{Be}(p)$ . Si  $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  con  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d con distribución  $\text{Be}(p)$  decimos que  $X$  tiene distribución Binomial de parámetros  $n$  y  $p$  y lo notamos  $X \sim \text{Bi}(n, p)$ . Es conveniente pensar a las  $X_i$  como sucesivas repeticiones independientes de un experimento, siempre en las mismas condiciones y que  $X_i = 1$  si ocurre determinado resultado y  $X_i = 0$  si no ocurre. Por ejemplo, podríamos arrojar una moneda cargada con  $\mathbb{P}(\text{cara}) = p$  y entonces  $X_i = 1$  si sale cara en el  $i$ -ésimo lanzamiento y  $X_i = 0$  si sale ceca.

En los cursos básicos de probabilidad aprendemos que  $X$  nos da la cantidad de caras obtenidas en  $n$  lanzamientos de la moneda y que

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (1.1)$$

Creo que todos vamos a coincidir en qué si  $X \sim \text{Bi}(n, p)$  e  $Y \sim \text{Bi}(n, q)$  con  $p > q$ , entonces  $X$  es “más grande” que  $Y$  en algún sentido (¿en cuál?). Una forma de darle sentido es decir que para todo  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ,

$$\mathbb{P}(X \geq k) \geq \mathbb{P}(Y \geq k). \quad (1.2)$$

Se la llama dominación estocástica. Si queremos probar (1.2), nuestro primer impulso nos lleva a escribir las expresiones a cada lado del  $\geq$  y por lo tanto intentar demostrar que vale la desigualdad

$$\sum_{j=k}^n \binom{n}{j} p^j (1 - p)^{n-j} \geq \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} q^j (1 - q)^{n-j},$$

para  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ . (Están invitados a hacerlo). Pero también podríamos proceder de la siguiente manera. Consideremos  $U_1, U_2, \dots, U_n$  variables aleatorias i.i.d. con distribución uniforme en  $[0, 1]$ . Eso significa que para cualquier intervalo  $(a, b) \subset [0, 1]$ ,  $\mathbb{P}(U_i \in (a, b)) = b - a$ . Entonces podemos construir variables  $\hat{X}$  e  $\hat{Y}$  en un mismo espacio de probabilidad (acopladas) haciendo  $\hat{X}_i = 1 \Leftrightarrow U_i \leq p$ ,  $\hat{Y}_i = 1 \Leftrightarrow U_i \leq q$  y tomando

$$\hat{X} = \hat{X}_1 + \dots + \hat{X}_n, \quad \hat{Y} = \hat{Y}_1 + \dots + \hat{Y}_n.$$

Notar que  $\hat{X} \sim \text{Bi}(n, p)$  e  $\hat{Y} \sim \text{Bi}(n, q)$ . Como  $p > q$ , por construcción  $\hat{Y}_i = 1 \Rightarrow \hat{X}_i = 1$ , o lo que es lo mismo,  $\hat{X}_i \geq \hat{Y}_i$  y por lo tanto  $\hat{X} \geq \hat{Y}$ . Entonces el evento  $\{\hat{Y} \geq k\}$  está contenido en  $\{\hat{X} \geq k\}$  y por lo tanto

$$\mathbb{P}(\hat{X} \geq k) \geq \mathbb{P}(\hat{Y} \geq k).$$

Pero  $\mathbb{P}(\hat{X} \geq k) = \mathbb{P}(X \geq k)$  y  $\mathbb{P}(\hat{Y} \geq k) = \mathbb{P}(Y \geq k)$ , así que

$$\mathbb{P}(X \geq k) \geq \mathbb{P}(Y \geq k).$$

Nos ahorramos la cuenta con las sumas de combinatorios (noten que ni siquiera usamos (1.1)) y de paso expusimos las razones que hacen que  $X$  sea “más grande” que  $Y$ . Más aún, esta prueba se puede extender a situaciones mucho más generales, mientras que la de las sumas de combinatorios no tanto.

El problema de percolación consiste en considerar un grafo (finito o infinito) y decretar a cada una de sus aristas abierta con probabilidad  $p$  o cerrada con probabilidad  $1 - p$ . Todas las elecciones son independientes. Luego fijamos dos nodos del grafo  $x$  e  $y$  y nos preguntamos por la probabilidad de que exista un camino de aristas abiertas que conecte a  $x$  con  $y$ . Vamos a denotar a esta probabilidad  $\mathbb{P}_p(x \leftrightarrow y)$  para enfatizar que depende de  $p$ . Nuevamente, es de esperar que si  $p > q$ ,

$$\mathbb{P}_p(x \leftrightarrow y) > \mathbb{P}_q(x \leftrightarrow y).$$

La demostración con acoplamientos se extiende a este caso casi sin cambios, mientras que con la otra no es claro cómo hacerlo. Involucraría calcular expresiones combinatorias muy complicadas y difícilmente nos lleve a buen puerto.

## Resolviendo Pepys-Newton

Volviendo a Newton, trescientos treinta y dos años después, podemos darnos el lujo de tener un argumento que explique la cuestión de fondo más allá de la cuenta y que no deje lugar a dudas. De la mano de los acoplamientos. Y de paso probaremos algo mucho más general que ordenar las probabilidades de  $A$ ,  $B$  y  $C$ .

Vamos a considerar dados con cualquier cantidad de caras, que llamaremos  $C = 2, 3, 4, \dots$  y no solo vamos a comparar los casos en que tiramos  $C$ ,  $2C$  o  $3C$  dados sino cualquier múltiplo de  $C$ .

### Teorema

Si se tiran  $Cn$  dados equilibrados de  $C$  caras cada uno y llamamos  $p_n$  a la probabilidad de que salgan al menos  $n$  caras  $\square$ . Entonces  $p_1 > p_2 > p_3 > \dots > p_n$ .

Antes de meternos en la demostración, conviene recordar la noción de valor esperado o esperanza de una variable aleatoria. Para una variable aleatoria  $X$ , su esperanza se define como

$$\mathbb{E}(X) = \sum_k k\mathbb{P}(X = k),$$

la suma es sobre todos los posibles valores  $k$  que puede tomar  $X$ . Cuando ese conjunto es infinito, esa suma puede que no esté bien definida, pero acá nos vamos a restringir a variables aleatorias que toman una cantidad finita de valores así que no nos vamos a preocupar por eso.

Para una variable aleatoria  $X \sim \text{Bi}(N, p)$  se tiene que  $\mathbb{E}(X) = Np$ . También vamos a necesitar el siguiente hecho: si  $Np$  resulta ser un número entero, entonces  $\mathbb{P}(X = k)$  se maximiza (estrictamente) cuando  $k = Np$ . Pueden probarlo ustedes mismos considerando el cociente  $\mathbb{P}(X = k)/\mathbb{P}(X = k - 1)$ . Llamaremos a este hecho (\*). Ahora sí.

*Demostración.* Seguiremos la buena idea de Newton y acoplaremos las variables que se mencionan en el enunciado del teorema. Vamos a pensar, como Newton, que lanzamos los dados en grupos de  $C$  dados. Si llamamos  $X_n$  a la cantidad de  $\square$  que aparecieron en los

primeros  $n$  lanzamientos (es decir que se lanzaron  $Cn$  dados), tenemos que  $p_n = \mathbb{P}(X_n \geq n)$ . Las variables aleatorias  $X_n$  tienen distribución  $\text{Bi}(Cn, 1/C)$ , así que su esperanza es  $Cn/C = n \in \mathbb{N}$  y por lo tanto para ellas vale (\*). Podemos acoplarlas si las construimos haciendo

$$X_{n+1} = X_n + Y,$$

donde  $Y$  es la cantidad de dados que mostraron la cara  $\square$  en el  $(n+1)$ -ésimo lanzamiento de  $C$  dados.

Newton dijo (o mejor dicho, nuestra interpretación de lo que dijo Newton),

$$p_{n+1} = \mathbb{P}(X_{n+1} \geq n+1) = \mathbb{P}(X_n \geq n, Y \geq 1) = \mathbb{P}(X_n \geq n)\mathbb{P}(Y \geq 1) < \mathbb{P}(X_n \geq n) = p_n,$$

que está mal (¿por qué?), pero con el diario del lunes, podemos arreglarlo. Veremos que  $p_{n+1} - p_n < 0$  sin necesidad de calcularlos (gracias a nuestro acoplamiento). En efecto,

$$\begin{aligned} p_{n+1} - p_n &= \mathbb{P}(X_{n+1} \geq n+1) - \mathbb{P}(X_n \geq n) \\ &= \sum_{r=0}^C \mathbb{P}(X_{n+1} \geq n+1 \mid Y=r)\mathbb{P}(Y=r) - \sum_{r=0}^C \mathbb{P}(X_n \geq n \mid Y=r)\mathbb{P}(Y=r) \\ &= \sum_{r=0}^C [\mathbb{P}(X_{n+1} \geq n+1 \mid Y=r) - \mathbb{P}(X_n \geq n \mid Y=r)]\mathbb{P}(Y=r) \\ &= \sum_{r=0}^C [\mathbb{P}(X_{n+1} \geq n+1 \mid Y=r) - \mathbb{P}(X_n \geq n)]\mathbb{P}(Y=r) \\ &= \sum_{r=0}^C [\mathbb{P}(X_n \geq n+1-r) - \mathbb{P}(X_n \geq n)]\mathbb{P}(Y=r). \end{aligned}$$

Para pasar de la primera línea a la segunda usamos la regla de probabilidad total, luego reagrupamos y sacamos factor común  $\mathbb{P}(Y=r)$ , después usamos que  $Y$  es independiente de  $X_n$  y por lo tanto las probabilidades referidas a  $X_n$  no cambian si condicionamos al valor de  $Y$  o si no lo hacemos. Por último usamos el hecho de que si  $Y=r$ , entonces  $X_{n+1} \geq n+1 \Leftrightarrow X_n \geq n+1-r$ , y este último evento es independiente de  $\{Y=r\}$ . Ahora miremos cada uno de los términos entre corchetes en la suma de arriba.

Cuando  $r=0$ ,

$$\mathbb{P}(X_n \geq n+1) - \mathbb{P}(X_n \geq n) = -\mathbb{P}(X_n = n).$$

Cuando  $r=1$ ,

$$\mathbb{P}(X_n \geq n+1-1) - \mathbb{P}(X_n \geq n) = 0.$$

Cuando  $r=2$ ,

$$\mathbb{P}(X_n \geq n+1-2) - \mathbb{P}(X_n \geq n) = \mathbb{P}(X_n = n-1) < \mathbb{P}(X_n = n),$$

gracias a (\*). Cuando  $r=3$ ,

$$\mathbb{P}(X_n \geq n+1-3) - \mathbb{P}(X_n \geq n) = \mathbb{P}(X_n = n-1) + \mathbb{P}(X_n = n-2) < 2\mathbb{P}(X_n = n),$$

nuevamente gracias a (\*). Cuando  $r=4$ ,

$$\mathbb{P}(X_n \geq n+1-4) - \mathbb{P}(X_n \geq n) = \mathbb{P}(X_n = n-1) + \mathbb{P}(X_n = n-2) + \mathbb{P}(X_n = n-3) < 3\mathbb{P}(X_n = n).$$

etc.

Juntando todo tenemos,

$$\begin{aligned} p_{n+1} - p_n &= \sum_{r=0}^C [\mathbb{P}(X_n \geq n+1-r) - \mathbb{P}(X_n \geq n)] \mathbb{P}(Y=r) \\ &< \sum_{r=0}^C (r-1) \mathbb{P}(X_n = n) \mathbb{P}(Y=r) \\ &= \mathbb{P}(X_n = n) \sum_{r=0}^C (r-1) \mathbb{P}(Y=r) \\ &= \mathbb{P}(X_n = n) \left( \sum_{r=0}^C r \mathbb{P}(Y=r) - \sum_{r=0}^C \mathbb{P}(Y=r) \right) \\ &= \mathbb{P}(X_n = n) (\mathbb{E}(Y) - 1). \end{aligned}$$

Pero  $\mathbb{E}(Y) = C \cdot (1/C) = 1$  y por lo tanto

$$p_{n+1} - p_n < 0,$$

que es lo que queríamos probar. □

Así que lo de Newton no estaba taaaan mal. Se le había pasado considerar algunos términos, pero aún teniéndolos en cuenta, la conclusión es la misma. Tal vez simplemente la pifió, o tal vez tenía todo esto en la cabeza y eligió darle una versión simplificada a Pepys. Y el título de este artículo sea sólo un bait para que llegues hasta acá.

### Agradecimientos

Quiero agradecer a los integrantes del grupo de probabilidad y modelos estocásticos ModEsto por la lectura crítica y sus valiosos comentarios sobre una versión preliminar del artículo.

## Referencias

- [1] BILLINGSLEY, Patrick: Convergence of probability measures. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 1968 (Wiley Ser. Probab. Math. Stat.)
- [2] BILLINGSLEY, Patrick: Probability and measure. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 1979 (Wiley Ser. Probab. Math. Stat.)
- [3] DOEBLIN, W.: Éléments d'une théorie générale des chaînes simples constantes de Markoff. In: Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (3) 57 (1940), 61–111. <http://dx.doi.org/10.24033/asens.883>. – DOI 10.24033/asens.883. – ISSN 0012–9593
- [4] LINDVALL, Erik T.: Lectures on the coupling method. New York, NY: Wiley, 1992 (Wiley Ser. Probab. Math. Stat.). – ISBN 0–471–54025–0

- [5] RUBIN, Ernest ; SCHELL, Emil D.: Samuel Pepys, Isaac Newton and probability. In: The American Statistician 14 (1960), Nr. 4, S. 27–30
- [6] STIGLER, Stephen M.: Isaac Newton as a probabilist. In: Stat. Sci. 21 (2006), Nr. 3, S. 400–403. <http://dx.doi.org/10.1214/088342306000000312>. – DOI 10.1214/088342306000000312. – ISSN 0883–4237
- [7] THORISSON, Hermann: Coupling, stationarity, and regeneration. New York, NY: Springer, 2000 (Probab. Appl.). – ISBN 0–387–98779–7

**Pablo Groisman.** Es doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Buenos Aires e investigador del CONICET. En paralelo con su labor como investigador, Pablo Groisman ha desarrollado una destacada trayectoria como comunicador de la matemática. En el breve período 2022–2026 publicó tres libros —ilustrados por Diego Feld (Gofel)—, lo que pone de manifiesto un compromiso sostenido con la divulgación y el acercamiento de la disciplina a un público amplio.


Su último libro, *La pelota no se ensancha*, acaba de ser publicado y presentado en la Feria Internacional del Libro de Buenos Aires (2026). Aquí compartimos el detalle de las tres publicaciones mencionadas.

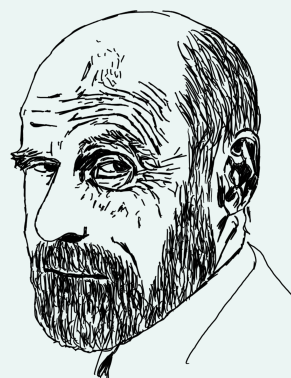
- \* Te regalo un Teorema. Pablo Groisman & Gofel (2022). Editorial Tantaagua.
- \* Abrazar el azar. Pablo Groisman (2022). Editorial Eudeba.
- \* *La pelota no se ensancha*. Pablo Groisman & Gofel (2026). Editorial Tantaagua.

## Diálogos

### Entrevistas a integrantes de la comunidad matemática

#### Entrevista a Vinton Gray Cerf

 Vinton Gray Cerf es científico de la computación e ingeniero nacido en New Haven, EEUU. Desde 2005 es Chief Internet Evangelist en Google. En 2004 fue galardonado con el A.M. Premio Turing por el diseño de los protocolos básicos de comunicación de la internet y los protocolos TCP/IP.



Vinton Cerf, por Demian Goos



Por Demian Nahuel Goos  
Universidad de Humboldt en Berlín

Extracto de la entrevista facilitada por la fundación Heidelberg Laureate Forum y publicada el 1 de julio de 2022 en el canal de YouTube Matematizame! de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, UNR. (*Traducción del autor.*)



¿Cuál es su rol en la sociedad?



Esa es una pregunta muy amplia e interesante, supongo. Soy ingeniero por elección. Mi formación es en ciencias de la computación; tengo un doctorado en ese ámbito, pero soy ingeniero. En ese sentido, mi rol en la sociedad consiste en construir cosas que la gente pueda utilizar y en anticipar los posibles riesgos de la tecnología. Es fácil verlo ahora, pero no lo era 50 años atrás, que esta plataforma llamada internet, y la *World Wide Web* que se basa en ella, pueden usarse de manera incorrecta y destructiva. Por eso, nuestra sociedad ahora necesita mitigar esos comportamientos dañinos y, al mismo tiempo, mejorar la utilidad de esta infraestructura básica. Entonces, si bien no tengo la responsabilidad de hacer



cumplir las reglas que todos queremos, lo mínimo que puedo hacer es dentro de mis posibilidades, explicar en qué consisten estos problemas y hacer recomendaciones a quienes elaboran políticas públicas y leyes para que el sistema sea más seguro de usar. Y sobre todo, sigo queriendo que todos tengan acceso a internet: todavía estamos a mitad de camino.



**Usted dice que presta especial atención a los riesgos y peligros que se derivan del uso de internet. ¿Vio venir esos peligros en el pasado, cuando comenzaba a trabajar en este área? ¿Hubo algún momento en particular en que pensó que esto podría convertirse en un problema?**



No diría eso, realmente. Cuando esta red estaba siendo desarrollada, la comunidad que se estaba conformando era relativamente homogénea. Eran todas personas ligadas a la tecnología, como científicos de la computación, su mayoría académicos. Estaban tratando de entender cómo hacer que el sistema funcionara. El contexto en el cual se desarrolló era una plataforma pensada para las fuerzas armadas destinada a tareas de comando y control. Desde el inicio entendíamos que la seguridad era clave. Hay gente que pregunta: ¿Si ya entonces lo entendía, por qué hoy no hay más seguridad? Parte de la respuesta es que las tecnologías disponibles en los años '70, cuando este sistema fue diseñado, podían existir, pero sus detalles eran información clasificada. Eso significa que yo no estaba en condiciones de compartir estos criterios de seguridad con quienes trabajaba en el perfeccionamiento del sistema.

A fines de los '70, cuando estuvo disponible la criptografía de clave pública, la incorporamos al sistema. Dicho esto debo resaltar que el *https*, el *Hypertext Transfer Protocol* en modo seguro, es automático. No es necesario configurar certificados manualmente en cada caso, cada caso, eso sucede por debajo de lo que ve el usuario. Pero cuestiones más activas, como firmas digitales o el cifrado de correos electrónicos, necesitan verdadera disciplina. Por eso me sentí cómodo posponiendo la implementación de algunas de esas medidas de seguridad mientras el sistema evolucionaba en el sector civil. Y digamos que, casi hasta el año 2000 no observábamos abusos significativos, excepto posiblemente el caso de *malware*, del cual ya éramos conscientes y estábamos intentando construir defensas. En aquellos días no era evidente qué tipo de comportamientos dañinos podrían surgir. Ahora, en cambio, enfrentamos a redes sociales, *malware*, *ransomware* y otros problemas de ese tipo, y trabajamos activamente para contrarrestarlos.



**Internet ha dado también posibilidades sociales e interactivas. Me gustaría saber si hubo algo que lo haya sorprendido positivamente, con lo que haya dicho: “Esto está muy bien, me gusta”.**



Primero que nada, considero que es más que evidente que internet cambió positivamente el mundo. Si pensamos en todos los emprendimientos que se apoyan en internet y que crecieron en torno a él, en toda la investigación que se realiza, incluso en la pandemia, compartir información genética del virus aceleró el proceso de crear una vacuna. Y, por supuesto, internet se usa todo el tiempo para entretenimiento online, para negocios, para investigación y para educación.



Hay una enorme cantidad de valor que surge del uso que la gente le da a esta infraestructura, y es por eso que sigo decidido a impulsar el modelo de la *sociedad de internet*, que sostiene que internet es para todos. Quiero que todos tengan la posibilidad de acceder a, usar y contribuir al internet.



**¿Dónde cree que se hallan los mayores obstáculos para hacer de internet un servicio accesible para todos? Pienso por ejemplo en lugares donde ni siquiera hay acceso a la electricidad, y mucho menos a internet.**



Bien, tu punto sobre la electricidad es atinado. Internet no funciona sin electricidad porque se basa en computadoras y tecnología de comunicación. Por otro lado, podría sorprenderte lo que las baterías te pueden permitir. Pensemos en la cantidad de gente que tiene celulares que deben recargarse, la tecnología de recarga es bastante sorprendente. Incluso hay personas que generan electricidad andando en bicicleta. Entonces las baterías ayudan donde la electricidad no es accesible con regularidad.

Pero hay otras cuestiones. Incluso cuando se soluciona el problema de la electricidad, aún no se cuenta con la infraestructura necesaria para implementar internet. Sin embargo también esos obstáculos están siendo abordados de diversas formas; las más drásticas son los cables submarinos, lo que, para mi propia sorpresa, ha permitido que islas muy aisladas del Pacífico accedan a internet. Además, los sistemas satelitales están creciendo. El más visible, en todo el sentido es *Starlink*, de *SpaceX*. Pero hay más proyectos satelitales que pasan desapercibidos, y aquellos que sean exitosos proveerán internet a cada metro cuadrado del planeta, incluso en medio del océano.

Entonces, en cierta forma, las carencias en el acceso a internet se están resolviendo. Pero hay problemas adicionales, uno es el costo. ¿Cuán costoso es? ¿Se puede solventar el gasto? ¿Y el equipamiento? ¿Se puede afrontar el costo del servicio para acceder a internet y utilizarlo? En muchos casos, la respuesta es 'No'. Así que aún hay inconvenientes por resolver.



**Para la próxima pregunta creo que podemos ahondar más en cuestiones generales de las ciencias de la computación. La idea es la siguiente: Hoy tenemos científicos de la computación que abordan tópicos que originalmente formaban parte de la filosofía. Por ejemplo: ¿Qué es la consciencia? ¿Qué es la inteligencia? ¿Qué es la percepción? Esas son preguntas clásicas de la filosofía y ahora tenemos científicos de la computación buscando respuestas a estas cuestiones. La pregunta sería: ¿Las ciencias de la computación se ocupan ahora de la filosofía? ¿Se volvió obsoleta la filosofía?**



En absoluto. Las ciencias de la computación son una herramienta muy débil para atender esas preguntas filosóficas que mencionás. No sabemos lo que es la inteligencia. No entendemos cómo funciona el cerebro. No entendemos cómo puede ser que un niño de 3 años aprenda con 2 o 3 ejemplos de algo y con sólo eso pueda crear un modelo en el cerebro de lo que está pasando. Cómo puede generar abstracciones y generalizar con un número pequeño de experiencias.



Comparemos esto con una red neuronal de *machine learning*, que necesita ser entrenada con millones y miles de millones de ejemplos que se llevan a cabo una y otra vez para ajustar una serie de parámetros para que se comporte de alguna manera en forma similar a un ser humano. Estamos muy lejos, lejísimos, en ciencias de la computación, de comprender o incluso emular lo que el cerebro humano puede hacer.

Y todo esto sin siquiera mencionar que el cerebro humano opera con neuronas, utiliza muy poca energía, en comparación con las super-computadoras que consumen enormes cantidades de energía y aún así brindan resultados débiles frente a lo que puede hacer un cerebro humano.

Ahora, por otro lado, hemos descubierto que las computadoras pueden hacer rápidamente cosas que los humanos ni siquiera pueden resolver. Trabajar con bases de datos enormes por ejemplo. O hacer cálculos que a un ser humano le llevaría millones de años hacer a mano. Las computadoras son potentes, pueden ayudarnos y tienen capacidades prácticas para el cálculo.

Hay que tener presente la frase '*x computacional*', para un valor x. Biología computacional, física computacional, lingüística computacional, humanidades computacionales. Tomamos computadoras y las utilizamos como herramientas potentes para entender cosas de manera más profunda. Entonces aquí diría que sí vemos el verdadero potencial de la computación como una herramienta.

Un ejemplo: hablo inglés razonablemente bien. Crecí con el idioma. Ich spreche ein wenig Deutsch. (Hablo un poco de alemán.) Je ne parle pas français. (No hablo francés.) Realmente no manejo muchos idiomas pero tengo computadoras que me ayudan a lograrlo. Es una deficiencia que puedo compensar gracias a Google Translate. Estas son herramientas potentes si las usamos bien.

Así que no creo que la filosofía se haya ido. Las ciencias de la computación intentan entender muchas preguntas filosóficas para aprender a rediseñar el funcionamiento de la computación. Puedo garantizar que la visión computacional no es nada en comparación a cómo un ser humano experimenta la percepción. Cuando observamos algo creamos modelos de lo que vemos. Creamos abstracciones a partir de ello. Las computadoras son débiles para hacer eso.



**Quisiera señalar que no mencionó el término 'filosofía computacional'. En todas las ramas los científicos se nutren de otras disciplinas. Por ejemplo, cuando nos preguntamos qué es la consciencia para una IA, nos basamos en lo que sabemos que hace nuestro cerebro. No alcanzaremos la misma complejidad, pero la inspiración la tomamos de la naturaleza. ¿Sabe de un ejemplo inverso? Un ejemplo en la filosofía donde se usan conocimientos de las ciencias de la computación.**



¡Esa es una pregunta muy interesante! Si dijeras humanidades te hubiera dicho que sí inmediatamente, porque veo que se usan computadoras para analizar textos, por ejemplo. No tengo conocimientos desde el lado filosófico porque cuando nos preguntamos qué es la inteligencia qué es la consciencia por ejemplo, creo que nos enfrentamos a la imitación limitada que que las computadoras nos ofrecen. Todos sabemos lo que es la atención. Y esta está relacionada con la consciencia. Es difícil prestar atención si estamos inconscientes, ¿verdad?



La pregunta es: ¿Hay un análogo en la computación? La respuesta es: más o menos, pero no tenemos un entendimiento suficientemente profundo de lo que es la consciencia como para mapearlo a lo que sabemos hacer con computadoras. Entonces, suena bien, 'filosofía computacional', pero debería ser todo un seminario en sí mismo. ¿Existe? ¿Qué es?



**Quisiera agradecerle por esta entrevista. ¡La disfruté mucho! Ha sido un placer.**



No hay por qué. Disfrute mucho la charla. Lamento que no nos hayamos podido ver personalmente, pero ¡nos estaremos viendo en la red!

## Experiencias y herramientas

El objetivo de esta sección es compartir experiencias y herramientas pensadas especialmente para quienes están transitando sus pasos iniciales dentro de la comunidad matemática, ya sea como estudiantes de grado, doctorado o postdoctorado. Para realizar una contribución a esta sección, por favor escribir a [noticiero.editorial.uma@gmail.com](mailto:noticiero.editorial.uma@gmail.com).

### De San Luis a Loughborough

Martín De Borbón

University of Loughborough



Soy profesor de Matemáticas en la Universidad de Loughborough, en Inglaterra, y acá te cuento cómo fue mi carrera académica.

### Licenciatura

Estudí la Licenciatura en Matemáticas en la Universidad Nacional de San Luis. Mi mayor influencia durante la carrera fue Daniel Jaime, quien me motivó a aplicar al programa de verano del IMPA, en Río de Janeiro. Al terminar el segundo año fui al IMPA y elegí hacer el curso de Análisis Funcional. En ese momento pensaba que me iba a dedicar al análisis, en parte porque en San Luis hay un grupo fuerte y una larga tradición en esa área.

Después de volver del programa de verano del IMPA participé del entonces programa de intercambio universitario Inter U, lo que me permitió pasar seis meses en la UBA. Esto tuvo un impacto enorme en mi carrera. En particular, el curso de Geometría Diferencial dictado por Gabriel Minian me fascinó, y desde ahí en adelante elegí dedicarme a la geometría.

## Doctorado

Luego de recibirme de licenciado en San Luis empecé mi doctorado en el IMPA. La aplicación para el doctorado fue online, y pedí cartas de recomendación a Daniel Jaume y a Ana Benavente, que había sido mi profesora en Topología. Seguramente el haber hecho el curso de verano también ayudó a que me aceptaran.

En el IMPA participé de los seminarios de Análisis Geométrico a cargo de Fernando Codá y también hice un curso de Geometría Kähler con él, que me interesó muchísimo. Fernando me consiguió una entrevista con Simon Donaldson en el Imperial College London. Viajé a Londres, tuve la entrevista, y Donaldson me aceptó como alumno.

Solo tengo elogios para decir de Donaldson. La mayor parte del doctorado la recuerdo con mucha felicidad, más allá de los estreses normales de la etapa final de la tesis.

## Postdoctorado

Al terminar el doctorado apliqué a varios postdocs, pero no salió ninguno. Sin opciones, volví a la casa de mis padres en Mendoza. En ese momento Daniel Jaume era director del Departamento de Matemáticas en San Luis. Durante su gestión se abrió un concurso para un cargo de profesor adjunto, que gané.

Di clases en la Universidad Nacional de San Luis entre 2015 y 2017. En ese tiempo estuve enseñando, pero también manteniéndome al día con lo que pasaba en mi área y terminando de escribir los papers de los temas de mi doctorado. En 2017 obtuve una beca postdoc con Cristiano Spotti en Aarhus, Dinamarca. De esta beca me enteré por medio de **MathJobs**. A Cristiano ya lo conocía. Ambos habíamos sido alumnos de Donaldson en el Imperial College. Cuando vi el anuncio del postdoc decidí escribirle un mail y preguntarle si era apropiado que aplicara; me respondió que sí. En la aplicación pedí cartas de recomendación a Donaldson y a Codá, y también tuve que escribir un plan de investigación de unas seis páginas. El postdoc en Aarhus duró dos años.

Luego de Aarhus empecé otro postdoc en el Laboratorio de Matemáticas Jean Leray, en Nantes, Francia, esta vez por un año. Este postdoc lo vi anunciado en el sitio **GeCo GeDi**, donde se publican posiciones principalmente en Europa y en el área de la geometría. Pedí cartas de recomendación a Donaldson y a Spotti. En este caso conocía al director del laboratorio, Gilles Carron, solo a través de conferencias y pequeñas charlas matemáticas en coffee breaks.

Mi idea original era volver a Argentina después de esos tres años en el exterior y aplicar al CONICET, pero las cosas se dieron distinto. En 2020, cuando ya estaba listo para volver y en plena pandemia, Dmitri Panov, profesor en King's College London, obtuvo un proyecto de investigación del EPSRC, (organismo británico análogo al CONICET). El proyecto era sobre métricas de Kähler poliedrales. Es un tema que me fascina y en el que, para bien o para mal, no hay mucha gente trabajando. De este postdoc me enteré por medio de Cristiano, que es conocido de Dmitri. Aunque no lo conocía personalmente al momento de aplicar, Dmitri había estado un tiempo en el Imperial College antes de que yo empezara el doctorado, así que teníamos varios contactos en común. Apliqué con cartas de recomendación de Donaldson y Spotti. Fui seleccionado y estuve en King's entre 2020 y 2023.

Durante el 2022 apliqué a muchísimos puestos con cartas de recomendación de Donaldson, Spotti y Panov. A esa altura, después de haber hecho tres postdocs, ya quería *algo más a largo plazo*. Entre todas estas postulaciones, obtuve un postdoc en la Universidad de Texas en Dallas con Ronan Conlon y, al mismo tiempo, mi primer cargo permanente en Loughborough. Estuve en Texas durante seis meses y en septiembre de 2023 comencé

oficialmente mi posición en Loughborough. A Ronan lo conocía de antes; él había hecho su doctorado en el Imperial College antes que yo.

El cargo permanente es una historia aparte, ya que las aplicaciones son un poco distintas. Además de cartas de recomendación, tenés que escribir sobre tu experiencia enseñando y tus planes para aplicar a financiamiento de proyectos de investigación. Apliqué a todos los cargos que vi publicados en [jobs.ac.uk](https://www.jobs.ac.uk), que es el sitio inglés para trabajos en la academia. La gran mayoría de mis aplicaciones fueron rechazadas bastante rápido. En seis de ellas pasé a la etapa de entrevista.

En estas entrevistas tenés que preparar una presentación de tu investigación, también dar una clase de un curso básico de la carrera, por ejemplo Análisis, y después tener una entrevista con miembros del departamento y con el decano o decana de la facultad. Ahí hacen preguntas generales, del estilo cuáles son tus planes para los próximos cinco años o qué diría un colega tuyo sobre vos. Para estas entrevistas me preparé bastante y le pedí a amigos que hicieran prácticas conmigo, un poco como los abogados que ensayan para los juicios, al menos en la serie Suits.

La entrevista en Loughborough fue presencial, y yo ya tenía la experiencia de haber pasado por el proceso cinco veces. Éramos seis aplicantes para una sola posición. Mis compañeros de trabajo ahora me dicen que antes de las entrevistas yo estaba en el puesto número tres. Lo que quiere decir que había dos candidatos con publicaciones más fuertes que las mías. Me dicen que di la mejor presentación, así que pasé al puesto número uno. En los cargos permanentes no se busca solo al mejor matemático o matemática, sino también a alguien con quien uno se vea trabajando en el día a día, un buen colega.

## Actualidad y futuro

Actualmente soy Lecturer. En el sistema inglés este es el cargo más bajo dentro de las posiciones permanentes. La escala es: Lecturer, Senior Lecturer, Reader y Professor. Doy clases de Cálculo a estudiantes de primer año, corrijo cientos de exámenes y hago investigación siempre que puedo.

Para subir al siguiente escalón necesito ganar una *grant* (subsidio), algo que no es nada fácil en este momento. De hecho vengo de fallar en una aplicación. ¿Cómo sigue esto? Seguir escribiendo papers y aplicando a grants hasta que alguna *salga*.

¿Algún consejo o resumen final? En mi caso, las aplicaciones fallidas superan por un orden de magnitud a las exitosas. No tengo un consejo particular, ni hubo una frase o filosofía que me haya ayudado, solo gente y amigos.

## Género UMA

### Referentes de género



### Introducción

El 2 de diciembre de 2025, en el marco del Encuentro conjunto entre la Real Sociedad Matemática Española (RSME) y la Unión Matemática Argentina (UMA), tuvo lugar la mesa redonda “Acceso igualitario a los espacios de decisión” bajo la moderación de Nadina Moreda en una convocatoria que reunió a docentes, investigadoras, investigadores y estudiantes de diversas instituciones. El intercambio buscó ir más allá de los indicadores numéricos para poner el foco en los procesos y dinámicas que habilitan o restringen la participación plena de mujeres y diversidades en los ámbitos de liderazgo académico. Este artículo recupera los aportes más significativos del encuentro, con el objetivo de contribuir a la reflexión colectiva y a la construcción de líneas de acción para la comunidad matemática.

### Sobre las panelistas

El panel estuvo conformado por cuatro matemáticas referentes:

- María Jesús Carro, Doctora en Matemática (Universidad de Barcelona). Catedrática de la Universidad Complutense de Madrid y Académica Correspondiente de la Real Academia de Ciencias. Especialista en Análisis Matemático, preside el Comité de Cs. Experimentales de Unibasq.
- Martina Magliocca, Doctora en Matemática (Roma Tor Vergata). Es especialista en Ecuaciones con Derivadas Parciales aplicadas a la física y biología. Desempeñó cargos docentes en la Universidad de Evry (Francia). Actualmente es investigadora Ramón y Cajal en la Universidad de Sevilla.
- Sonia Trepode, Doctora en Ciencias Área de Concentración Matemática (Universidade do São Paulo). Investigadora Principal del CONICET y Profesora Titular (Universidad

Abogada (Universidad Nacional de Rosario), especialista en Cs. Sociales y Humanidades (Universidad Nacional de Quilmes). Se especializa en temáticas de género y patrocinio de víctimas de abuso. Desde 2024 coordina la Comisión Integral de Perspectiva de Género del CRUB-UNCo (Centro Regional Universitario Bariloche de la Universidad Nacional del Comahue).

Nacional de Mar del Plata). Es Directora del CEMIM (Centro de Estudios Matemáticos e Ingeniería Matemática), Vicepresidenta 1ª de la UMA y Miembro Correspondiente de la ANCEFN (Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales). Especialista en representaciones de álgebras.

- María Chara, Doctora en Matemática Universidad Nacional del Litoral. Investigadora del CONICET y Profesora de la Universidad de la República (Uruguay). Integra la Comisión Directiva de la UMALCA (Unión Matemática de América Latina y el Caribe).

## La invisibilidad de las barreras y el problema de lo naturalizado

Cuando hablamos de género, no nos referimos a una condición natural, sino a un sistema social que jerarquiza diferencias y que, en esa jerarquía, suele colocar lo masculino en posición hegemónica. Sostenida por rutinas, criterios y expectativas cotidianas, esta operación simbólica produce estereotipos y dinámicas que pueden derivar en violencias o en obstáculos concretos para el acceso a derechos y oportunidades. Desde ese marco inicial, la moderadora Nadina Moreda abrió la conversación con una primera pregunta:

*“¿En qué momento de sus trayectorias sintieron de manera más clara las barreras de género dentro del mundo académico o científico?”*

La primera en responder fue María Jesús Carro, quien adelantó un matiz que efectivamente abrió el debate: *“Quizás esto va a crear discusión, pero yo no la he sentido nunca.”* En contraste, Sonia Trepode aportó una experiencia diferente que enriqueció la conversación: *“Yo pensaba hasta 2015 que nunca la había sentido [...] pero había muchas cosas naturalizadas y yo creía que era más un problema mío.”*

Esta tensión entre vivencias permitió visibilizar un punto crítico: cuando las barreras no aparecen como prohibiciones explícitas, sino como prácticas cotidianas, sutiles y normalizadas, pueden volverse invisibles incluso para quienes logran avanzar en su trayectoria. La intervención de María Chara sintetizó ese proceso de toma de conciencia: *“Hasta que alguien te hace notar alguna cosa y después empezás a verlo en todos lados”*. Desnaturalizar no implica señalar culpas individuales, sino mostrar estructuras, revisar hábitos y abrir conversaciones sobre aquello que se asume como lo normal o lo inevitable. En este sentido, la invisibilidad de las barreras deja de interpretarse como falta de capacidad personal y pasa a ser reconocida como una característica del sistema, que oculta desigualdades bajo la apariencia del mérito. Una intervención del público dio con el objetivo de la mesa:

*“Si estamos acá es porque pudimos sobrepasar las barreras, pero eso no significa que las barreras no estén.”*

## Métricas y evaluación: consecuencias en la valoración profesional.

Uno de los tópicos tratados por las panelistas trataba sobre las formas de evaluación que acompañan las trayectorias académicas y en las métricas que buscan justificarlas. Las panelistas señalaron que los obstáculos no comienzan, ni terminan, en el momento formal del concurso. Tal como expresó una asistente,

*“El problema es todo lo que pasa en medio, toda la carrera matemática que desde que tú empiezas el doctorado hasta que llegas a ese concurso, de manera muchas veces implícita, [. . .], el entorno, más o menos, se empeña en señalarte que tú vales menos.”*

A partir de allí, emergió un patrón persistente: la ocupación asimétrica de espacios y la diferencia en los niveles de confianza que se construyen a lo largo de los estudios. Una participante del público lo describió con claridad:

*“Es muy obvio, como las estudiantes de matemáticas van perdiendo confianza según avanza el grado [. . .] En las asignaturas optativas difíciles casi no hay mujeres [. . .] ¿Por qué? Porque sus compañeros ocupan todos los espacios, preguntan, siempre tienen más confianza y de nuevo eso se va construyendo, [. . .]. Van ganando protagonismo y ellas van perdiendo confianza y eso se ve.”*

A este clima se suman narrativas y comentarios que deslegitiman los logros alcanzados por las mujeres. Una de las panelistas relató su propia experiencia en un concurso académico:

*“Me presenté en un concurso. Tenía más antecedentes (y) quede primera como co-respondía. . . pero después personas que estaban en el jurado dijeron: ¡Ay, que si viene con una pollerita le tenemos que dar cualquier cosa! Y entonces pareciera como que el cargo no lo gané porque realmente tenía los méritos para estar en esa posición.”*

Estos comentarios, que operan como microviolencias, alimentan lo que la literatura denomina síndrome de la impostora: la tendencia a dudar de los propios méritos y atribuir los logros a factores externos. Una investigadora del público lo formuló así:

*“Si se habla todo el rato de esto, al final se te crea el pensamiento de: ¿lo he ganado por mi currículum o porque soy la única mujer?”*

Otra intervención añadió:

*“A la mujer siempre se le pide mucho más. Entonces, cuando sos una mujer en un ambiente mayormente dominado por varones, probablemente hagas las cosas mucho mejor [. . .] porque te juzgaron más duramente e igual pasaste ese juzgado.”*

La discusión también destacó el impacto de la falta de referentes femeninos en la formación matemática, que actúa como una barrera simbólica. Una participante lo ilustró a través de una experiencia en la que, al citar una autora mujer en un trabajo de posgrado, la docente debió señalarles explícitamente que la autora era mujer, dado que ellas “estaban acostumbradas a ver siempre autores hombres.” Frente a esta escasez de referentes, María Chara valoró el rol de iniciativas que promueven la participación de niñas y adolescentes en STEM, como el Día de Ada Lovelace:

*“Muchas de las nenas de ahora [...] tienen referentes mujeres privilegiadas o están en espacios donde tuvieron acceso sin ningún problema. Ahí hay que apuntar: a que se vea en todas las áreas la diversidad [...] y entonces que a todos les parezca natural dedicarse a lo que tengan ganas.”*

El establecimiento de estereotipos se vincula, a su vez, con el modelo hegemónico de liderazgo —asociado a “formas masculinas” de ejercer el poder— que dificulta el desarrollo de otras formas diferentes de liderar. Como expresó una persona del auditorio:

*“La sociedad está muy estructurada con la manera de hacer masculina. . . No debería repercutir en que la gente piense que eres menos válida o que deberías tener menos poder [...] Es muy importante que las mujeres tengan puestos de poder, pero no solo eso, es también cómo se ejerce el poder.”*

En síntesis, los testimonios mostraron que las métricas y los procesos de evaluación no operan de manera aislada: interactúan con sesgos de género, expectativas implícitas y narrativas persistentes que afectan la valoración profesional de las mujeres a lo largo de toda la trayectoria académica. Para avanzar hacia evaluaciones más justas, es necesario revisar tanto los criterios formales como las prácticas cotidianas que moldean el reconocimiento, la participación y las oportunidades dentro de la comunidad matemática.

## **Impacto del cuidado y la maternidad en las trayectorias académico-científicas**

Uno de los temas más desarrollados del encuentro fue la relación entre maternidad, tareas de cuidado y trayectorias académicas. Sonia Trepode lo planteó desde su experiencia más inmediata, señalando cómo los picos de exigencia profesional suelen coincidir con momentos de alta demanda de cuidados familiares:

*“La maternidad atraviesa a las mujeres en un momento de la carrera que es muy importante y donde, bueno, hay que producir y también hay que atender al bebé, hay que correr [...]. Han cambiado mucho las cosas en 30 años, los maridos son mucho más colaborativos y trabajan más en conjunto. Yo soy madre soltera, así que no tuve esa compañía para esto. [...] Después, el tema más grande, ya en los últimos años, los padres se empiezan a enfermar; uno se tiene que hacer cargo [...] se van sumando actividades, y nos pasa mucho más a las hijas mujeres que a los hijos varones.”*

A su testimonio se sumó María Chara, quien introdujo una dimensión menos visible: la discontinuidad cognitiva y emocional que muchas veces acompaña los procesos de embarazo y posparto, y que rara vez es considerada en los sistemas formales de evaluación:

*“Me encantó estar embarazada, pero después, una vez que nacen, el cerebro se apaga [...] no es solamente sentarse; hasta que de a poco arranca de nuevo la cabeza. Y eso, ¡no sé cómo cuantificarlo!”*

Desde el público, una intervención problematiza la desigualdad cultural que atraviesa esta discusión:

*“Yo la veo en colegas alemanes [...] tienen muchos hijos y hacen su carrera lo más bien, están todo el día trabajando porque total tienen una mujer que se ocupa de los hijos. Y mi impresión es que la sensación de injusticia en el colectivo científico de mujeres es: ¿Por qué yo no puedo tener hijos y que me den el tiempo, me banquen la ralentización que pueda sufrir eso en mi trabajo, cuando están estos otros que tienen 25 hijos, total siguen haciendo?”*

Otra investigadora reforzó esa idea:

*“Una carrera académica no puede ser condicionante de maternar o no [...]. En mi doctorado tuve un hijo y tuve que hacer como si nada hubiera pasado, y no lo era.”*

Una tercera voz describió con crudeza la presión productivista en momentos de cuidado intensivo, agravada por la falta de licencias y la injerencia en decisiones personales:

*“Hay un límite para tener hijos y muchas veces en las ciencias se espera que seamos lo más productivas posibles... Me dijeron: ‘¿no querés ir al congreso?, ¿por qué no conseguís una niñera?’, y ‘dejá de dar la teta, ya es grande tu hija’. Yo no tengo ganas de que opinen de eso.”*

Estas frases describen una problemática por atender: se espera que la maternidad no altere el desempeño público —congresos, productividad, disponibilidad— aún cuando las condiciones reales no acompañen la etapa gestacional ni la posterior carga de cuidados asociada culturalmente a la maternidad. La valoración diferenciada por género respecto a las tareas de cuidado también apareció en otra intervención del público:

*“Hoy en día que los varones están más involucrados con la paternidad, no se mide con la misma vara la maternidad de las mujeres que la paternidad de los varones. Si los varones se involucran, son premiados; en cambio, las mujeres cargan con ‘esa cosa cargosa’ de ser madres.”*

Estos testimonios reflejan lo que la literatura menciona en sus estudios al respecto: la maternidad y las tareas de cuidado traccionan dificultades en las trayectorias de las mujeres. Por un lado, estos factores configuran barreras que obstaculizan el avance en la carrera profesional —fenómeno conocido como suelo pegajoso— y dificultan el acceso a cargos de responsabilidad o liderazgo, lo que la literatura denomina techo de cristal. Por otro lado, ilustran los desafíos que inciden en la productividad académica —el llamado productivity puzzle— y contribuyen a la pérdida progresiva de mujeres a medida que se asciende en la trayectoria científico-académica, proceso que suele describirse como tuberías agujereadas o con fugas. En todos estos casos, no se trata de falta de capacidad individual, sino de obstáculos estructurales que condicionan tiempos, oportunidades y disponibilidad. Estos fenómenos han sido analizados ampliamente por organismos internacionales en sus reportes sobre igualdad de género en educación, ciencia y tecnología. Según los indicadores regionales, en América Latina las mujeres dedican en promedio tres veces más tiempo que los varones al cuidado no remunerado (CEPAL & ONU Mujeres, 2025), lo que condiciona su disponibilidad, productividad y posibilidades de ascenso. Esta asimetría se traduce en productividades desiguales, calendarios más restrictivos y en decisiones difíciles entre investigar, enseñar, viajar o cuidar.

## Hacia una transformación colectiva

El intercambio dejó una convicción compartida: los cambios estructurales avanzan, pero despacio, y lo aparentemente anecdótico, repetido de manera constante, configura carreras y condiciona accesos. Como sintetizó una participante:

*“Son cosas muy pequeñas, pero son muchas y entonces, al final, el total no es nada pequeño”*

Frente a esta lectura colectiva, la mesa de Bariloche delineó campos de acción que la comunidad matemática puede fortalecer: desnaturalizar sesgos, ajustar métricas y procedimientos de evaluación, cuidar a quienes cuidan, formar liderazgos diversos y sostener espacios de discusión que mantengan viva la reflexión. Estas líneas no constituyen un listado exhaustivo, sino una invitación a revisar prácticas institucionales y a habilitar modos más equitativos de habitar la vida académica.

El encuentro cerró con un mensaje alentador de las panelistas, que recupera el espíritu de la jornada:

*“Si su pasión es la matemática, adelante. . . Las cosas se superan; lo que queremos con esta discusión es que les sea más fácil”.*

### Nota editorial:

Las citas provienen de la transcripción completa de la mesa redonda.

## Referencias

- [1] CEPAL & ONU Mujeres. (2025). *La Agenda 2030 para el Desarrollo Sostenible y la Agenda Regional de Género en América Latina y el Caribe: Indicadores de género a 2024* (LC/TS.2025/8). CEPAL; ONU Mujeres.  
Disponible en: [www.cepal.org/es/publicaciones/\protect\penalty\z@81441-la-agenda-2030-desarrollo-sostenible-la-agenda-regional-\protect\penalty\z@genero-america-latina](http://www.cepal.org/es/publicaciones/\protect\penalty\z@81441-la-agenda-2030-desarrollo-sostenible-la-agenda-regional-\protect\penalty\z@genero-america-latina)
- [2] Ministerio de Educación de la Nación Argentina. (2023). *Mujeres en el Sistema Universitario Argentino: 2019-2022*. Informe de la Secretaría de Políticas Universitarias.  
Disponible en: [https://www.argentina.gob.ar/sites/default/files/2020/04/mujeres\\_en\\_el\\_sistema\\_universitario\\_argentino\\_-\\_estadisticas\\_2021-2022.pdf](https://www.argentina.gob.ar/sites/default/files/2020/04/mujeres_en_el_sistema_universitario_argentino_-_estadisticas_2021-2022.pdf)

 Ir al índice general

## Competencia Interuniversitaria de Matemática Argentina

### Mates en la CIMA 2026

Martín Mereb

Universidad de Buenos Aires – IMAS-CONICET



La vida continúa y la Competencia Interuniversitaria Matemática Argentina (CIMA para los amigos) también. El año pasado participaron más de 40 equipos de varias casas de estudio del país y, en simultáneo y de manera independiente, se sumaron otros tantos de nuestros queridos vecinos Uruguay y Chile. Se llevó a cabo el 27 de agosto de 2025 con el formato habitual de 6 problemas de variados temas y niveles de dificultad, intentando siempre que los enunciados sean cercanos y comprensibles.

Fieles a nuestra misión de despertar curiosidades, creo que en esta entrega hemos logrado también un exitoso después de prueba, lleno de dudas y temas para debatir, tanto para quienes compiten como para quienes colaboran en la organización de tamaño evento. Si quedan cosas sin entender, es la idea.

Aprovecho para felicitar a los premiados por su destacada participación en el **certamen más prestigioso del país para estudiantes de grado**. Asimismo, agradezco a Leandro Cagliero y Juan Pablo Rossetti por el esfuerzo invertido durante más de una década en darle continuidad a la vieja y querida Competencia Paenza.

Recordamos que pueden encontrar todos los problemas en la **página web de la CIMA**, y que la invitación a participar se extiende a estudiantes de universidades de todo el territorio argentino.

### Contando con los primos

El problema 2 de la prueba del 2025 trata sobre polinomios que toman valores enteros al ser evaluados en potencias de primos, pero que no necesariamente deben tomar valores enteros sobre todo  $\mathbb{Z}$ .

---

<https://sites.google.com/site/competenciacima/pruebas-anteriores/resultados-2025>

La pregunta surgió en forma natural durante un desayuno con colegas en una escuela AGRA en Cusco, ¡hace más de 10 años!, a raíz de varios resultados que dependen polinomialmente del tamaño de un cuerpo finito  $\mathbb{F}_q$ .

Para simplificar, pensemos en fórmulas como la que cuenta la cantidad de subespacios de  $\mathbb{F}_q^n$  de dimensión  $k \leq n$ , que viene dada por el polinomio

$$\binom{n}{k}_q = \frac{(1 - q^n)(1 - q^{n-1}) \cdots (1 - q^{n-k+1})}{(1 - q)(1 - q^2) \cdots (1 - q^k)}, \quad (1.1)$$

conocido como el coeficiente binomial gaussiano, ver [2], o aquella sobre la cantidad de polinomios mónicos irreducibles de grado  $n$  en  $\mathbb{F}_q[x]$ , dada por

$$\frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) q^d, \quad (1.2)$$

donde  $\mu$  es la función de Möbius y el parámetro  $d$  en la sumatoria recorre los divisores positivos de  $n$ .

Más allá de lo didáctico que pueda resultar deducir alguna de ellas (ambas conocidas pero no triviales), lo curioso es que son expresiones polinomiales en  $q$ , el tamaño del cuerpo finito, y, por lo tanto, devuelven valores enteros al evaluarse en potencias de primos.

Cabe pues preguntarse si dichos polinomios siguen contando algo al evaluarse en otros números naturales. Por ejemplo, la fórmula (1.2) cuenta la cantidad de collares diferentes de  $n$  piedras con  $k$  colores posibles, ver [4]. Por otro lado, la fórmula (1.1) goza de muchísimas interpretaciones combinatorias.

En aquel desayuno, pareció natural encontrar contraejemplos explotando en el hecho de que las potencias de primos esquivan a los números que arrojan resto 6 en la división por 8. Por ejemplo, el polinomio

$$Q(x) = \binom{x}{7} := \frac{x(x-1) \cdots (x-6)}{7!}$$

devuelve valores enteros para todo  $x \in \mathbb{Z}$  y sólo es impar cuando  $x \equiv 7 \pmod{8}$ . Entonces el polinomio  $P(x) = Q(x+1)/2$  deja de dar valores enteros cuando  $x \equiv 6 \pmod{8}$ .

Entre los equipos que resolvieron este problema, la mayoría encontró un ejemplo similar, con potencias de 2 en el denominador. Curiosamente, uno encontró un ejemplo con potencias de 3 y el equipo campeón, conformado por Julián Máximo Cabrera y Federico Damián Mierez (Universidad Nacional de Rosario), mostró una familia de ejemplos

$$\frac{x(x-p)}{p^3} \prod_{\substack{1 \leq k < p^3 \\ p \nmid k}} (x-k)$$

que funciona para cada primo  $p$  impar.

## De tensiones y tensores

A continuación, y a pedido del público, me gustaría comentar un poco el problema de las cajitas de la prueba pasada.

**Problema 4.** *Se tiene una caja recta (prisma rectangular) de lados  $1, \sqrt{2}$  y  $\sqrt{3}$ . Demostrar que no se puede llenar con cajitas rectas de base cuadrada y tamaños diferentes (sin espacios entre ellas, que se pueden rotar).*

*Demostración.* Supongamos una partición del prisma  $C_0$  de lados  $1, \sqrt{2}$  y  $\sqrt{3}$  en cajitas de base cuadrada.

Buscamos un invariante  $\phi(C)$  para los prismas  $C$  que se comporte como el volumen, pero que se anule en cajitas de base cuadrada y no se anule en  $C_0$ , lo que nos conduce a un absurdo.

¿Qué significa comportarse como el volumen? Básicamente buscamos una función multilineal  $\phi(C) = \phi(x, y, z)$  donde  $x, y, z$  representan las longitudes de los lados del prisma rectangular  $C$ . Al ser lineal en cada variable se tiene que  $\phi(C_1 \cup C_2) = \phi(C_1) + \phi(C_2)$  cada vez que la unión  $C_1 \cup C_2$  de dos prismas  $C_1$  y  $C_2$  también sea un prisma.

¿Cómo lograr su anulación en cajitas rectas de base cuadrada? En definitiva, se requiere que la  $\phi$  se anule cada vez que dos de sus parámetros coincidan. Es decir, que además de multilineal, sea alternada. Esto propone como candidato a invariante alguna expresión que involucre a un determinante. Vamos a querer que sea de  $3 \times 3$  para que resulte trilineal dado que el problema es en 3D.

¿De qué manera nos aseguramos la no anulación en  $C_0$ ? Aquí juega un rol importante la independencia lineal de los números  $1, \sqrt{2}$  y  $\sqrt{3}$  en el  $\mathbb{Q}$ -espacio vectorial  $\mathbb{R}$ . Es decir, que la ecuación

$$a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0$$

sólo tiene como solución racional a la terna  $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ .

Al ser  $\mathbb{Q}$ -linealmente independientes, se puede extender el conjunto  $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$  a una base del  $\mathbb{Q}$ -subespacio vectorial de  $\mathbb{R}$  generado por todas las longitudes de los prismas involucrados en una eventual partición.

Nuestro candidato a invariante es

$$\phi(x, y, z) = \det \begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix}$$

donde  $(a_x, b_x, c_x)$  son las coordenadas de  $x$  en dicha base, correspondientes a los vectores  $1, \sqrt{2}$  y  $\sqrt{3}$ , respectivamente (las otras filas definidas de forma análoga).

De esta manera,  $\phi(C_0)$  es igual a

$$\phi(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Al ser un determinante, se anula en las cajitas de base cuadrada. Por último, la multilinealidad conduce al absurdo  $1 = 0$ , que proviene de suponer una tal partición.  $\square$

¿Dónde están las tensiones? Hay una familia de problemas de embaldosado de rectángulos en partes con formas particulares. En el caso de partes cuadradas, un curioso abordaje en términos de las leyes de Ohm y de Kirchhoff fue encontrado en 1940 por Brooks, Smith, Stone y Tutte, ver [1], y elegantemente expuesto por Hosberger en el séptimo ensayo de [3]. No puedo dejar de mencionarlos, aunque no guarden relación directa con este problema.

¿Y dónde están los tensores? Quien tenga algo de familiaridad con el producto tensorial de módulos notará que toda partición de un prisma en cajitas corresponde a una identidad

algebraica entre elementos de  $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$  y que  $1 \wedge \sqrt{2} \wedge \sqrt{3}$  es no nulo en  $\bigwedge^3 \mathbb{R}$ . Pero esa, esa es otra historia...

## Referencias

- [1] R. Brooks, C. Smith, A. Stone, W. Tutte. *The dissection of rectangles into squares*. Duke Math. J. 7 (1940), 312–340.
- [2] C. F. Gauß. *Summatio quarumdam serierum singularium*. Dieterich, 1808.
- [3] R. Honsberger. *Ingenuity in mathematics*. New Mathematical Library, 23. Random House, Inc., New York, 1970. viii+204 pp.
- [4] C. Moreau. *On distinct circular permutations*. Nouv. Ann. (2) XI. 309-314, 1872.

## Distinciones y premios

### Romina Arroyo

La Dra. Romina Arroyo es Investigadora Adjunta del CONICET y Profesora Asociada en La Universidad Nacional de Córdoba. Se especializa en el estudio de flujos geométricos, métricas distinguidas y de curvatura de Ricci en variedades Riemannianas homogéneas.

✧ Fue galardonada con el Premio Estímulo de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Octubre 2025.



### Carlos Cabrelli

El Dr. Carlos Cabrelli es Investigador Superior del CONICET, Profesor Emérito del Universidad de Buenos Aires, socio honorario de la UMA y fue su Presidente durante el período 2005-2009.

✧ Ha sido nombrado Miembro Correspondiente de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Octubre 2025.

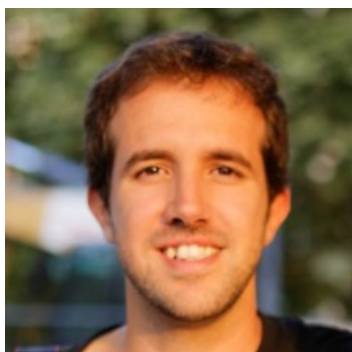


### Demian Goos

El Dr. Demian Nahuel Goos, realizó su Doctorado en la Universidad Nacional de Rosario, es periodista científico independiente y socio de la UMA.

✧ Recibió el Premio de Medios de la DMV (German Mathematical Society) que reconoce logros destacados en la comunicación y divulgación de la matemática.





## Ramiro Lafuente

El Dr. Ramiro Lafuente obtuvo su Doctorado en la Universidad Nacional de Córdoba en el 2013 y actualmente es Profesor asociado de la Universidad de Queensland y socio de la UMA. Se especializa en Geometría Diferencial.

✚ Ha sido galardonado con la Medalla AustMS 2025. Este premio se otorga a miembros de la Sociedad Matemática Australiana en reconocimiento a una trayectoria destacada en investigación en las ciencias matemáticas.

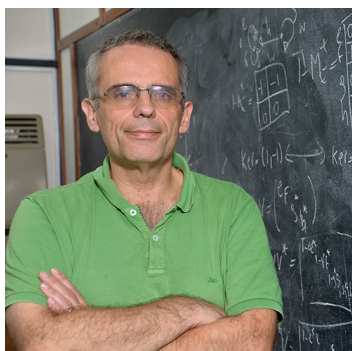
## Alicia Dickenstein

La Dra. Alicia Dickenstein es investigadora especialista en Geometría Algebraica. Actualmente es Profesora Emérita de la Universidad de Buenos Aires, Investigadora Superior del CONICET y Presidenta de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

✚ Recibió el premio Latin American Mathematical Leadership IMSA Award, que reconoce a matemáticos y matemáticas con trayectorias distinguidas, liderazgo excepcional y contribuciones significativas a la investigación en América Latina y el Caribe.



## Guillermo Cortiñas



El Dr. Guillermo Cortiñas es investigador especialista en K-teoría, Álgebra Homológica y Geometría no conmutativa. Actualmente es Profesor Titular de la Universidad de Buenos Aires e Investigador Superior del CONICET. Además, es Director del Instituto IMaS UBA-CONICET y socio titular de la UMA.

✚ Fue galardonado con el premio IMSA Established Mathematician Award que reconoce a investigadores e investigadoras destacados/as por contribuciones significativas e influyentes a la matemática, en particular a quienes trabajan en América Latina

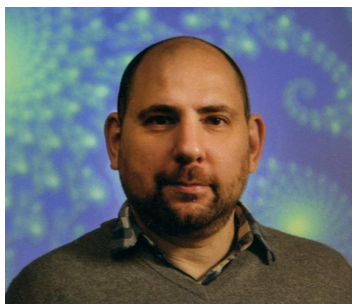
## Nicolás Andruskiewitsch

El Dr. Nicolás Andruskiewitsch es Profesor Titular en la Universidad Nacional de Córdoba, Investigador Superior del CONICET, Académico de Número de la Academia Nacional de Ciencias y Académico Correspondiente de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Fue Presidente de la Unión Matemática Argentina durante el período 2015-2019. Su labor científica atañe principalmente la clasificación de álgebras de Hopf de dimensión finita o crecimiento moderado.



✚ Fue designado Profesor Emérito de la Universidad Nacional de Córdoba, en reconocimiento a su destacada trayectoria académica y científica de relevancia internacional.

## Pablo Shmerkin



El Dr. Pablo Shmerkin es actualmente profesor en la University of British Columbia. Realizó su licenciatura en la Universidad de Buenos Aires y obtuvo su doctorado en la University of Washington. Su investigación se centra en geometría fractal, teoría ergódica y análisis armónico. En particular, trabaja en las conexiones entre estas áreas y problemas de teoría geométrica de la medida.

✚ Recibió el Premio Clay 2026 junto a Tuomas Orponen, Hong Wang y Josh Zahl por la resolución de los problemas de Furstenberg en 2D y Kakeya en 3D.

---

## Nuevos socios honorarios de la UMA

En la Asamblea General Ordinaria de la UMA de 2025 fueron nombrados como socios honorarios:

✧ Sergio Favier

✧ Domingo tarzia

---

## Premio al mejor artículo de la RevUMA

✧ En 2025 se otorgó el Premio al mejor artículo de la RevUMA al trabajo "*Primitive decompositions of Dolbeault harmonic forms on compact almost-Kähler manifolds*", escrito por **Andrea Cattaneo**, **Nicoletta Tardini** y **Adriano Tomassini**. Ver artículo aquí.

---

## CIMA 2025

La Competencia Interuniversitaria de Matemática Argentina se realizó el 27 de agosto de 2025. El jurado competente determinó los equipos ganadores en el siguiente orden:

### Primer puesto

✧ Julián Máximo Cabrera y Federico Damian Mierez (Universidad Nacional de Rosario).

### Segundo puesto

✧ Lautaro Yerimen Arias y Joaquín Inama (Universidad Nacional de La Plata).

### Tercer puesto

✧ Bruno Martín Ziger y Nicolás Ricci (Universidad de Buenos Aires).

### Cuarto puesto

✧ Julian Martín Feldman y Pedro Nicolás Peña (Universidad de Buenos Aires).

### Quinto puesto

✧ Miguel Kalinowski y Mateo Carranza Vélez (Universidad Nacional de Córdoba).

### Menciones de Honor

✧ Eduardo Carranza Vélez y Tiziano Arduino Brunelli (Universidad Nacional de Córdoba).

✧ Iván Moyano Tassara y Nahuel Bobar (Universidad de Buenos Aires).

✧ Franco Iotti y Nicolás Martone (Instituto Tecnológico de Buenos Aires).

✧ Maia Letzen y Martiniano Faure (Universidad Nacional de Córdoba).

✧ Mariano Juncal y Emilio Martínez (Universidad de Buenos Aires).

---

## Concurso de monografías UMA - Edición 2025

Las monografías premiadas en el concurso llevado a cabo durante 2025 son:

### Primer puesto

- ✚ “*Teoría de grafos y el teorema de los cuatro colores*”, por Sofía Evelyn Cuva (Universidad Nacional de Córdoba).

### Segundo puesto

- ✚ “*Emmy Noether, la madre del álgebra moderna*”, por Iris Amoia y Lautaro Ludueña (Universidad Nacional de Córdoba).

### Tercer puesto

- ✚ “*La pesadilla de Berkeley: una breve introducción al análisis no estándar y a la teoría de modelos*”, por Numa Grinberg (Universidad de Buenos Aires).

### Distinciones

- ✚ “*Aquellas pequeñas cosas*”, por Matías Nicolás Sollier (Universidad Nacional del Litoral).
- ✚ “*¿Qué tan rápido multiplicamos cuando multiplicamos rápido?*”, por Lautaro Yerimen Arias (Universidad de Nacional La Plata).
- ✚ “*Donde la distancia acerca: una introducción a los números  $p$ -ádicos*”, por Mercedes Berger (Universidad Nacional del Litoral).
- ✚ “*Clasificación de nudos hasta 8 cruces*”, Mateo Alessi (Universidad Nacional de Cuyo).

## Memoriales

Como comunidad matemática argentina, lamentamos profundamente la pérdida de Rubén Puente, una figura muy querida en los ámbitos matemáticos de San Luis y Mendoza. Quienes lo conocieron y trabajaron con él extrañarán su presencia. Su trayectoria dejó huellas perdurables en cada uno de los espacios que habitó.



**Rubén Puente** (febrero 19, 1953 – noviembre 26, 2025) Fue un matemático mendocino cuya trayectoria estuvo estrechamente vinculada a la Universidad Nacional de San Luis y a la Escuela Politécnica Nacional de Quito. En la Universidad Nacional de San Luis se desempeñó como Secretario General de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas y Naturales, Director del Departamento de Matemática. Se jubiló en el 2022 como Profesor Titular.

Rubén fue una figura central en la historia del Departamento de Matemática de la Universidad Nacional de San Luis. Su compromiso, pasión y dedicación contribuyeron de manera decisiva a construir el Departamento tal como lo conocemos hoy. Quienes compartieron su camino recuerdan no solo su incansable trabajo, sino también su profunda convicción en el valor de la matemática y en la construcción colectiva del conocimiento. Su legado permanece vivo en la institución, en quienes tuvieron la oportunidad de formarse junto a él y en la organización académica que ayudó a forjar.

Noticiero de la Unión Matemática Argentina  
<http://www.union-matematica.org.ar/noticiero/>  
ISSN 1514-9595 (en línea)  
Volumen 61, Número 1, 2026  
✉ [noticiero@union-matematica.org.ar](mailto:noticiero@union-matematica.org.ar)

### **Editora en Jefe**

Silvia Lassalle (Universidad de San Andrés - CONICET)

### **Comité Editorial**

- Iván Angiono (Universidad Nacional de Córdoba - CONICET)
- Isolda Cardoso (Universidad Nacional de Rosario)
- Adrián Pastine (Universidad Nacional de San Luis - CONICET)
- Victoria Paternostro (Universidad de Buenos Aires - CONICET)

### **Colaboraron en la edición de este número**

- Sergio Favier
- Gabriel Larotonda