

## Miradas Matemáticas

### La vereda de enfrente de la dominación en grafos

Valeria Leoni

Universidad Nacional de Rosario  
& CONICET



#### Resumen

En este breve artículo recopilamos el camino que hemos trazado desde 2010 hasta hoy, en torno al estudio de ciertas estructuras en grafos que, al igual que los conjuntos dominantes, modelan problemas de ubicación de servicios de diversa índole. A diferencia de los problemas que se modelan con conjuntos dominantes, consideramos que los sitios donde se pretende ubicar los servicios cuentan con limitaciones de capacidad, y que el desafío principal es optimizar estos espacios para ubicar la mayor cantidad posible de estos servicios.

En este resumen recordamos a quienes iniciaron esta construcción, así como los avances y las líneas actuales de investigación en relación a nuevas variantes del problema que pretenden modelar situaciones reales más complejas.

## 1. Introducción

En Matemática y Ciencias de la Computación, un grafo es un conjunto de objetos llamados vértices unidos por enlaces llamados aristas, que permiten estudiar las interrelaciones entre unidades que interactúan unas con otras. En general, un grafo se representa gráficamente como un conjunto de puntos (vértices) unidos por líneas (aristas). Un ejemplo puede verse en la Figura 2.

Para un grafo  $G$ ,  $V(G)$  es el conjunto de sus vértices y  $E(G)$  el de sus aristas. Dos vértices  $v_1$  y  $v_2$  se dicen adyacentes si  $(v_1, v_2)$  es parte de  $E(G)$ .

El tan conocido concepto de dominación en grafos fue definido por Øystein Ore en 1962, pero se asegura que ya había sido previamente introducido con un nombre diferente en 1958 por Claude Berge.

Un conjunto de vértices en un grafo es un conjunto dominante si cada vértice del grafo está en el conjunto dominante o es adyacente a algún vértice de ese conjunto.

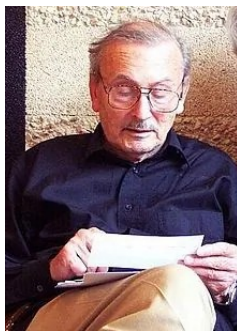


Figura 1: Claude Berge (1926-2002), el padre de la teoría de grafos.

Equivalentemente, si cada vecindad cerrada<sup>1</sup> en el grafo contiene **al menos** un vértice del conjunto dominante. En numerosos problemas reales que pueden modelarse con grafos, se busca hallar este tipo de estructuras, y entre ellas, una de mínimo tamaño. Se denomina a éste un **problema de dominación** en un grafo. La característica común de los problemas que se modelan como problemas de dominación es la necesidad de ubicar un determinado servicio en algunos de ciertos lugares preestablecidos (representados por los vértices del grafo), de modo que cada vértice reciba ese servicio —ya sea porque el servicio se ubicó en él o en un vértice adyacente— y que el número total de vértices con el servicio sea mínimo. Por ejemplo, si con un grafo modelamos las esquinas de un museo de modo que cada esquina del museo es un vértice y cada pasillo, una arista del grafo, un problema que puede mirarse como uno de dominación en ese grafo consiste en ubicar un sensor en algunas de sus esquinas de modo tal que cada esquina sea monitoreada por al menos un sensor (uno ubicado en esa esquina o alguno ubicado en esquinas adyacentes), y que en total se ubique la menor cantidad de sensores, tal vez, debido al costo que ésto acarrea.

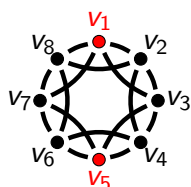


Figura 2: Un grafo con vértices  $v_1, v_2, \dots, v_8$ , y aristas  $(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_5), (v_4, v_6), (v_5, v_6), (v_5, v_7), (v_6, v_7), (v_6, v_8), (v_7, v_8), (v_7, v_1), (v_8, v_1), (v_8, v_2)$ . Los vértices en rojo forman un conjunto dominante de tamaño mínimo.

Por otro lado, la noción de empaquetamiento en grafos fue introducida por Meir y Moon en 1975. Un conjunto de vértices en un grafo es un **empaquetamiento** si sus vecindades cerradas son disjuntas de a pares. Equivalentemente, si cada vecindad cerrada del grafo contiene **como máximo** un vértice del empaquetamiento. En otros tantos problemas reales que pueden modelarse con grafos, se busca hallar este otro tipo de estructuras, y entre ellas, una de máximo tamaño. En estas situaciones, los servicios a ubicar son en general necesarios, pero posiblemente “molestos”. Por ello, interesa ubicar el máximo número de esos servicios, pero de tal manera que no haya más de uno “cerca” de cada sitio, en un escenario dado. Para citar un ejemplo concreto, pensemos ahora en el problema que puede surgir en un barrio de una ciudad que requiere la ubicación de contenedores de

<sup>1</sup>La **vecindad abierta** del vértice  $v$ ,  $N_G(v)$ , es el conjunto de vértices adyacentes a  $v$ , y la **vecindad cerrada** de  $v$ ,  $N_G[v]$ , es  $N_G(v)$  junto con  $v$  mismo.

basura. Es aconsejable que ningún vecino esté cerca de demasiados contenedores, ni éstos deberían estar demasiado cerca unos de otros. ¿Dónde deberían ubicarse los contenedores entonces? Si con un grafo modelamos las esquinas y las calles del barrio, éste es un problema que puede mirarse como una variante del de empaquetamientos en ese grafo.

La naturaleza opuesta de las restricciones —**al menos** en la definición de conjunto dominante y **como máximo** en la de empaquetamiento— permite situar los problemas planteados como problemas duales dentro de la teoría de grafos. Por esta razón, aquí nos referimos a “la vereda de la dominación” y “la vereda de enfrente”, respectivamente.

Por un lado, en la teoría de grafos el concepto de dominación tiene cerca de un centenar de variantes y generalizaciones que modelan situaciones similares a la del problema de los sensores arriba descritos (ya se han publicado más de 1200 artículos sobre dominación en grafos). De todas ellas, la generalización en la cual queremos enfocarnos aquí fue introducida por Harary y Haynes en el año 2000 [7] y es la siguiente: para un grafo  $G$  y un número entero  $k \geq 1$ , un **conjunto  $k$ -upla dominante** en un grafo  $G$  es un subconjunto  $D$  de  $V(G)$  que verifica que la vecindad cerrada de cada vértice de  $G$  tiene  $k$  vértices en común con  $D$ . En símbolos, si  $|N_G[v] \cap D| \geq k$  para todo  $v \in V(G)$ . Esta variante modela, por ejemplo, el escenario donde se requiere que cada esquina del museo sea monitoreada por, al menos, un número predefinido  $k$  de sensores. En este contexto, el problema se centra nuevamente en minimizar el cardinal del conjunto total de sensores necesarios para satisfacer dichas restricciones de cobertura.

Por otra parte, el concepto de empaquetamiento fue naturalmente generalizado por Gallant y otros autores, recién en el año 2010 [6]: para un grafo  $G$  y un entero positivo  $k$  dados, un **empaquetamiento  $k$ -limitado** en  $G$  es un subconjunto  $P$  de sus vértices que verifican que ninguna vecindad cerrada en el grafo contiene más de  $k$  vértices de  $P$ . En símbolos, si  $|N_G[v] \cap P| \leq k$  para todo  $v \in V(G)$ .

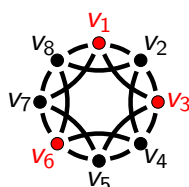


Figura 3: Mismo grafo que el de la Figura 2. Los vértices en rojo forman un empaquetamiento 2-limitado de tamaño máximo.

A diferencia de lo que venía desarrollándose en la “vereda de la dominación”, en la “vereda de enfrente” solo se había introducido hasta entonces en la literatura esta única generalización.

En 2003, Liao y Chang en [15] plantean el problema de optimización, al que denominamos MD, de hallar el menor tamaño posible de un conjunto  $k$ -upla dominante en  $G$ , para un grafo  $G$  y un número entero  $k \geq 1$  dados. Prueban que su versión como problema de decisión es NP-completo<sup>2</sup> aún en grafos con estructuras simples como son los bipartitos<sup>3</sup>

<sup>2</sup>Decimos que un problema de decisión es NP-completo si no se conoce un algoritmo que en tiempo polinomial en el tamaño de la entrada, pueda resolver cualquiera de sus instancias.

<sup>3</sup>Un grafo  $G$  es **bipartito** si  $V(G)$  puede particionarse en dos conjuntos estables (subconjunto de  $V(G)$  de vértices no adyacentes de a pares).

y también los grafos splits<sup>4</sup>. Como ocurre para todo problema NP-completo, pueden encontrarse clases particulares de grafos donde su resolución resulte “más sencilla”, y esto es lo que en general se explora. Estos mismos autores en [14], presentan algoritmos de resolución de MD de tiempo polinomial en algunas clases particulares de grafos que no detallamos aquí.

Respecto a los empaquetamientos  $k$ -limitados, no se había estudiado hasta el momento el problema de optimización asociado.

Un primer aporte personal en la vereda de enfrente de la dominación, fue formular el siguiente problema de optimización asociado a empaquetamientos  $k$ -limitados e iniciar también el estudio de su complejidad computacional:

### Problema LP [2]

Dado un grafo  $G$  y un número entero  $k \geq 1$ , hallar el tamaño máximo de un empaquetamiento  $k$ -limitado en  $G$ .

De esta manera, podemos afirmar que éste fue el comienzo de la construcción de la “vereda de enfrente”. En las siguientes secciones de este artículo recopilamos la mayoría de los resultados conseguidos desde entonces, tanto sobre LP como de nuevas variantes que fuimos introduciendo en trabajos sucesivos que pretenden modelar situaciones reales más complejas.

## 2. Empaquetamientos vs. conjuntos dominantes

Motivados por la simetría en las definiciones de los conceptos de dominación y empaquetamientos decriptos en la sección anterior, comenzamos en el año 2011 a confrontar estos problemas desde el punto de vista de sus complejidades computacionales. Esa simetría nos llevó a pensar que LP sería igualmente difícil de resolver en grafos split y en grafos bipartitos.

Hagamos una pausa para explicar brevemente algunas cuestiones que tienen que ver con el tratamiento de problemas NP-completos. Para probar que un problema  $A$  es NP-completo, lo que hacemos es mostrar que es equivalente resolver este problema a resolver alguno, digamos  $B$ , de los problemas que se conocen en la clase NP; formalmente, si existe una transformación (o procedimiento) que convierte una instancia del problema  $A$  en una instancia del problema  $B$  de manera que la respuesta a esa instancia del problema  $A$  está determinada por la respuesta del problema  $B$  en la instancia transformada. Si tenemos una transformación de  $A$  a  $B$  de tiempo polinomial y un algoritmo eficiente para resolver  $B$ , tendremos entonces un algoritmo eficiente para resolver  $A$ . Decimos entonces que el problema  $A$  se reduce al problema  $B$ . Ejemplos de problemas NP-completos son los problemas del conjunto estable<sup>5</sup> y del cubrimiento por vértices en grafos. El problema del cubrimiento por vértices de  $G$  consiste en encontrar un subconjunto de  $V(G)$  que contiene al menos un extremo de cada arista de  $E(G)$ , con tamaño mínimo.

<sup>4</sup>Un grafo  $G$  es split si  $V(G)$  puede particionarse en un clique (subconjunto de  $V(G)$  de vértices adyacentes de a pares) y un conjunto estable.

<sup>5</sup>El problema del conjunto estable consiste en encontrar un conjunto estable con tamaño máximo.

Retomando nuestro estudio, en primer lugar observamos que, para demostrar que el problema de dominación MD es NP-completo para grafos split y grafos bipartitos, en [15] se reduce, en ambos casos, el conocido problema de cubrimiento de vértices.

Con cierta desorientación en la vereda de enfrente, intentamos abordar el estudio de LP en esas mismas clases de grafos. Sin embargo, no encontramos un mismo problema que pudiera reducirse a LP en ambos casos. En primer lugar, en el caso de grafos split, logramos reducir el problema del conjunto estable en un grafo a LP en un grafo split, de la siguiente manera: a partir de un grafo  $G$  dado, con  $V(G) = \{v_j : j = 1, \dots, n\}$  y  $E(G) = \{e_l : l = 1, \dots, m\}$ , y números enteros positivos  $k$  y  $\alpha$ , construimos un grafo split  $G'$  con vértices  $E(G)$  formando una clique, más ciertos vértices adicionales formando un conjunto estable  $S = \bigcup_{j=1}^k \{v_j^i : j = 1, \dots, n\}$  y adyacencias como puede verse en la Figura 4, a modo de ejemplo. Probamos que  $G$  tiene un conjunto estable de tamaño al menos  $\alpha$  si y solo si  $G'$  tiene un empaquetamiento  $k$ -limitado de tamaño al menos  $k \cdot \alpha$ . En el ejemplo de la Figura 4,  $\{v_2, v_3\}$  es un conjunto estable en  $G$  y  $\{v_2^1, v_2^2, v_3^1, v_3^2\}$  es un empaquetamiento 2-limitado en  $G'$ . Observamos que la transformación presentada se lleva a cabo en tiempo polinomial. De esta manera queda demostrado el siguiente resultado:

**Teorema 1** ([3]). *LP es NP-completo en grafos split.*



Figura 4: Ejemplo de grafos  $G$  y  $G'$ , para  $k = 2$ , en la reducción de la prueba del Teorema 1

En segundo lugar, para grafos bipartitos, llevamos a cabo una reducción del problema MD en un grafo bipartito al problema LP en un grafo bipartito de la siguiente manera: a partir de un grafo bipartito  $G$  y números enteros positivos  $k$  y  $\alpha$ , construimos otro grafo bipartito al que llamamos  $G''$ , y probamos que  $G$  tiene un conjunto  $k$ -upla dominante de tamaño a lo sumo  $\alpha$  si y solo si  $G''$  tiene un empaquetamiento  $k$ -limitado de tamaño al menos  $|V(G'')| - \alpha$ . No mostramos aquí los detalles de la construcción del grafo  $G''$  por ser ésta un tanto técnica, pero remarcamos que la transformación diseñada puede realizarse en un tiempo polinomial. De esta manera, queda demostrado el siguiente resultado:

**Teorema 2** ([2]). *LP es NP-completo en grafos bipartitos.*

A partir de aquí, ya con algunos ladrillos firmes, continuamos la construcción de la “vereda de enfrente” de manera pausada y conscientes de que se trataría de una tarea algo más exigente.

Los resultados expuestos arriba, junto con otros que omitimos por espacio, nos llevaron naturalmente a preguntarnos si existe algún tipo de equivalencia entre los problemas MD y LP o, por el contrario, si es posible encontrar una clase de grafos en la que uno de estos problemas sea resoluble en tiempo polinomial mientras que el otro resulte NP-completo. Nos adentramos entonces en la búsqueda de reducciones de tiempo polinomial entre ambos

problemas. Esta búsqueda fue, sin duda, larga y nada sencilla. A continuación, detallamos en dos teoremas las reducciones diseñadas entre estos problemas. Con  $d_G(v)$  denotamos el grado en  $G$  del vértice  $v$ , éste es  $|N_G(v)|$ , y con  $\Delta(G)$  el grado máximo entre todos los vértices en  $G$ .

**Teorema 3** ([13]). *Dados un grafo  $G$  y números  $k$  y  $\alpha$ ,  $G$  tiene un conjunto  $k$ -upla dominante de tamaño a lo sumo  $\alpha$  si y solo si el grafo  $P(G)$  (ver su definición a continuación) tiene un empaquetamiento  $k'$ -limitado de tamaño al menos  $\alpha'$ , donde  $\alpha' := |V(P(G))| - \alpha$  y  $k' := \Delta(G) - k + 1$ .*

Una idea de la demostración del Teorema 3 es la siguiente: a partir del grafo dado  $G$ , construimos un grafo  $P(G)$  agregando para cada  $v \in V(G)$ ,  $\Delta(G) - d_G(v)$  vértices adyacentes a  $v$  que definen un conjunto estable (véase la Figura 5, donde las líneas punteadas en la imagen de la derecha indican aquellas que fueron agregadas a  $G$  para construir  $P(G)$ ). Notar que

$$|V(P(G))| = |V(G)| + \sum_{v \in V(G)} [\Delta(G) - d_G(v)] = |V(G)|[\Delta(G) + 1] - 2|E(G)|.$$

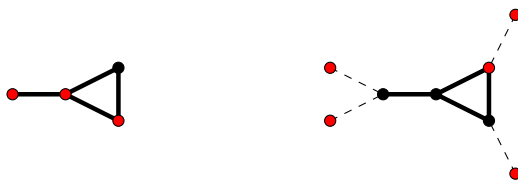


Figura 5: Ejemplo de grafos  $G$  y  $P(G)$  para  $k = 2$  del Teorema 3. En rojo, a la izquierda un conjunto 2-upla dominante  $R$  en  $G$ , y a la derecha, un empaquetamiento 2-limitado  $|V(P(G)) \setminus R|$  en  $P(G)$

A partir de esta reducción podemos desprender lo siguiente:

**Corolario 1.** *Sea  $\mathcal{G}$  una clase de grafos tal que, para un grafo  $G$  en  $\mathcal{G}$  se verifica que  $P(G)$  también está en  $\mathcal{G}$ . Entonces, si LP es resoluble en tiempo polinomial en los grafos de  $\mathcal{G}$ , MD es también resoluble en tiempo polinomial en  $\mathcal{G}$ . Además, si MD es NP-completo en  $\mathcal{G}$ , entonces LP es NP-completo en  $\mathcal{G}$ .*

En el otro sentido, podemos enunciar:

**Teorema 4** ([13]). *Dados un grafo  $G$  y números  $k$  y  $\alpha$ , sean  $k' := \Delta(G) - k + 1$  y*

$$\alpha' := |V(D(G))| - \sum_{\{v: d_G(v) \leq k-1\}} (k - d_G(v)) - \alpha.$$

*Entonces  $G$  tiene un empaquetamiento  $k$ -limitado de tamaño al menos  $\alpha$  si y solo si el grafo  $D(G)$  (ver su definición a continuación) tiene un conjunto  $k'$ -upla dominante de tamaño a lo sumo  $\alpha'$ .*

Una idea de la demostración del Teorema 4 se basa en lo siguiente: dado un grafo  $G$  y un entero positivo  $k$  con  $1 \leq k \leq \Delta(G)$ , construimos el grafo  $D(G)$  obtenido a partir de  $G$  agregando, para cada  $v \in V(G)$  con  $d_G(v) < \Delta(G)$ ,  $\Delta(G) + 1 - \min\{k, d_G(v)\}$  vértices que definen una clique  $Q_v$ , y haciendo que  $v$  sea adyacente a exactamente  $\Delta(G) - d_G(v)$  vértices de  $Q_v$  (véase la Figura 6, donde las líneas más finas en la imagen de la derecha indican aquellas que fueron agregadas a  $G$  para definir  $D(G)$ ). Es fácil notar que

$$|V(D(G))| = |V(G)| + \sum_{\{v: d_G(v) < \Delta(G)\}} [\Delta(G) + 1 - \min\{k, d_G(v)\}].$$

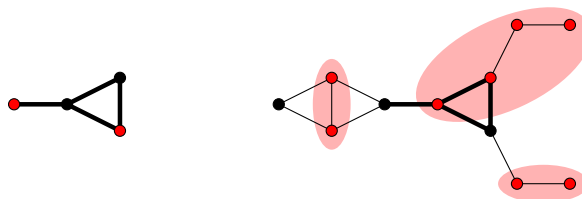


Figura 6: Grafos  $G$  y  $D(G)$  para  $k = 3$  del Teorema 4. En rojo, a la izquierda un empaquetamiento 2-limitado  $R$  en  $G$ , y a la derecha, un conjunto 2-upla dominante en  $D(G)$

A partir de esta reducción podemos desprender lo siguiente:

**Corolario 2.** *Sea  $\mathcal{G}$  una clase de grafos tal que, para un grafo  $G$  en  $\mathcal{G}$  se verifica que  $D(G)$  también está en  $\mathcal{G}$ . Entonces, si MD es resoluble en tiempo polinomial en  $\mathcal{G}$ , LP también es resoluble en tiempo polinomial en  $\mathcal{G}$ . Además, si LP es NP-completo en  $\mathcal{G}$ , entonces MD es NP-completo en  $\mathcal{G}$ .*

La clase de grafos fuertemente cordales (una superclase de los árboles, donde un grafo árbol es un grafo en el que cualquier par de vértices están conectados por exactamente un camino) verifica la hipótesis del Corolario 2. Si tenemos en cuenta el algoritmo de tiempo lineal proporcionado en [15] para resolver MD en grafos fuertemente cordales, el Teorema 4 nos permite afirmar que existe un algoritmo de tiempo cuadrático para resolver PL en esa clase de grafos.

En este punto, podemos afirmar que los problemas MD y LP poseen definiciones estrechamente relacionadas y presentan la misma complejidad computacional en diversas clases de grafos. Una tal clase es la de los grafos regulares<sup>6</sup>, y otras clases —cuyas definiciones resultaron un tanto técnicas— verifican también simultáneamente las hipótesis de los Corolarios 1 y 2.

### 3. Modelando problemas más generales con empaquetamientos

En esta sección, en subsecciones contiguas, introducimos distintas generalizaciones y variantes del problema de empaquetamientos LP, que abarcan diversas situaciones de mayor generalidad. En particular, nos interesa estudiar si la complejidad de resolución de cada variante introducida es o no superior, en comparación con LP. Para establecer

<sup>6</sup>Un grafo es regular si todos sus vértices tienen el mismo grado.

una jerarquía de complejidad formal, sabemos que se requiere una reducción polinomial entre cada una de ellas y LP. En este sentido, demostramos que ninguna de las variantes planteadas posee una complejidad superior a la de LP.

## Empaquetamientos generalizados

En sus primeros pasos, Liao y Chang en [14] diseñan un algoritmo que halla, en tiempo polinomial, conjuntos  $k$ -uplas dominantes en grafos árboles. Este algoritmo se basa en un método de etiquetado, del cual no presentamos aquí los detalles debido a que requiere la introducción de bastante notación específica.

En primer lugar, ese método de etiquetado nos inspiró de manera natural a introducir una versión generalizada del concepto de  $k$ -upla dominante que contempla la posibilidad de que algunos de los servicios a ubicar deban pertenecer necesariamente al conjunto dominante buscado, así como también que los requerimientos en cada vecindad cerrada no sean uniformes. Formalmente: dados un grafo  $G$ , un vector  $\mathbf{r} = (r_v) \in \mathbb{Z}^{V(G)}$  (que representa los requerimientos) y un subconjunto de vértices  $\mathcal{R}$  (que representa los vértices que tienen que estar necesariamente entre los elegidos), un subconjunto  $D$  de  $V(G)$  es un conjunto  $(\mathbf{r}, \mathcal{R})$ -dominante en  $G$  si  $\mathcal{R} \subseteq D$  y  $|N_G[v] \cap D| \geq r_v$ , para todo  $v \in V(G)$ .

En segundo lugar, nos propusimos investigar desde la perspectiva de los empaquetamientos, si una versión simétrica de esta generalización de conjuntos dominantes resulta conceptualmente adecuada. Como consecuencia, fue natural introducir una versión generalizada del concepto de empaquetamientos  $k$ -limitados de la siguiente manera:

**Definición 1** ([2]). Para un grafo  $G$ , un vector  $\mathbf{c} = (c_v) \in \mathbb{Z}^{V(G)}$  y  $\mathcal{A} \subseteq V(G)$ , decimos que  $B \subseteq V(G)$  es un empaquetamiento  $(\mathbf{c}, \mathcal{A})$ -limitado en  $G$  si  $B \subseteq \mathcal{A}$  y  $|N_G[v] \cap B| \leq c_v$ , para cada  $v \in V(G)$ .

Esta definición contempla situaciones en las que ciertos vértices **no pueden** ser seleccionados para ubicar servicios (aquellos que no están en  $\mathcal{A}$ ), como así también la posibilidad de que las restricciones de capacidad en las vecindades cerradas **no sean uniformes** (dadas por el vector  $\mathbf{c} = (c_v) \in \mathbb{Z}^{V(G)}$ ).

No fue difícil demostrar que, para un grafo  $G$ , un vector  $\mathbf{c} = (c_v) \in \mathbb{Z}^{V(G)}$  y  $\mathcal{A} \subseteq V(G)$ ,  $B \subseteq \mathcal{A}$  es un empaquetamiento  $(\mathbf{c}, \mathcal{A})$ -limitado en  $G$  si y solo si  $V(G) \setminus B$  es un conjunto  $(\mathbf{r}, V(G) \setminus \mathcal{A})$ -dominante en  $G$ , donde  $r_v = \max\{0, d_G(v) + 1 - c_v\}$ .

Definimos también de manera natural el siguiente problema de optimización:

### Problema LP [2]

Dados un grafo  $G$ , un vector  $\mathbf{c} = (c_v) \in \mathbb{Z}^{V(G)}$  y un conjunto  $\mathcal{A} \subseteq V(G)$ , hallar el tamaño máximo de un empaquetamiento  $(\mathbf{c}, \mathcal{A})$ -limitado de  $G$ .

Obsérvese que resolver LP dada para un grafo  $G$  y un número  $k$ , es equivalente a resolver GLP para  $G$ , el conjunto  $\mathcal{A} = V(G)$  y el vector  $\mathbf{c} = (c_v)$ , donde  $c_v = k$  para cada  $v \in V(G)$ . Entonces, la NP-completitud de LP para una clase de grafos implica la NP-completitud de GLP para la misma clase de grafos.

Por otra parte, diseñamos una reducción en tiempo polinomial de GLP a LP. Esto lo formaliza el siguiente teorema, aunque no detallamos la definición de la transformación  $P_{c,k}$  por ser ésta un tanto técnica:

**Teorema 5** ([13]). Sean un grafo  $G$ , un vector  $\mathbf{c}$ ,  $\mathcal{A} \subseteq V(G)$ ,  $k := \max\{c_v : v \in V(G)\}$  y  $G'' = P_{\mathbf{c},k}(G)$ . Entonces  $G$  tiene un empaquetamiento  $(\mathbf{c}, \mathcal{A})$ -limitado de tamaño al menos  $\alpha$  si y solo si  $G''$  tiene un empaquetamiento  $k$ -limitado de tamaño al menos  $\alpha + \sum_{v \in V(G)} (k - c_v)$ .

Parafraseando, podemos afirmar que este nuevo “ladrillo” (GLP) que hemos agregado en la vereda de enfrente no es “más duro” que el existente (LP).

### Funciones de empaquetamiento

En vista de otras aplicaciones aún no contempladas por las nociones introducidas hasta el momento, comenzamos a analizar aquellas en las que se requiere ubicar más de un servicio en algunos o en todos los lugares preestablecidos, con el objetivo de maximizar la cantidad total de servicios, respetando nuevamente las restricciones impuestas por las vecindades asociadas a cada lugar.

Si bien los empaquetamientos  $k$ -limitados fueron definidos como subconjuntos de vértices del grafo que modela la situación, es claro que podemos interpretarlos como funciones  $\{0, 1\}$ -valuadas (que asignan 0 a un vértice que no está en el empaquetamiento, y 1 a un vértice que si lo está). Si extendemos entonces estas funciones a funciones valuadas en los números enteros no negativos, podremos modelar este nuevo tipo de situaciones en las que estamos ahora interesados. Formalmente, introducimos el concepto de función de  $\{k\}$ -empaquetamiento de un grafo  $G$  para un entero positivo fijo  $k$  de la siguiente manera, donde  $f(S) = \sum_{v \in S} f(v)$  denota el **peso** de  $S$ , para  $S \subseteq V(G)$ .

**Definición 2** ([9]). Dado un grafo  $G$  y un entero positivo  $k$ , una **función de  $\{k\}$ -empaquetamiento** de  $G$  es una función  $f : V(G) \rightarrow \mathbb{Z}_+^0$ , tal que para todo  $v \in V(G)$ ,

$$f(N_G[v]) \leq k.$$

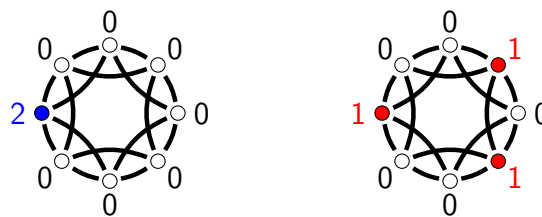


Figura 7: Dos funciones de  $\{2\}$ -empaquetamiento del mismo grafo.

Denotamos con  $L_{\{k\}}(G)$ , al máximo peso posible de  $V(G)$  entre todas las funciones de  $\{k\}$ -empaquetamiento de  $G$ .

Dado que cualquier empaquetamiento  $k$ -limitado en  $G$  puede ser visto como una función de  $\{k\}$ -empaquetamiento de  $G$ , es claro que  $L_{\{k\}}(G)$  es al menos tan grande como el mayor tamaño de un empaquetamiento  $k$ -limitado en  $G$ , si bien pueden ser distintos como lo muestra el ejemplo de la Figura 8:

Introducimos el siguiente problema de optimización asociado a funciones de  $\{k\}$ -empaquetamiento:



Figura 8: A la izquierda, un empaquetamiento 3-limitado de tamaño máximo, y a la derecha, en el mismo grafo  $G$  se observa que  $L_{\{3\}}(G) = 6$

### Problema $\{k\}$ PF, $k$ fijo

Para un grafo  $G$ , hallar el peso máximo de una función de  $\{k\}$ -empaquetamiento de  $G$ .

Este nuevo problema podría ser más difícil o no de resolver que LP para cada  $k$  fijo, desde el punto de vista de su complejidad computacional. Sabemos que, para establecer una jerarquía de complejidad formal, se requiere una reducción polinomial entre ambos problemas. El siguiente teorema muestra que  $\{k\}$ PF para  $k$  fijo puede reducirse linealmente a LP. Para enunciarlo, recordamos la siguiente operación entre grafos.

Dados dos grafos  $G_1$  y  $G_2$ , el **producto fuerte**  $G_1 \otimes G_2$  entre  $G_1$  y  $G_2$  es el grafo cuyo conjunto de vértices es el producto cartesiano entre  $V(G_1)$  y  $V(G_2)$ , y donde dos vértices  $u_1v_1$  y  $u_2v_2$  son adyacentes si y sólo si  $u_1 = u_2$  y  $(v_1, v_2) \in E(G_2)$ , o si  $v_1 = v_2$  y  $(u_1, u_2) \in E(G_1)$ , o si  $(v_1, v_2) \in E(G_2)$  y  $(u_1, u_2) \in E(G_1)$ .

**Teorema 6** ([9]). *Para cada  $k$  fijo, y siendo  $K_k$  el grafo completo de  $k$  vértices, vale que:*

$$L_{\{k\}}(G) = L_{\{k\}}(G \otimes K_k).$$

Parafraseando nuevamente, podemos decir que este otro ladrillo ( $\{k\}$ PF) que hemos agregado a nuestra construcción de la vereda de enfrente no es “más duro” que el ladrillo inicial (LP).

Pero la pregunta que surge es: ¿será  $\{k\}$ PF NP-completo?

Nos propusimos entonces estudiar la complejidad de  $\{k\}$ PF. Para ello, logramos reducir en tiempo polinomial el conocido problema NP-completo (Karp, 1972) de empaquetamiento de conjuntos<sup>7</sup>.

La reducción llevada a cabo se basa en la siguiente construcción (ver Figura 9). Para un conjunto no vacío  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  y una familia  $S = \{S_1, \dots, S_m\}$  de subconjuntos de  $X$ , construimos un grafo  $G$  de la siguiente manera: para cada  $S_j \in S$ , creamos un subgrafo  $G_j$  de  $G$  que consta de  $k$  caminos de tres vértices  $a_{j,r}, b_{j,r}, c_{j,r}$ , y un vértice  $d_j$ , y tal que  $N_G(b_{j,r}) = \{a_{j,r}, c_{j,r}\}$ , para cada  $r = 1, \dots, k$ . Además, el vértice  $d_j$  es adyacente a cada uno de los vértices  $a_{j,1}, \dots, a_{j,k}$ . Para cada elemento  $x_i \in X$  existe un vértice  $v_i$  en  $G$  que es adyacente a  $c_{j,1}, \dots, c_{j,k}$  si y solo si  $x_i \in S_j$ . Además, existe un vértice  $v$  adyacente a cada  $v_i$  y un vértice  $w$  de grado uno adyacente a  $v$ . La transformación se completa tomando  $\alpha = k^2|S| + k + q$ . Bajo esta transformación, podemos demostrar que existe una función de  $\{k\}$ -empaquetamiento de  $G$  con peso  $\alpha$  o mayor si y solamente si existe un empaquetamiento de conjuntos de  $X$  de tamaño  $q$  o mayor.

Entonces, podemos enunciar:

<sup>7</sup>Dado un conjunto no vacío  $X$  y una familia  $S$  de subconjuntos de  $X$ , un empaquetamiento de conjuntos de  $X$  es una subfamilia  $T$  de  $S$  tal que todos los miembros de  $T$  son disjuntos de a pares. El problema de empaquetamiento de conjuntos consiste en hallar un empaquetamiento de conjuntos de  $X$  de máximo tamaño.

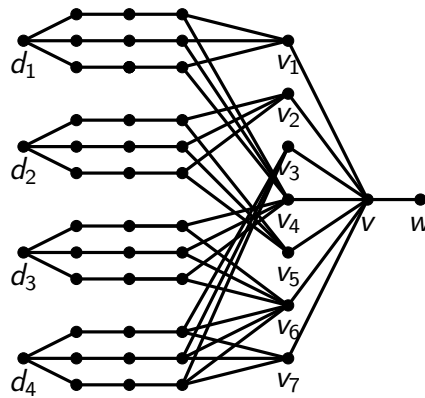


Figura 9: Transformación para  $X = \{x_1, \dots, x_7\}$ ,  $S_1 = \{x_1, x_4\}$ ,  $S_2 = \{x_2, x_5\}$ ,  $S_3 = \{x_4, x_6\}$ ,  $S_4 = \{x_3, x_6, x_7\}$  y  $k = 3$

**Teorema 7 ([8]).**  $\{k\}$ PF es NP-completo para todo número entero  $k \geq 1$  fijo.

También demostramos que  $\{k\}$ PF es NP-completo incluso en grafos split. Esto pudo llevarse a cabo reduciendo el problema  $\{k\}$ PF en un grafo general al propio  $\{k\}$ PF en un grafo split. No mostramos aquí esa reducción para no hacer tan extenso este artículo.

## Funciones de empaquetamiento con etiquetas

Los conceptos presentados en las Secciones 3 y 3 son variantes de la noción de empaquetamiento clásico en distintos aspectos, los cuales no están relacionados entre sí.

Surgió la inquietud de encontrar una manera de unificar todos estos conceptos. Introducimos entonces la siguiente noción que cumple este objetivo:

**Definición 3 ([10]).** Dado un grafo  $G$  y una función de etiquetado  $L$  sobre  $V(G)$ , esto es  $L(v) = (t(v); k(v))$  definida en  $V(G)$ , donde  $t(v) \in \{0, \dots, t\} \cup \{A\}$  ( $t$  es un número entero no negativo), una función de  **$L$ -empaquetamiento** de  $G$  es una función  $f : V(G) \rightarrow \{0, \dots, t\}$  que satisface las dos condiciones siguientes:

1. si  $t(v) \neq A$  entonces  $f(v) = t(v)$ ;
2. para todo  $v \in V(G)$ ,  $f(N_G[v]) \leq k(v)$ .

Es fácil observar que la versión unificada que muestra la Definición 3 generaliza a todas las variantes de empaquetamientos presentadas hasta aquí:

1. Cuando  $t = 1$  y  $L(v) = (A; k)$  para cada  $v \in V(G)$ , si  $f$  es una función de  $L$ -empaquetamiento de  $G$ , entonces  $\{v \in V(G) : f(v) = 1\}$  es un empaquetamiento  $k$ -limitado de  $G$  y recíprocamente, si  $B \subseteq V(G)$  es un empaquetamiento  $k$ -limitado de  $G$ , entonces la función  $f$  definida sobre  $V(G)$  como  $f(v) = 1$  para  $v \in B$  y  $f(v) = 0$  en caso contrario, es una función de  $L$ -empaquetamiento de  $G$ .
2. Cuando  $t = 1$  y  $t(v) \neq 1$  para cada  $v \in V(G)$ , si  $f$  es una función de  $L$ -empaquetamiento de  $G$ , entonces  $\{v \in V(G) : f(v) = 1\}$  es un empaquetamiento  $(k, \mathcal{A})$ -limitado de  $G$  para  $\mathcal{A} = \{v \in V(G) : t(v) = A\}$ , y viceversa.
3. Cuando  $t = k$  y  $L(v) = (A; k)$  para cada  $v \in V(G)$ , si  $f$  es una función de  $L$ -empaquetamiento de  $G$ , entonces  $f$  es una función de  $\{k\}$ -empaquetamiento de  $G$ , y viceversa.

Formulamos también el problema de optimización asociado a funciones de  $L$ -empaquetamiento:

### Problema $LPF$

Para un grafo  $G$  y una función de etiquetado  $L$  sobre  $V(G)$ , hallar el peso máximo de una función de  $L$ -empaquetamiento de  $G$ .

Se puede demostrar que los problemas  $GLP$  y  $\{k\}PF$  introducidos en las Secciones 3 y 3 respectivamente, son tan difíciles de resolver, desde el punto de vista de sus complejidades computacionales, como este problema general  $LPF$ . No mostramos aquí los detalles de las reducciones realizadas para tal fin, para no hacer tan extenso este artículo. Parafraseando una vez más, podemos decir que todos los ladrillos agregados en nuestra construcción no fueron “más duros” que el inicial.

Ya casi llegando al fin del recorrido de nuestra construcción de la “vereda de los empaquetamientos”, no podemos dejar de mencionar y de agradecer, el aporte en este sentido realizado recientemente por otros autores en [11]). En ese trabajo se presenta una versión que generaliza aún más a esta última versión  $LPF$ , y por ende, a todas las nociones de empaquetamiento definidas hasta el momento y resumidas aquí en las secciones anteriores. Ésta es la siguiente:

Dados un grafo  $G$ , un vector de capacidades  $\mathbf{k} = (k_v) \in \mathbb{Z}^{V(G)}$  y dos vectores  $\mathbf{u} = (u_v) \in \mathbb{Z}^{V(G)}$  y  $\mathbf{l} = (l_v) \in \mathbb{Z}^{V(G)}$ , una función  $f : V \rightarrow \mathbb{Z}_0^+$  es una **función de  $(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{u})$ -empaquetamiento** en  $G$  si  $l_v \leq f(v) \leq u_v$  y  $f(N_G[v]) \leq k_v$ , para cada  $v \in V(G)$  [11].

## Funciones flexibles de empaquetamiento: en desarrollo

Recientemente, una de las últimas variantes introducidas en la vereda de la dominación, nació simplemente flexibilizando las restricciones de requerimientos a las vecindades de algunos vértices. Más precisamente, en esta variante las restricciones de dominancia son pedidas solo a aquellos vértices en los que no se ubica algún servicio. Formalmente, para un entero positivo  $k$ , se define una **función  $\{k\}$ -romana dominante** en un grafo  $G$  como una función  $f$  que satisface  $f(N_G[v]) \geq k$  para cada  $v \in V$  con  $f(v) = 0$  [16]. Para  $k = 2$ , los autores manifiestan que esta definición está basada en la estrategia de defensa planteada por el Emperador Constantino el Grande para proteger el Imperio Romano. En el modelo matemático presentado para esta situación, cada vértice del grafo corresponde a una localidad en el Imperio Romano, y existe una arista entre dos localidades cuando una legión puede desplazarse de alguna manera entre ambas, y pueden ubicarse a lo sumo dos legiones por localidad. Se considera que una ubicación sin ejércitos está protegida si tiene una localidad vecina con dos legiones en servicio, o al menos dos localidades vecinas con una legión en servicio.

Debido a su reciente definición, pocos resultados pueden encontrarse en la literatura sobre esta nueva variante “romana” de conjuntos dominantes.

Nos propusimos una vez más investigar, desde la perspectiva de los empaquetamientos, si una versión simétrica a esta variante romana de conjuntos dominantes resulta conceptualmente adecuada. En el caso de empaquetamientos, esta idea de “flexibilizar” restricciones — de capacidad en este caso— correspondería a pensar en situaciones en las que no sea necesario solicitar la restricción a los vértices en los que no se ubican servicios. Dicho de manera similar, correspondería a pedirle la restricción de capacidad solo a las vecindades de los vértices en los que se ha ubicado un servicio.

Una situación real que requiere de un tal planteo podría ser por ejemplo la situación que surge en la gestión de interferencias en redes inalámbricas, donde en el diseño de tales redes, los nodos activos no deben tener demasiados vecinos transmitiendo simultáneamente para evitar colisiones de paquetes. Los empaquetamientos clásicos imponen esta restricción a **todos** los nodos, sin embargo, si se permite la existencia de nodos receptores pasivos o en modo de suspensión (vértices  $v$  con  $f(v) = 0$ ), al estar inactivos, estos nodos no sufren interferencias, lo que permite a sus vecinos activos transmitir a mayor densidad, aumentando así el rendimiento total del sistema.

De este modo, introducimos la siguiente variante de empaquetamientos:

**Definición 4.** Dado un grafo  $G$  y un entero no negativo  $k$ , una función  $f : V \rightarrow \{0, 1\}$  es una **función flexible de  $k$ -empaquetamiento** en  $G$  si ocurre que:

$$f(N_G[v]) \leq k \text{ para cada } v \in V \text{ con } f(v) = 1.$$

La flexibilización de algunas restricciones podría sugerir inicialmente una complejidad inferior a la de LP. No obstante, y a diferencia de las variantes de empaquetamientos analizadas, en este caso no ha sido posible demostrar que esta versión “flexibilizada” posea una complejidad menor o igual a la del problema original. Sin embargo, demostramos que estas funciones flexibles de empaquetamiento se corresponden a estructuras conocidas con otros nombres en la literatura. Específicamente, una función flexible de 1-empaquetamiento equivale a un conjunto estable en el grafo. Además, y bajo esta analogía, podemos afirmar que, para un entero positivo  $k$  cualquiera, una función flexible de  $k$ -empaquetamiento es un conjunto  $(k - 1)$ -dependiente<sup>8</sup> en el grafo. Esto permite establecer la complejidad computacional del modelo propuesto. Específicamente la NP-completitud del problema orientado a hallar una función flexible de  $k$ -empaquetamiento de mínimo peso se deriva directamente de la complejidad de los problemas asociados a conjuntos  $r$ -dependientes en grafos, los cuales pertenecen a la clase NP-completo[1].

## 4. Nuevos desafíos

Tras quince años dedicados a la construcción de la “vereda de enfrente” de la dominación en grafos, el aporte realizado en [11] y detallado al final de la Sección 3 establece las condiciones de mayor generalidad, dejando abierta la exploración de nuevas extensiones y/o variantes. Consideramos interesante abordar ahora el estudio de su correspondiente variante “flexibilizada”, basándonos en las ideas expuestas en la Sección 3. Nos encontramos actualmente iniciando el estudio de una tal variante, la cual toma la forma:

**Definición 5.** Dado un grafo  $G$  y un vector entero de capacidades  $\mathbf{k} = (k_v) \in \mathbb{Z}^{V(G)}$  y dos vectores enteros  $\mathbf{u} = (u_v) \in \mathbb{Z}^{V(G)}$  y  $\mathbf{l} = (l_v) \in \mathbb{Z}^{V(G)}$ , una función  $f : V \rightarrow \mathbb{Z}_0^+$  es una **función flexible de  $(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{u})$ -empaquetamiento** de  $G$  si ocurre que:

1. para todo  $v \in V(G)$ ,  $l_v \leq f(v) \leq u_v$ , y
2. para  $v \in V(G)$  con  $f(v) = u_v$ ,  $f(N_G[v]) \leq k_v$ .

A modo de cierre, retomamos el enfoque que ha servido de motivación fundamental desde el inicio, que es el recorrido de la vereda de la dominación. Como contribución final,

<sup>8</sup>Un conjunto  $r$ -dependiente en un grafo es un subconjunto de vértices que induce un subgrafo con grado máximo  $r$ , con  $r \geq 0$  [1]. Notar que un conjunto 0-dependiente equivale a un conjunto estable.

queremos proponer el estudio de estructuras simétricas a las descritas en la Definición 5, las cuales extienden su aplicación al área específica de la dominación romana. Introducimos entonces:

**Definición 6.** Dado un grafo  $G$ , un vector entero de requerimientos  $\mathbf{k} = (k_v) \in \mathbb{Z}^{V(G)}$  y dos vectores enteros  $\mathbf{u} = (u_v) \in \mathbb{Z}^{V(G)}$  y  $\mathbf{l} = (l_v) \in \mathbb{Z}^{V(G)}$ , una función  $f : V \rightarrow \mathbb{Z}_0^+$  es una **función romana generalizada de  $(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{u})$ -dominación** de  $G$  si ocurre que:

1. para todo  $v \in V$ ,  $l_v \leq f(v) \leq u_v$ , y
2. para  $v \in V(G)$  con  $f(v) = l_v$ ,  $f(N[v]) \geq k_v$ .

Esta última definición generaliza a todas las versiones de dominaciones romanas que están siendo tan estudiadas en trabajos recientes y actuales ([16], [4], [12] y [5], entre otros) y abre otra línea de estudio en este sentido.

## Referencias

- [1] Dessmark, A., J. K. L. A. (1993). The maximum  $k$ -dependent and  $f$ -dependent set problem. Algorithms and Computation. ISAAC 1993. Lecture Notes in Computer Science, vol 762. Springer, Berlin, Heidelberg.
- [2] Dobson, M., Leoni, V., and Nasini, G. (2010). The  $k$ -limited packing and  $k$ -tuple domination problems in strongly chordal,  $p_4$ -tidy and split graphs. Electronic Notes in Discrete Mathematics, pages 559—566.
- [3] Dobson, M., Leoni, V., and Nasini, G. (2011). The multiple domination and limited packing problems in graphs. Int. Procc. Lett., pages 1108—1113.
- [4] Fernández, L. and Leoni, V. (2023). New complexity results on roman  $\{2\}$ -domination in graphs. RAIRO Oper. Res., 57:1905–1912.
- [5] Ferrari, A. J., Leoni, V., and Pujato, M. I. L. (2025). Characterizations of Italian graphs and Sicilian graphs. RAIRO Oper. Res., 59(1):239–249.
- [6] Gallant, R., Gunther, G., Hartnell, B., and Rall, D. (2010). Limited packings in graphs. Discrete Applied Mathematics, 158(12):1357–1364.
- [7] Harary, F. and Haynes, T. (2000). Double domination in graphs. Ars Combinatoria, 55:201–213.
- [8] Hinrichsen, E., Dobson, M., and Leoni, V. (2017). On the complexity of the  $\{k\}$ -packing function problem. International Transactions in Operational Research, 24:347–354.
- [9] Hinrichsen, E. and Leoni, V. (2014).  $\{k\}$ -packing functions of graphs. LNCS, 8596:325–335.
- [10] Hinrichsen, E., Leoni, V., and Safe, M. (2020). Labelled packing functions in graphs. Int. Procc. Lett.

- [11] Hinrichsen, E., Nasini, G., and Vansteenkiste, N. (2023). On general packing functions in graphs. Procedia Computer Science, 223:367–369.
- [12] Kim, K. (2024). Italian, 2-rainbow and Roman domination numbers in middle graphs. RAIRO Oper. Res., 58(2):2045–2053.
- [13] Leoni, V. and Nasini, G. (2014). Limited packing and multiple domination problems: Polynomial time reductions. Discrete Applied Mathematics, pages 547—553.
- [14] Liao, C. and Chang, G. (2002). Algorithmic aspect of  $k$ -tuple domination in graphs. Taiwanese Journal of Mathematics, page 415–420.
- [15] Liao, C. and Chang, G. (2003).  $k$ -tuple domination in graphs. Inform. Process. Lett., 87:45–50.
- [16] Wang, C.-X., Yang, Y., Wang, H.-J., and Xu, S.-J. (2021). Roman  $\{k\}$ -domination in trees and complexity results for some classes of graphs. Journal of Combinatorial Optimization, 42:174–186.