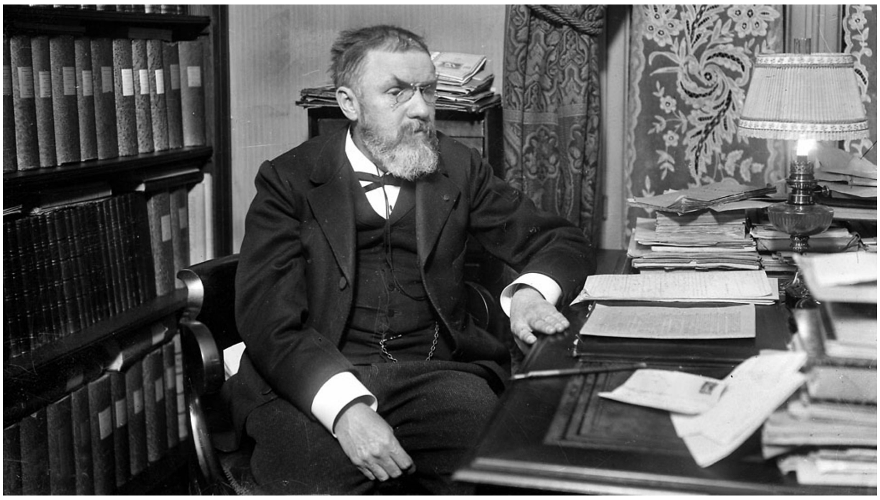
POINCARÉ, PERELMAN Y LA CONJETURA RESUELTA

Un viaje a través de la topología

Sofía Evelyn Cuva

Julio de 2024



La Matemática es el arte de dar
el mismo nombre a cosas diferentes.

Henri Poincaré

Concurso de monografías UMA

FaMAF - UNC

Prefacio

Trabajar en esta monografía fue una experiencia increíble. Disfruté muchísimo del proceso y, aunque fue todo un desafío puesto que nunca había hecho algo similar, ahora que pude concluirlo y presentarlo aquí, me siento muy contenta. Siento que fue como una especie de viaje a través del tiempo en el que conocí a muchos personajes y me encariñé con ellos, aprendí mucho y escuché muchas historias.

Siempre me ha generado muchísima curiosidad saber cómo vivían y pensaban las personas en épocas pasadas, en tiempos en los que muchas de las cosas que hoy conocemos no existían. Haber podido combinar esa curiosidad con mi carrera y las áreas que me gustan fue muy pero muy emocionante. Mientras buscaba una imagen para la portada me topé con la que finalmente elegí y, observándola detenidamente, me pregunté qué habría estado pasando por la mente de Henri Poincaré en ese momento, hace más de cien años. ¿En qué podría haber estado pensando? ¿Qué podría haber estado escribiendo? ¿En aquel momento ya se encontraba inmerso en las cuestiones que yo estudié para esta monografía?...

Mi objetivo con el presente escrito es hacer un repaso histórico sobre la topología, sobre sus orígenes y las primeras ideas que surgieron en el área y sobre una cuestión que se mantuvo abierta durante más de un siglo. Así, haré énfasis en dos personalidades muy destacadas en este campo, Poincaré y Perelman, quienes sobresalieron tanto por su capacidad como por su ingenio y originalidad de sus ideas y trabajos. Para abordar la famosa *Conjetura de Poincaré* daré el contexto histórico, los conceptos y nociones teóricas necesarias y, por último, una idea muy breve de la demostración de Perelman. Esta última es tan innovadora como difícil de entender, con lo cual sólo hablaré de las herramientas que se utilizaron para la prueba y daré cierta intuición de la misma.

Por último, quiero agradecer especialmente a Aaron por haber motivado mi decisión de participar en el concurso, por apoyarme durante todo el proceso y por compartirme sus conocimientos para perfeccionar la estética y el formato de este trabajo; a Javi y Fran por haberse tomado el tiempo de leerme y dar sus opiniones sobre una primera versión del mismo, a Jorge Lauret por aconsejarme y proveerme de materiales que podrían serme de ayuda; y, por supuesto, a mi papá. Muchas gracias a todos.

Índice General

1. Introducción

Corría el año de 1904 cuando, alumbrado por una pequeña lámpara y rodeado de un montón de libros esparcidos sobre su escritorio, Henri Poincaré no hacía más que pensar. Absorto en el silencio de su despacho, en su mente vagaba una pregunta que se repetía una y otra vez:

¿Acaso lo que había sido demostrado en dimensiones inferiores
podía extenderse a dimensiones superiores?

Su pregunta era de lo más natural y, aunque en un principio parecía algo bastante inocente, no fue capaz de responderla por aquel entonces. Sin embargo, y aunque él no lo sabía, Henri Poincaré acababa de dar origen a una cuestión que se convertiría, durante muchos años, en uno de los enigmas más importantes de la matemática. El deseo por hallar una respuesta llevaría, durante todo el siglo XX, a numerosos avances en el campo de la geometría y la topología, e inspiraría a muchos a intentar dar una demostración de lo que para entonces ya todos conocían como *Conjetura de Poincaré*.

2. Un poco de historia

En el siglo XIX, la matemática floreció como un jardín de conocimiento y atravesó un período de gran expansión y desarrollo de nuevos descubrimientos y de nuevas ideas. El álgebra se volvió más sofisticada, la teoría de números apareció como una fuente de nuevos conocimientos algebraicos, la teoría de las ecuaciones diferenciales se tornó más rigurosa y lograron resolverse problemas que durante mucho tiempo no habían admitido solución. En este contexto comenzó a emerger una nueva disciplina, una especie de geometría más flexible que la que se conocía hasta ese entonces, una geometría que desafiaba las nociones convencionales de medida y distancia. Y fue en ese escenario que Henri Poincaré se abrió paso como uno de los pioneros en explorar este terreno, sentando con sus aportes las bases para todas las ideas de la topología moderna.

2.1. Jules Henri Poincaré

Henri Poincaré nació en Nancy, Francia, en 1854 y es reconocido como uno de los matemáticos más importantes de todos los tiempos. Muchos se refieren a él como *el último universalista*, puesto que sus estudios abarcaron numerosas áreas no sólo de la matemática sino también de la física y, luego de conseguir fama y reputación como matemático, dedicó su extraordinario don literario a describir para el público general el significado e importancia de la ciencia y de las matemáticas.

Poincaré creció en el seno de una familia de clase media-alta muy influyente y, en 1862, ingresó en el Liceo de Nancy. Luego de graduarse, estudió en la prestigiosa École Polytechnique, bajo la tutela de Charles Hermite y, un año después, publicó su primer trabajo original en matemáticas, llamado *Nueva demostración de las propiedades de la indicatriz de una superficie.*

Tras graduarse en 1876 y con la idea de convertirse en ingeniero, continuó su formación en la Escuela de Minas en París, a la que solían ir los licenciados más distinguidos de la Politécnica. En sus horas de ocio, siguió estudiando matemáticas en forma adicional y en 1879 presentó su tesis doctoral, titulada *Las propiedades de las funciones definidas por ecuaciones en derivadas parciales*, que trataba sobre teoremas de existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales. Poincaré encontró una nueva forma de estudiar las propiedades de las ecuaciones diferenciales no lineales y fue el primero en estudiar las propiedades geométricas generales de ellas. Finalmente, obtuvo su título doctoral en agosto de 1879 e inmediatamente después consiguió una plaza como profesor de Cálculo Diferencial e Integral en la Universidad de Caen. Allí comenzó a trabajar en lo que él llamaba “funciones fuchsianas” y en la teoría de funciones automorfas. Su objetivo era la resolución de un cierto tipo de ecuaciones diferenciales, aunque luego se interesó por problemas más generales, como por ejemplo, las ecuaciones diferenciales que gobiernan el movimiento de los planetas del sistema solar. En 1881, estando aún en Caen, Poincaré escribió un artículo sobre ecuaciones diferenciales en el que ya exploraba lo que luego sería toda una nueva rama de las matemáticas: lo que hoy conocemos como teoría de los sistemas dinámicos.

En la época en la que Poincaré se hallaba inmerso en estas cuestiones, más precisamente en el verano de 1885, el rey de Suecia Óscar II, que era un amante de la ciencia y de las matemáticas, convocó un concurso científico organizado por el matemático sueco Gösta Mittag-Leffler, quien constituyó un comité científico conformado por Charles Hermite, Karl Weierstrass y él mismo. Se estableció que el plazo de entrega de los trabajos sería hasta el 1 de junio de 1888 y la premiación al vencedor tendría lugar el 21 de enero del año siguiente.

Los participantes debían escoger entre cuatro temas, y Poincaré escogió para su trabajo el primero, que trataba sobre la estabilidad del sistema solar, dedicándose así, en gran parte, a analizar el denominado *Problema de los tres cuerpos*[1]. Para el caso de dos cuerpos, el problema ya había sido completamente resuelto por Newton, pero el caso de tres era una cuestión muy difícil sobre sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales. Durante dos años, Poincaré trabajó en el problema de los tres cuerpos y para 1888 ya había cimentado completamente su teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales ordinarias. Los métodos que introdujo consistían en deducir propiedades de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales sin necesidad de calcularlas explícitamente. Su memoria, presentada en mayo de 1888, fue tan notable que el jurado decidió declararle ganador, y ha sido considerada como el primer tratado sobre teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales. El 20 de enero de 1889, el monarca aprobó oficialmente la decisión del comité, sin embargo, durante la revisión previa a su publicación en la revista *Acta Mathematica*, el editor detectó algunas imprecisiones que fueron comunicadas a Poincaré, quien contestó explicando que se trataba de un error grave. No obstante, pudo corregirlo rápidamente y su arreglo lo condujo a nuevos descubrimientos que hoy se consideran los comienzos de la teoría del caos. Finalmente, la memoria corregida fue publicada en 1890.

Para finales del siglo, Poincaré ya se había interesado por la topología, que en aquel entonces los matemáticos llamaban *Geometria situs*, y ello lo llevó a la necesidad de generalizar los conceptos y las herramientas matemáticas conocidas hasta ese momento a espacios de más de tres dimensiones. Con su obra *Analysis situs*, publicada en 1895, contribuyó haciendo un estudio muy riguroso sobre conexidad y escribió las primeras páginas de lo que hoy llamamos topología algebraica al introducir los conceptos de grupo fundamental y homología.

En sus últimos años, Poincaré se abocó al desarrollo de la teoría de la relatividad, donde jugó un papel crucial realizando importantes contribuciones a la teoría de Lorentz y siendo uno de los primeros en darse cuenta de las implicaciones de la relatividad para la geometría y la física.

En 1912 debió ser operado a raíz de una complicación prostática, que finalmente le causó la muerte por embolia el 17 de julio de ese mismo año, a los 58 años de edad. Sus restos se encuentran en el panteón de su

[1] *El problema de los tres cuerpos* consiste en determinar, en cualquier instante, las posiciones y velocidades de tres cuerpos, de cualquier masa, sometidos a atracción gravitacional mutua y partiendo de unas posiciones y velocidades dadas.

familia en el Cementerio de Montparnasse, en París.

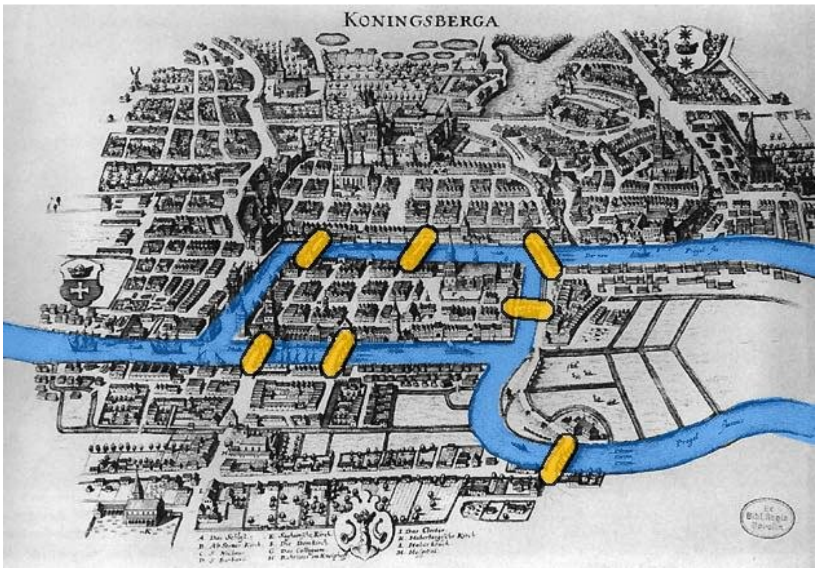
2.2. La geometría de plastilina

Aunque la topología comenzó a despegar a partir del 1900, sus inicios pueden situarse en el siglo XVIII. Hasta ese entonces, los problemas matemáticos habían estado vinculados a la idea de medida, magnitud o distancia, y en esta época se empezaron a plantear problemas en los que estos aspectos dejaban de tener importancia. Los primeros matemáticos en tratarlos le dieron el nombre de *Geometría situs* o *Analysis situs*; que significa *Geometría de la situación* ó *Análisis de la posición*.

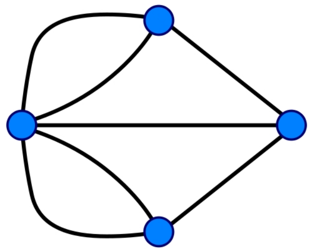
El origen de la topología como disciplina científica lo inaugura la introducción por parte de Euler de dos elementos, los cuales fueron:

- La fórmula para los poliedros: En realidad, en 1639 Descartes ya había notado una relación entre la cantidad de caras C, aristas A y vértices V de los poliedros, la cual era $C - A + V = 2$. Descartes no publicó su descubrimiento, pero lo dejó escrito. Leibniz fue el primero en leerlo en 1675 y Euler el primero en publicarlo, en 1750, para luego dar una demostración en 1751.

- Su solución al problema de los puentes de Königsberg: En la época de Euler, el plano de la ciudad de Königsberg era el siguiente:



El río Pregel la atravesaba formando una isla la cual estaba unida a la ciudad por siete puentes y el problema entonces consistía en averiguar si una persona que partiera de un lugar determinado podría regresar al punto de partida tras cruzar cada puente una sola vez. Euler demostró que el problema era equivalente a recorrer el siguiente gráfico con un lápiz sin levantarlo del papel, de manera que se empiece en un punto y se regrese a él recorriendo cada camino una sola vez. Así, el problema entero podía reducirse a un simple diagrama de puntos (vértices) unidos por líneas (aristas). O sea, podía reducirse a un problema de poliedros, como se muestra a continuación:



En esta interpretación más simplificada, cada puente está representado por una arista y cada una de las diferentes regiones de la ciudad por un vértice. Así, en lenguaje de grafos, lo que quería determinarse era si para este diagrama podía existir un **ciclo euleriano**.

En 1735, Euler demostró que dicho problema no tenía solución y al explicar porqué hizo una de las mayores contribuciones: señaló que lo único que importaba era cómo están conectadas las islas, las orillas y los puentes y distinguió dos tipos de caminos: un trayecto abierto, que empieza y termina en vértices diferentes; y un trayecto cerrado, que empieza y termina en el mismo vértice. Demostró que para este diagrama en particular no existía ninguno de los dos trayectos y para eso consideró la valencia de cada uno de los vértices, o sea, cuántas aristas salen de cada vértice. Así, si hubiese existido un trayecto cerrado, Euler llegó a la conclusión de que todos los vértices deberían tener valencia par, pero en este diagrama tenemos un vértice con valencia cinco y otro con valencia tres, por lo tanto no podía existir dicho trayecto. Si en cambio hubiese existido un trayecto abierto, entonces habría exactamente dos vértices con valencia impar, pero en el diagrama los vértices de valencia impar son cuatro (y son todos) con lo cual tampoco podría existir un trayecto abierto.

Finalmente, Euler profundizó un poco más y demostró también que estas condiciones necesarias para la existencia de un trayecto son también suficientes siempre y cuando el diagrama sea conexo, o sea siempre que dos vértices estén unidos por una arista.[2]

Así, lo que Euler descubrió es que su fórmula para los poliedros era un invariante topológico, en particular, era invariante por funciones continuas.

El matemático suizo Simon L'Huilier se interesó por la fórmula de Euler y descubrió que había ciertas figuras geométricas que no la cumplían, en particular aquellas que tenían agujeros. Sin embargo, se dio cuenta de que podía generalizarla a un objeto con un número cualquiera de agujeros g y así obtuvo que $C - A + V = 2 - 2g$. Este número g, que formalmente se llama el **género** de la figura, es también un

[2] A modo de curiosidad, en la actualidad sólo existen cinco puentes en Kalininsgrado (así renombraron los soviéticos a Königsberg tras su toma en 1945), distribuidos de tal manera que ahora sí es posible definir un **camino euleriano**, es decir, un trayecto que comienza en una isla y termina en otra; pero no todavía un ciclo euleriano.

invariante topológico

Ya en el siglo XIX, en 1834, fue Johann Listing, uno de los alumnos de Gauss, el primero en utilizar la palabra topología en un artículo cuyo título fue *Introducción al estudio de la topología*, donde hizo un trabajo parcial sobre la conexión de superficies. Listing introdujo el concepto de la banda de Möbius y fue el mismo Augustus Möbius, otro estudiante de Gauss, quien se encargó de estudiar las características de este objeto y clasificó a este tipo de superficie como no orientable. Así, para mediados del siglo XIX, Listing y sus colegas habían llegado a la conclusión de que existían dos familias de superficies desde el punto de vista topológico: las orientables y las no orientables; y, tiempo después, con el teorema de caracterización de superficies, la topología de espacios bidimensionales pudo considerarse como conocida.

Figura 1: Leonhard Paul Euler, 1707-1783. Matemático y físico suizo.

Figura 2: Johann Benedict Listing, 1808-1882. Matemático alemán.

Y entonces a comienzos del 1900 tomó el protagonismo Henri Poincaré, quien, dando un paso más, se propuso entender las variedades tridimensionales introduciendo para ello los conceptos fundamentales de la topología moderna. Sus estudios lo condujeron, en 1904, a formular la interrogante que lo llevaría a la inmortalidad: *¿Toda variedad compacta simplemente conexa de dimensión 3 es homeomorfa a la 3-esfera?*[3].

2.3. Una demostración que llevó más de un siglo

En realidad, Poincaré nunca estableció que la respuesta a su pregunta fuera afirmativa. Sin embargo, los matemáticos posteriores comenzaron a inclinarse por la opción de que sí lo fuera y entonces lo que debía llamarse *Problema de Poincaré* pasó a conocerse como *Conjetura de Poincaré*.

Así, para 1982 ya estaban probados todos los casos para $n \geq 4$, aunque el problema original con $n = 3$ seguía sin resolverse. Durante años, esta fue una de las cuestiones abiertas más importantes de la topología y de la matemática en general y su estudio ha llevado a un gran número de avances en el área de la topología de variedades, aunque también a muchas demostraciones falsas. Por ejemplo, en 1934 el matemático John

[3]Entendemos por 3-esfera a $S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$.

Whitehead dio una “demostración” de un resultado que implicaría la conjetura de Poincaré. Sin embargo, luego descubriría que este era falso, encontrando él mismo un contraejemplo para ello, que actualmente se conoce como *variedad de Whitehead*.

Para comienzos de este siglo, el Instituto Clay de Matemáticas, una fundación que tiene como objetivo la difusión del conocimiento matemático, seleccionó la Conjetura de Poincaré para conformar la lista de los conocidos *Problemas del Milenio*, ofreciendo el premio de un millón de dólares a la primera solución correcta. La lista fue oficialmente presentada el 24 de mayo del año 2000 en París y a partir de ese momento varios trabajos de supuestas demostraciones fueron enviados para su revisión. Un caso que fue bastante conocido es el del matemático Martin Dunwoody, quien en abril de 2002 presentó un artículo con una supuesta prueba de la conjetura, lo cual generó un gran interés dentro de la comunidad matemática. Sin embargo, rápidamente se encontró un error fundamental en su demostración y esta fue retirada.

Figura 3: Christopher Zeeman. Probó el caso $n = 5$ en 1961.

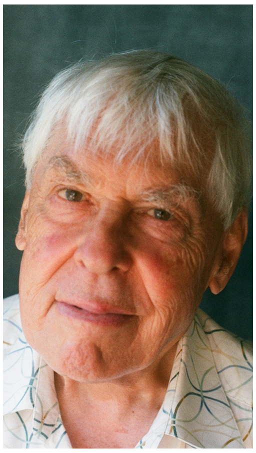


Figura 4: Stephen Smale. Lo probó para $n \geq 7$ en 1961.

Figura 5: John Stallings. Probó el caso $n = 6$ en 1962.

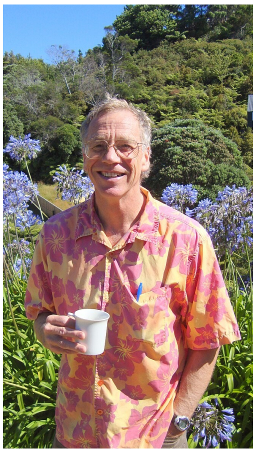


Figura 6: Michael Freedman. Probó el caso $n = 4$ en 1982.

Fue recién en 2006 cuando el matemático ruso Grigori Perelman pudo dar una demostración, basándose en los trabajos del matemático Richard S. Hamilton sobre el flujo de Ricci, quien fue el primero en utilizar este concepto en 1982. Perelman utilizó herramientas de la geometría riemanniana y la topología para demostrar la veracidad de la conjetura y, a pesar de que su trabajo fue considerado revolucionario y le valió reconocimiento mundial en la comunidad matemática, este rechazó todos los premios alegando, entre otras cosas, que su contribución no era mayor que la de Hamilton y que consideraba que él también era merecedor del premio. Luego de esto, Perelman se aisló de la atención mediática y algunos incluso dicen que ha abandonado las matemáticas por completo.

Hablaremos de él con más detalle en las próximas secciones, pero antes veamos los contenidos necesarios para entender palabra por palabra la pregunta que Poincaré se hizo hace más de cien años.

3. Teoría necesaria

3.1. Topología General

La Topología es la rama de la matemática dedicada al estudio de aquellas propiedades de los cuerpos geométricos que permanecen inalteradas por transformaciones continuas. Matemáticos como Hausdorff, Fréchet, Riesz, Uryshon y Alexandroff fueron los encargados de, durante el siglo XX, contribuir con las definiciones y resultados que se utilizan hasta el día de hoy.

Definición: Sea X un conjunto cualquiera. Una **topología** en X es una colección de subconjuntos $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ que satisface las siguientes propiedades:

1. $\emptyset$, $X \in \tau$.

2. Si $U_i \in \tau$ para $i \in I$ entonces $\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau$.

3. Si $U_i \in \tau$ para $i = 1, \cdots , n$ entonces $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau$.

Si $\tau = \mathcal{P}(X)$ entonces τ se denomina **topología discreta**.

Un **espacio topológico** es un par (X, τ) donde X es un conjunto cualquiera y τ es una topología en X. Luego, si (X, τ) es un espacio topológico, a los elementos de τ se los llama **abiertos**. A su vez, decimos que un subconjunto $F \subset X$ es **cerrado** si su complemento $X - F$ es abierto.

Definición: Sea (X, τ) espacio topológico y $\mathcal{B} \subseteq \tau$. $\mathcal{B}$ se dice una **base** de τ si $\forall x \in X$ y $\forall U \in \tau$ tal que $x \in U$, $\exists B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$.

Definición: Si (X, τ) es un espacio topológico e $Y \subset X$ es un subconjunto cualquiera, podemos dotar al conjunto Y de la llamada **topología relativa**. Para ello, definimos el conjunto $\tau_Y = \{U \cap Y : U \in \tau\}$.

Definición: Se dice que un espacio topológico (X, τ) satisface el:

- **Primer axioma de numerabilidad** (ó que es N_1) si para todo $x \in X$ existen $\{U_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ abiertos tales que si $x \in V \subset X$ entonces existe n_0 tal que $U_{n_0}(x) \subset V$.

- **Segundo axioma de numerabilidad** (ó que es N_2) si existe una base numerable para la topología. Esto es, si existen $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ abiertos y base de la topología.

3.1.1. Funciones continuas

Definición: Sean (X, τ) e (Y, τ') espacios topológicos y sea $f : X \to Y$ una función. Decimos que f es **continua** si la preimagen de abiertos de Y son abiertos en X, es decir, si vale que $V \in \tau'$ implica $f^{-1}(V) \in \tau$.

Definición: Si $(X, \tau), (Y, \tau')$ son espacios topológicos, una función $f : X \to Y$ es un **homeomorfismo** si f es biyectiva, continua y su inversa es también continua.

Lema: *Sean $(X, \tau), (Y, \tau')$ espacios topológicos y sea $f : X \to Y$ una función continua y biyectiva. Son equivalentes:*

1. *f es un homeomorfismo.*

2. *f es abierta.*

3. *f es cerrada.*

Dem:

1) $\Rightarrow$ 2) : Sea $A \subset X$ abierto, entonces $f(A) = (f^{-1})^{-1}(A)$ que es un abierto pues por hipótesis existe $f^{-1} : Y \to X$ continua.

2) $\Rightarrow$ 3) : Sea $F \subset X$ cerrado. $(f(F))^c = f(F^c)$ que es un abierto pues f es abierta. Luego $f(F)$ es cerrado.

3) $\Rightarrow$ 1) : Como f es biyectiva, existe la inversa. Debemos ver que esta es continua. Sea $A \subset X$ abierto. $(f^{-1})(A) = \{y \in Y : f^{-1}(y) \in A\} = f(A) = (f(A^c))^c$ que es abierto pues f es cerrada y A^c también.

■

Definición: X, Y dos espacios topológicos se dicen **homeomorfos** si existe $f : X \to Y$ un homeomorfismo. En tal caso denotamos $X \simeq Y$.

3.1.2. Conexidad

Definición: Un espacio topológico (X, τ) se dice **conexo** si no es unión de dos abiertos disjuntos no vacíos. Esto es, si $X = U \cup V$ con $U, V \in \tau$ y $U \cap V = \emptyset$ entonces $U = \emptyset$ ó $V = \emptyset$.

Definición: Si (X, τ) es un espacio topológico e $Y \subset X$ es un subconjunto, entonces decimos que Y es conexo si lo es como subespacio topológico, es decir, con la topología inducida. Esto significa que si $Y = (U \cap Y) \cup (V \cap Y)$ con U, V abiertos en X y tales que $U \cap V \cap Y = \emptyset$ entonces $U \cap Y = \emptyset$ ó $V \cap Y = \emptyset$.

Lema: *Sea (X, τ) un espacio topológico. Son equivalentes:*

1. *X es conexo.*

2. *Los únicos subconjuntos de X abiertos y cerrados son X y $\emptyset$.*

3. *No existe una función $f : X \to (\{0,1\}, \tau_{disc})$ continua y sobreyectiva.*

<u>Dem</u>:

1) $\Rightarrow$ 2) : Sea $A \subset X$ abierto y cerrado. Podemos escribir $X = A \cup A^c$ y como $A \cap A^c = \emptyset$ la conexidad de X implica que $A = \emptyset$ ó $A^c = \emptyset$.

2) $\Rightarrow$ 3) : Sea $f : X \to \{0,1\}$ continua y sobreyectiva. Como $\{0,1\}$ tiene la topología discreta, $A = f^{-1}(\{0\})$ es abierto y cerrado y a su vez vale que $f^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset, X \Rightarrow$ absurdo.

3) $\Rightarrow$ 1) : Supongamos que $X = A \cup B$ donde A, B son abiertos disjunto y no vacíos. Sea $f : X \to \{0,1\}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in B \end{cases}$$

f es continua pues $f^{-1}(\{0\}) = B$ y $f^{-1}(\{1\}) = A$ que son abiertos por hipótesis, y f es sobre pues $A, B \neq \emptyset$, también por hipótesis. Por lo tanto, hemos probado que si X no es conexo entonces existe f continua y sobreyectiva. Luego, por el contrarrecíproco, hemos probado 3) $\Rightarrow$ 1).

■

Teorema (Bolzano): *Sean (X, τ), (Y, τ') espacios topológicos, donde X es conexo. Sea $f : X \to Y$ una función continua. Entonces $f(X)$ es conexo.*

<u>Dem</u>: Supongamos que $f(X)$ no es conexo. Por lo tanto, existen A y B abiertos disjuntos en $f(X)$, no vacíos y tales que $f(X) = A \cup B$. Como $f(X)$ tiene la topología relativa de Y, se tiene que $A = f(X) \cap U$ y $B = f(X) \cap V$ donde U y V son abiertos en Y. Pero entonces $f^{-1}(A) = f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(B) = f^{-1}(V)$ y como f es continua, son abiertos disjuntos en X, no vacíos y cumplen que $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Pero esto es absurdo pues contradice el hecho de que X sea conexo. Luego, $f(X)$ es conexo.

■

3.1.3. Arco-conexidad

Definición: Denotamos $I = [0,1]$. Sea (X,τ) un espacio topológico y sean $x, y \in X$. Un **arco** de x a y es una función continua $\alpha : I \to X$ tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$. Así, X se dice **arco-conexo** si para todo $x, y \in X$ existe un arco de x a y.

Teorema: *Si (X,τ) e (Y,τ') son dos espacios topológicos, X es arco-conexo y $f : X \to Y$ es una función continua; entonces $f(X)$ es arco-conexo.*

Dem: Sean $f(x), f(y) \in f(X)$. Sea $\alpha : [0,1] \to X$ continua tal que $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = y$. Entonces definimos $\gamma = f \circ \alpha : [0,1] \to Y$, que es continua. Luego, $\gamma(0) = f(x), \gamma(1) = f(y)$.

■

Teorema: *Si (X,τ) es arco-conexo, entonces también es conexo.*

3.1.4. Compacidad

Definición: Si (X,τ) es un espacio topológico, un **cubrimiento por abiertos** de X es una familia $\mathcal{C} = \{U_i\}_{i\in I}$ tal que cada conjunto U_i es abierto (*i.e.* está en τ) y $X = \bigcup_{i\in I} U_i$. Un **subcubrimiento** de $\mathcal{C}$ es un subconjunto de $\mathcal{C}$ que también cubre a X.

Definición: Un espacio topológico (X,τ) se dice **compacto** si todo cubrimiento por abiertos de X admite un subcubrimiento finito.

Definición: Una familia $\mathcal{A}$ se dice que tiene la **propiedad de intersección finita** si toda subfamilia finita tiene intersección no vacía.

Proposición: *X es compacto si y sólo si toda familia de cerrados con la propiedad de intersección finita tiene intersección no vacía.*

Dem:

$\Rightarrow$) Sea $\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$ familia de cerrados con la propiedad de intersección finita. Supongamos que $\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha = \emptyset$. Entonces, tomando complemento a ambos miembros, se tiene que: $\bigcup_{\alpha\in I} F_\alpha^c = X$. Como X es compacto, existe un subcubrimiento finito: $X = F_{\alpha_1}^c \cup \cdots \cup F_{\alpha_n}^c$ de donde, tomando complemento nuevamente, $\bigcap_{j=1}^n F_{\alpha_j} = \emptyset \Rightarrow$ absurdo.

$\Leftarrow$) Sea $X = \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$ cubrimiento abierto. Llamamos $F_\alpha = U_\alpha^c$. Entonces tomando complemento en la primer igualdad se tiene que $\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha = \emptyset$. Por hipótesis (usando el contrarrecíproco), si $\{F_\alpha\}$ no tiene la propiedad de intersección finita entonces existen $F_{\alpha_1}, \cdots, F_{\alpha_n}$ tales que $\cap_{i=1}^n F_{\alpha_i} = \emptyset$. Luego $\cup_{i=1}^n U_{\alpha_i} = X$

y así $\{U_\alpha\}$ tiene subcubrimiento finito.

■

Proposición: *Si X es compacto y $F \subset X$ es cerrado, entonces F es compacto.*

Dem: Sea $F \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ cubrimiento por abiertos. Notar F^c abierto y entonces $\{F^c\} \cup \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es cubrimiento por abiertos de X. Entonces existe un subcubrimiento finito de X con lo cual F tiene un subcubrimiento finito.

■

3.1.5. Axiomas de separación

Definición: Un espacio topológico (X, τ) se dice T_0 si cumple que dados $x, y \in X$, $x \neq y$, vale al menos una de las siguientes dos propiedades:

1. Existe $U \subset X$ abierto tal que $x \in U$ e $y \notin U$.

2. Existe $V \subset X$ abierto tal que $y \in V$ y $x \notin V$.

Definición: Un espacio topológico (X, τ) se dice T_1 si para todo $x, y \in X$, $x \neq y$, existen $U, V \subset X$ abiertos tales que $x \in U$, $y \in V$ y además $x \notin V$, $y \notin X$.

Teorema: *(X, τ) es T_1 si y sólo si $\{x\}$ es cerrado para todo $x \in X$. Esto es, si todos los puntos son cerrados.*

Definición: Un espacio topológico (X, τ) se dice T_2 ó **Hausdorff** si cumple que para todo $x, y \in X$, $x \neq y$, existen $U, V \subset X$ abiertos disjuntos tales que $x \in U$ e $y \in V$.

Lema: *Si (X, τ) es un espacio topológico entonces $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$.*

Definición: Un espacio topológico (X, τ) se dice:

- **Regular** si para todo $x \in X$ y $F \subset X$ cerrado tal que $x \notin F$, existen $U, V \subset X$ abiertos disjuntos tales que $x \in U$, $F \subset V$.

- **Normal** si para todo $F_1, F_2 \subset X$ cerrados disjuntos, existen $U, V \subset X$ abiertos disjuntos tales que $F_1 \subset U$, $F_2 \subset V$.

Observación: X compacto y $T_2 \Rightarrow X$ normal.

Teorema: *Si* (X, τ) *es un espacio Hausdorff y* $K \subset X$ *es compacto, entonces* K *es cerrado.*

Dem: Veamos que K^c es abierto. Sea $y_0 \in K^c, x \in K$. Entonces, como X es T_2, existen U_x, V_x abiertos disjuntos tales que $x \in U_x, y_0 \in V_x$. Luego, $K \subseteq \bigcup_{x \in K} U_x$ cubrimiento abierto de K compacto y entonces $K \subseteq U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n} := U$. Sea $V = \bigcap_{j=1}^{n} V_{x_j}$ abierto en X. Entonces $U \cap V = \emptyset$ con lo cual $V \subseteq U^c$. Luego, $y_0 \in V \subseteq U^c \subseteq K^c$ y entonces K^c es abierto.

■

Teorema*: Sean* (X, τ) *e* (Y, τ') *dos espacios topológicos,* $f : X \to Y$ *una función continua y* $K \subset X$ *compacto. Entonces* $f(K)$ *es compacto en* Y*.*

Corolario: *Si* (X, τ) *e* (Y, τ') *son espacios topológicos tales que* X *es compacto e* Y *es Hausdorff, entonces toda función* $f : X \to Y$ *continua es cerrada. En particular, si además* f *es biyectiva, entonces* f *es un homeomorfismo.*

3.2. Topología Algebraica

La Topología Algebraica es una rama de la matemática en la que se usan las herramientas del álgebra abstracta para estudiar los espacios topológicos. El objetivo básico es encontrar invariantes algebraicos que clasifiquen los espacios topológicos salvo homeomorfismos.

3.2.1. Homotopía y tipo de homotopía

Dado X espacio topológico, tomemos una familia de funciones continuas $f_t : X \to X$ parametrizadas por $t \in I = [0,1]$ donde $f_t(x)$ es el punto a donde se movió x en el tiempo t.

Definición:

1. Un **retracto por deformación (fuerte)** de X en $A \subset X$ es una familia de mapeos $f_t : X \to X$ tal que $f_0 = id$, $f_1(X) = A$ y $f_t\big|_A = id_A$ $\forall t$. La familia f_t es continua en el sentido que la función

$$X \times I \to X$$
$$(x,t) \mapsto f_t(x)$$

es continua.

2. Una **retracción de X en $A \subset X$** es un mapeo $r : X \to X$ continuo tal que $r(X) = A$ y $r\big|_A = id_A$.

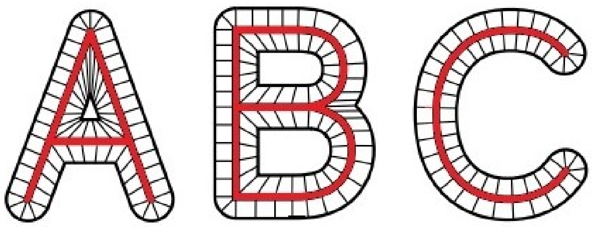


Figura 7: Ejemplo: Las letras rojas son retracto por deformación de las letras grandes.

Teorema: *Si X se retrae por deformación a $A \subset X$ y A es arco-conexo $\Rightarrow$ X es arco-conexo.*

Definición: Dos funciones continuas $f_0, f_1 : X \to Y$ son **homotópicas** si existe $F : X \times I \to Y$ tal que $F((x,0)) = f_0(x)$ y $F((x,1)) = f_1(x)$. Denotamos $f_0 \sim f_1$ y llamamos a F **función de homotopía** (entre f_0 y f_1).

Observación: Ser retracto por deformación es un caso particular de homotopía (entre id_X y una retracción de X en A).

Definición: Decimos que dos espacios topológicos X e Y tienen el mismo **tipo de homotopía** (o que son **homotópicos**) si existen funciones $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ tales que $g \circ f \sim id_X$ y $f \circ g \sim id_Y$. En tal caso se dice que f (y por lo tanto también g) es una **equivalencia homotópica**.

Observación: La relación "$\sim$" (ser homotópica) entre funciones de X a Y es una relación de equivalencia.

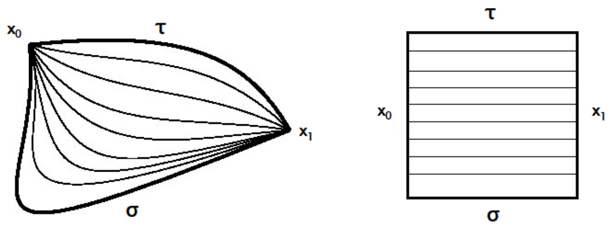
Definición: Si $f, g : X \to Y, A \subset X$ entonces decimos que $f \sim g\ rel(A)$ si existe F función de homotopía entre f y g y además $F(a,t)$ es constante para todo t y para todo $a \in A$.

Definición: X se dice **contráctil** si tiene el mismo tipo de homotopía que un punto. Equivalentemente, si toda función constante $c : X \to X$ es homotópica a id_X.

3.2.2. Grupo fundamental

Definición: Un **camino** en X es una función continua $\sigma : I \to X$. Dos caminos σ, τ en X de x_0 a x_1 se dicen **homotópicos con extremos fijos** si son homotópicos relativos al $\{0,1\}$, *i.e.* existe $F : I \times I \to X$ tal que:

$$F((s,0)) = \sigma(s) \qquad F((s,1)) = \tau(s) \qquad F((0,t)) = x_0\ \forall t \qquad F((1,t)) = x_1\ \forall t$$



Si $x_0 = x_1 = \sigma(0) = \sigma(1)$, el camino se llama un **lazo**. Definimos la operación entre lazos dada por la **yuxtaposición**, esto es:

$$\sigma\tau = \begin{cases} \sigma(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ \tau(2s-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Además, como vale que si $\sigma \sim \sigma'\ rel\{0,1\}$ y $\tau \sim \tau'\ rel\{0,1\}$ entonces $\sigma\tau \sim \sigma'\tau'\ rel\{0,1\}$; podemos definir la yuxtaposición en la clase de homotopía de lazos con extremos fijos: $[\sigma][\tau] = [\sigma\tau]$. Se define además $\sigma^{-1} = \sigma(1-s)$.

Luego, el conjunto de todas las clases de homotopía $[\sigma]$ de lazos $\sigma : I \to X$ tal que $\sigma(0) = \sigma(1) = x_0 \in X$ se denota $\pi_1(X, x_0)$ y es el **grupo fundamental de X con punto base x_0**.

Teorema: *$\pi_1(X, x_0)$ es un grupo con la yuxtaposición, donde el elemento neutro es $[x_0]$ y $[\sigma]^{-1} = [\sigma^{-1}]$.*

Consideremos ahora α un camino de x_0 a x_1. Queremos definir una función de $\pi_1(X, x_0)$ en $\pi_1(X, x_1)$ tal que a cada σ le asigne $\alpha^{-1}\sigma\alpha$. Ahora bien, ya vimos que si $\sigma \sim \sigma'$ $rel\{0,1\}$ entonces $\alpha^{-1}\sigma \sim \alpha^{-1}\sigma'$ $rel\{0,1\}$ y por lo tanto $\alpha^{-1}\sigma\alpha \sim \alpha^{-1}\sigma'\alpha$ $rel\{0,1\}$. Luego, podemos definir:

$$\begin{aligned} \alpha_* : \pi_1(X, x_0) &\to \pi_1(X, x_1) \\ [\sigma] &\mapsto [\alpha^{-1}\sigma\alpha] \end{aligned}$$

Proposición: *Si α es un camino de x_0 a x_1, entonces α_* definida como recién es un isomorfismo de grupos.*

Dem: Veamos primero que es un homomorfismo: Sean σ, τ lazos en x_0.

$$\alpha_*([\sigma][\tau]) = \alpha_*([\sigma\tau]) = [\alpha^{-1}(\sigma\tau)\alpha] = [\alpha^{-1}\tau\alpha\alpha^{-1}\tau\alpha] = [\alpha^{-1}\sigma\alpha][\alpha^{-1}\tau\alpha] = \alpha_*([\sigma])\alpha_*([\tau])$$

Consideremos el camino α^{-1} de x_1 a x_0. Esto nos define un homomorfismo de $\pi_1(X, x_1)$ en $\pi_1(X, x_0)$ y se tiene que α_* y $(\alpha^{-1})_*$ son homomorfismos inversos uno del otro. En efecto:

$$((\alpha^{-1})_* \circ \alpha_*)([\sigma]) = (\alpha^{-1})_*([\alpha^{-1}\sigma\alpha]) = [(\alpha^{-1})^{-1}(\alpha^{-1}\sigma\alpha)\alpha^{-1}] = [\alpha\alpha^{-1}\sigma\alpha\alpha^{-1}] = [x_0\sigma x_0] = [\sigma]$$

Por lo tanto, $(\alpha^{-1})_* \circ \alpha_* = id_{\pi_1(X,x_0)}$.

■

Observación: Si X es arco-conexo, $\pi_1(X, x_0)$ es independiente del punto base x_0 y podemos denotarlo $\pi_1(X)$. Esto es así puesto que si X es arco-conexo y elegimos x_0' otro punto base, existe un camino que va de x_0 en x_0' y por la proposición anterior tenemos un isomorfismo de grupos fundamentales.

Proposición: *El isomorfismo α_* es independiente de α si y sólo si $\pi_1(X, x_0)$ es abeliano.*

Dem:

$\Rightarrow$) Tomemos $[\sigma][\tau]$ en $\pi_1(X, x_0)$. Ahora,

$$\alpha_*([\sigma]) = (\tau\alpha)_*([\sigma]) = [(\tau\alpha)^{-1}\sigma(\tau\alpha)] = [\alpha^{-1}\tau^{-1}\sigma\tau\alpha] = \alpha_*([\tau^{-1}\sigma\tau]) = \alpha_*([\tau^{-1}][\sigma][\tau])$$

Y como α_* es inyectiva entonces $[\sigma] = [\tau]^{-1}[\sigma][\tau] \Rightarrow [\tau][\sigma] = [\sigma][\tau]$. Luego, $\pi_1(X, x_0)$ es abeliano.

$\Leftarrow$) Sea β otro camino de x_0 a x_1. Queremos ver que $\alpha_*([\sigma]) = \beta_*([\sigma])$. Ahora, $\alpha\beta^{-1}$ es un lazo en x_0. Por hipótesis,

$$[\sigma][\alpha\beta^{-1}] = [\alpha\beta^{-1}][\sigma] \Rightarrow \sigma(\alpha\beta^{-1}) \sim (\alpha\beta^{-1})\sigma \ rel\{0,1\}$$

y por lo tanto

$$\alpha^{-1}\sigma\alpha\beta^{-1} \sim \alpha^{-1}\alpha\beta^{-1}\sigma \Rightarrow \alpha^{-1}\sigma\beta^{-1}\beta \sim \alpha^{-1}\alpha\beta^{-1}\sigma\beta$$

O sea que $\alpha^{-1}\sigma\alpha \sim \beta^{-1}\sigma\beta$, *i.e.* $\alpha_*([\sigma]) = \beta_*([\sigma])$.

■

Ahora nos preguntamos qué pasa con los π_1's cuando tenemos una $f : X \to Y$, $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$. Lo que podemos hacer es asociar a σ (donde σ es el lazo en X basado en x_0) el lazo $f \circ \sigma$ en Y, basado en y_0. Nuevamente, si $\sigma \sim \sigma'$ $rel\{0,1\}$ entonces $f \circ \sigma \sim f \circ \sigma'$ $\{0,1\}$ y por lo tanto podemos definir:

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$
$$[\sigma] \mapsto [f \circ \sigma]$$

Notar que f_* es un homomorfismo de grupos. En efecto, sean σ y τ dos lazos en x_0. Luego:

$$f_*([\sigma][\tau]) = f_*([\sigma\tau]) = [f \circ (\sigma\tau)] = [(f \circ \sigma)(f \circ \tau)] = [f \circ \sigma][f \circ \tau] = f_*([\sigma])f_*([\tau])$$

Más aún, si $f = id_X$ entonces $f_* = id_{\pi_1(X,x_0)}$.

Por otro lado, si tenemos $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ y $g : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$, entonces:

$$(g \circ f)_*([\sigma]) = [(g \circ f) \circ (\sigma)] = g_*([f \circ \sigma]) = [g \circ (f \circ \sigma)] = g_*(f_*([\sigma])).$$

Por lo tanto, $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

Luego, podemos concluir que si f es un homeomorfismo entonces f_* es un isomorfismo pues como f es un homeo, entonces existe $f^{-1} : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ tal que $f \circ f^{-1} = id_{(Y,y_0)}$ y por lo tanto $f_* \circ (f^{-1})_* = (f \circ f^{-1})_* = id_{\pi_1(Y,y_0)}$. Análogamente se ve que $(f^{-1})_* \circ f_* = id_{\pi_1(X,x_0)}$ y por lo tanto f_* es un isomorfismo de $\pi_1(X, x_0)$ en $\pi_1(Y, y_0)$.

Se sigue que **el grupo fundamental es un invariante topológico**.

<u>Definición:</u> Un espacio topológico se dice **simplemente conexo** si es arco-conexo y su grupo fundamental es trivial. Equivalentemente, podemos decir que X es simplemente conexo si es arco-conexo y cualquier lazo en él se trivializa, esto es, todo lazo puede contraerse continuamente a un punto.

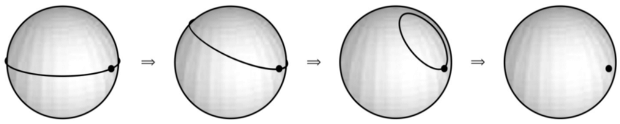


Figura 8: La S^2 es simplemente conexa: cualquier lazo puede ser llevado continuamente a un punto.

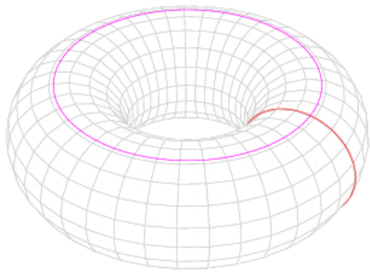


Figura 9: El toro no es simplemente conexo: ninguno de los dos lazos de la figura puede contraerse a un punto sin salirse de la superficie.

Teorema: *Todo espacio contráctil es simplemente conexo.*

Teorema: *Si X tiene dos abiertos U y V simplemente conexos tales que $X = U \cup V$ y $U \cap V$ es arco-conexo entonces X es simplemente conexo.*

Proposición: *Sean $f, g : Y \to X$ homotópicas vía $F = f_t : Y \times I \to X, f_0 = f, f_1 = g$. Sea $\alpha(t) = f_t(y_0)$ camino de $x_0 = f(y_0)$ a $x_1 = g(y_0)$. Entonces $g_* = \alpha_* \circ f_*$.*

Corolario: *Toda equivalencia homotópica induce un isomorfismo a nivel de π_1's, i.e. si $f : X \to Y$ es una equivalencia homotópica entonces $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ es un isomorfismo.*

Consecuencia: El grupo fundamental es un invariante homotópico.

Teorema: *$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \approx \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ vía:*

- $\pi([\gamma]) = [p_1(\gamma), p_2(\gamma)]$
- $\phi([\sigma], [\tau]) = [(\sigma, \tau)]$

Consecuencia: Si X e Y son simplemente conexos entonces $X \times Y$ es simplemente conexo.

Observación: Si X es simplemente conexo, entonces todo retracto de X también lo es.

3.2.3. Algunos ejemplos

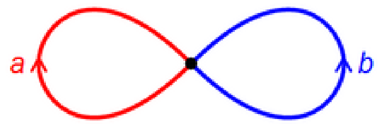
Poder calcular el grupo fundamental de un espacio topológico X requeriría de un curso completo de Topología Algebraica, con lo cual no calcularemos explícitamente grupos fundamentales, pero sí me gustaría nombrar algunos ejemplos de espacios conocidos. Para más detalles, se puede consultar [5].

- $\mathbb{R}^n$ o cualquier subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ son simplemente conexos.

- El grupo fundamental de S^1 es isomorfo a $\mathbb{Z}$ y por lo tanto, si pensamos al toro $T^2 \approx S^1 \times S^1$ tenemos que su grupo fundamental es isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Esto se generaliza para T^n con $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, el grupo fundamental de la cinta de Möbius M es también isomorfo a $\mathbb{Z}$.

- S^n es simplemente conexo para $n \geq 2$.

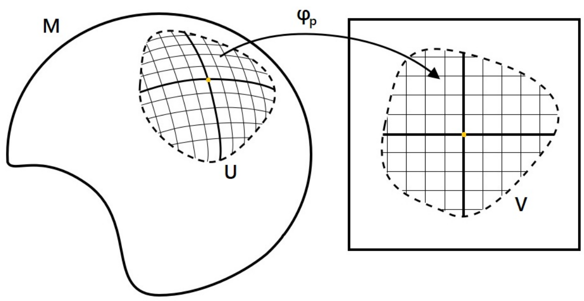
- El grupo fundamental del "ocho" es el grupo libre en dos letras.



3.3. Geometría

Dentro de este área nos centraremos en las variedades diferenciables, que son espacios topológicos con una estructura extra que da sentido a las nociones de curvas y funciones suaves. Localmente se pueden identificar con conjuntos abiertos de un espacio euclídeo, pero no necesariamente de forma global. Estas identificaciones locales permiten desarrollar una versión generalizada del análisis matemático en varias variables.

Definición: Sea M un espacio topológico T_2. M es **localmente euclídeo** de dimensión n si $\forall p \in M$ $\exists U_p \subset M$ abierto tal que $p \in U_p$ y $\phi_p : U_p \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto es un homeomorfismo. En palabras, si para todo punto en M existe un entorno abierto de p que es homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$.

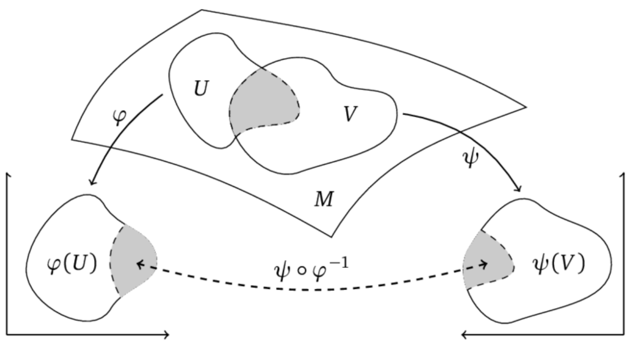


Si $\phi : U \to V = \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo entonces el par (U, ϕ) se llama un **sistema de coordenadas** ó una **carta**.

Observaciones:

1. Siempre se puede elegir ϕ tal que $\phi(p) = 0$. Tal entorno se llama un **entorno centrado en** p.

2. Supongamos que (U, ϕ) y (V, ψ) son dos entornos coordenados tales que $U \cap V \neq \emptyset$. Luego, $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ es un homeomorfismo entre abiertos de $\mathbb{R}^n$.



3. Un espacio localmente euclídeo que es también N_2 se dice una **variedad topológica**.

Definición: Sea M un espacio topológico localmente euclídeo. Una **estructura diferenciable** $\mathcal{F}$ de clase

C^k, $1 \leq k \leq \infty$, en M es una colección de sistemas coordenados $\{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in I\}$ que satisfacen:

1. $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$.

2. $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ es de clase C^k $\forall \alpha, \beta \in I$.

3. La colección $\mathcal{F}$ es maximal respecto de 2.: Si (U, ϕ) es un sistema coordenado tal que $\phi_\alpha \circ \phi^{-1}$ y $\phi \circ \phi_\alpha^{-1}$ son C^k $\forall \alpha \in I$ entonces $(U, \phi) \in \mathcal{F}$.

Observaciones:

- A una colección $\mathcal{F}$ que satisface 1. y 2. se la llama un **atlas**. Así, una estructura diferenciable es un atlas maximal.

- Cualquier atlas puede completarse a un atlas maximal de manera única, *i.e.* todo atlas está contenido en exactamente un atlas maximal. Así, para definir una estructura diferenciable no necesitamos especificar un atlas maximal, sino simplemente un atlas.

Definición: Una **variedad diferenciable de dimensión n y clase C^k** es un par $(M, \mathcal{F})$ donde M es un espacio localmente euclídeo de dimensión n y N_2 y $\mathcal{F}$ es una estructura diferenciable en M de clase C^k.

Definición: Sea M una variedad diferenciable C^∞ de dimensión n.

1. Una función $f : M \to \mathbb{R}^k$ se dice C^∞ ó **diferenciable** si $\forall p \in M$ $\exists (U, \phi)$ entorno coordenado de p tal que $f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{R}^k$ es C^∞.

2. Una función $f : M \to N$ entre variedades C^∞ se dice C^∞ ó **diferenciable** si $\forall p \in M$ $\exists (U, \phi)$ entorno coordenado de p y (V, ψ) entorno coordenado de $f(p)$ tal que $f(U) \subset V$ y $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \psi(V)$ es C^∞.

Definición: $C^\infty := \{f : M \to \mathbb{R} \mid f \text{ es } C^\infty\}$. Además, para $f, g \in C^\infty(M)$, $p \in M$ y $c \in \mathbb{R}$ podemos definir:

- $(f + g)(p) = f(p) + g(p)$

- $(cf)(p) = cf(p)$

- $(fg)(p) = f(p)g(p)$

y $f + g,\ cf,\ fg \in C^\infty(M)$. Con estas operaciones, $C^\infty(M)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y, más aún, resulta un álgebra asociativa y conmutativa sobre $\mathbb{R}$.

Definición: Un **vector tangente a** M **en** p es una derivación del álgebra C^∞, esto es, una aplicación $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ tal que:

1. v es lineal: $v(cf + g) = cv(f) + v(g)\ \forall f, g \in C^\infty(M), c \in \mathbb{R}$.

2. v satisface la regla de Leibniz: $v(fg) = g(p)v(f) + f(p)v(g)$

Denotamos T_pM al conjunto de todos los vectores tangentes a M en p y lo llamamos **espacio tangente a** M **en** p, el cual resulta un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones:

- $(v + w)(f) = v(f) + v(g)$

- $(cv)(f) = cv(f)$

Definición: Sea $p \in M$. Entonces $C^\infty(p) := \{$funciones C^∞ a valores reales definidas en un entorno de $p\}$. Luego, si $(U, \phi = (x_1, \cdots, x_n))$ es un sistema coordenado en M y $p \in U$, se definen para $i = 1, \cdots, n$:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p : C^\infty(p) \to \mathbb{R}$$

dada por

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (f) = \left.\frac{\partial}{\partial r_i}\right|_{\phi(p)} (f \circ \phi^{-1})$$

Luego, $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p \in T_pM$ y, más aún, $\mathcal{B} = \left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_p \right\}$ es una base de T_pM.

3.3.1. Variedades riemannianas

A continuación, daremos sólo algunas definiciones que nos serán de utilidad para la próxima sección.

Definición: Dada M una variedad C^∞ y $p \in M$, una **métrica riemanniana** en M es una forma bilineal simétrica definida positiva $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$. Esta determina un producto interno en cada espacio tangente T_pM, que usualmente se denota

$$\langle X, Y\rangle := g_p(X, Y) \text{ para } X, Y \in T_pM$$

Así, una variedad junto con una métrica riemanniana dada se llama una **variedad riemanniana** y se prueba que toda variedad C^∞ admite una métrica Riemanniana.

Como en la geometría euclídea, si p es un punto de una variedad riemanniana (M, g), se define la **norma** de cualquier vector tangente $X \in T_pM$ como $|X| := \langle X, X\rangle^{1/2}$. Podemos definir también el **ángulo** entre dos vectores tangentes no nulos X, Y como el único $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$cos(\theta) = \frac{\langle X, Y\rangle}{|X||Y|}$$

Luego, dos vectores $X, Y \in T_pM$ se dicen **ortogonales** si $\langle X, Y\rangle = 0$.

Por otra parte, dado que la generalización de la curvatura a espacios de más de tres dimensiones se realiza principalmente a través del **tensor de curvatura de Riemann** y del **tensor de Ricci**, vamos a dar algunas definiciones básicas para entender estos objetos:

Definición: Sea V un $\mathbb{R}-$espacio vectorial de dimensión finita n. Se define el **espacio dual** de V por:

$$V^* = \{f : V \to \mathbb{R} \mid f \text{ es lineal}\}$$

Considerando la suma y multiplicación por escalares usuales, resulta que V^* tiene estructura de espacio vectorial. Luego, si $\{v_1, \cdots, v_n\}$ es una base de V, podemos definir $v^1, \cdots, v^n \in V^*$ de la siguiente forma:

$$v^i(v_j) = \delta_{ij}$$

donde $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y 0 en caso contrario. Así, obtenemos que $\{v^1, \cdots, v^n\}$ es una base de V^*, llamada la **base dual** de V. Además, resulta que $dim(V^*) = dim(V)$ y la identificación $v_i \leftrightarrow v^i$ nos da un isomorfismo entre V y V^*, aunque este depende de la elección de la base $\{v_i\}$.

Definición: Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n y sea V^* su espacio dual. Un **tensor** T **de tipo** (k, l) sobre V es un mapa multilineal

$$T : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{k} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{l} \to \mathbb{R}$$

Así, por ejemplo, un tensor de tipo $(0, 1)$ es un elemento de V^*, mientras que un tensor de tipo $(1, 0)$ es un elemento de V^{**}. Sin embargo, al identificar V con V^{**}, un tensor de tipo $(1, 0)$ no es más que un vector en V.

Luego, definiendo la suma y multiplicación por escalares usuales para las funciones, la colección $\mathcal{T}(k, l)$ de todos los tensores de tipo (k, l) tiene estructura de espacio vectorial, y tiene dimensión n^{k+l}.

Además, podemos definir dos operaciones entre tensores:

1. La **contracción** es un mapa

$$C : \mathcal{T}(k,l) \to \mathcal{T}(k-1,l-1)$$

definido como sigue: si T es un tensor de tipo (k,l) entonces

$$CT = \sum_{i=1}^{n} T(\cdots, v^i, \cdots; \cdots, v_i, \cdots)$$

Esto puede interpretarse como "trazar" un tensor, similar a cómo se toma la traza de una matriz (recordar que la traza de una matriz se define como la suma de sus elementos diagonales). En este contexto, estamos "trazando" el tensor a lo largo de las componentes especificadas. De hecho, la contracción de un tensor de tipo $(1,1)$, visto como un mapa lineal de V en V, es justamente la traza de la matriz asociada a la transformación lineal.

2. El **producto exterior**: dado un tensor T de tipo (k,l) y un tensor T' de tipo (k',l') podemos construir un nuevo tensor de tipo $(k+k', l+l')$ llamado el **producto tensorial de T y T'**. Este se denota por $T \otimes T'$ y se define de la siguiente manera: dados $v^1, \cdots, v^{k+k'}$ y $w_1, \cdots, w_{l+l'}$ definimos

$$(T \otimes T')(v^1, \cdots, v^{k+k'}; w_1, \cdots, w_{l+l'}) = T(v^1, \cdots, v^k; w_1, \cdots, w_l)T'(v^{k+1}, \cdots, v^{k+k'}; w_{l+1}, \cdots, w_{l+l'})$$

Notación: Un tensor de tipo (k,l) se denotará por $T^{a_1,\cdots,a_k}_{b_1,\cdots,b_l}$.

3.3.1.1. El tensor de Riemann

Como dijimos al comienzo, este tensor supone una generalización del concepto de curvatura de Gauss a variedades de dimensiones arbitrarias y representa una medida de la separación de la métrica de la variedad respecto de la métrica euclídea. Fue introducido en 1862 por Bernhard Riemann y desarrollado en 1869 por Elwin Christoffel como una forma de describir completamente la curvatura en cualquier número de dimensiones mediante un tensor de tipo (1,3), representado generalmente por el símbolo R^i_{jkl}. Luego, el valor de cualquier otra entidad que describa la curvatura de una variedad puede deducirse de este tensor, como es el caso del tensor de Ricci.

Intuitivamente, el tensor de Riemann mide cómo varía la dirección de un vector cuando es transportado paralelamente a lo largo de un pequeño paralelogramo en la variedad. Por ejemplo, si consideramos una esfera y un vector que transportamos paralelamente alrededor de un triángulo sobre la superficie de ella, el vector no regresará a su dirección original debido a la curvatura de esta.

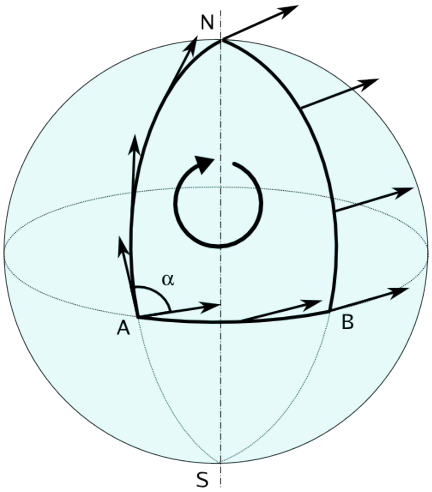


Figura 10: Significado geométrico del tensor de Riemann: si transportamos en paralelo un vector alrededor del circuito cerrado ANB, el vector se desplaza proporcionalmente al área delimitada por el circuito cerrado y a la curvatura de la esfera.

3.3.1.2 El tensor de Ricci

Este tensor fue introducido en 1903 por el matemático italiano Gregorio Ricci-Curbastro y es una contracción del tensor de Riemann, por lo tanto es un tensor de tipo (0,2) y se denota R_{ij}. Este proporciona una medida más accesible de la curvatura de una variedad, obteniéndose al tomar la traza del tensor de Riemann sobre el primero y el tercer índice.

El tensor de Ricci resume parte de la información contenida en el tensor de Riemann, enfocándose en cómo el volumen de una pequeña bola en la variedad difiere del volumen de una bola en el espacio euclídeo, y determina la "dispersión geodésica", es decir, si las geodésicas que comienzan en puntos cercanos permanecen paralelas, convergen ó divergen; donde, en una variedad Riemanniana (M, g), una geodésica es una curva que localmente minimiza la longitud de arco entre puntos. Intuitivamente, son las líneas "más rectas posibles" en un espacio curvado.

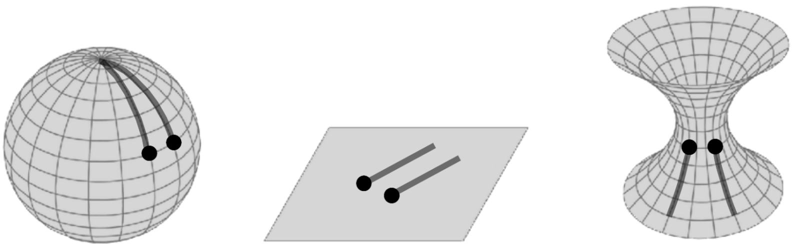


Figura 11: Dispersión de las geodésicas para curvatura constante positiva, cero y negativa respectivamente.

4. La conjetura y su demostración

4.1. Antecedentes

Recordemos entonces cuál era el enunciado de la conjetura:

Toda variedad compacta y simplemente conexa de dimensión 3 es homeomorfa a la 3-esfera.

En otras palabras, para todo espacio X localmente euclídeo y N_2 que admite una estructura diferenciable, arco-conexo, compacto y tal que cualquier lazo alrededor de un punto en él se trivializa, existe una función continua, biyectiva y con inversa continua $f : X \to S^3$.

Ahora bien, como dijimos al comienzo, aunque a lo largo del siglo XX pudieron demostrarse todos los casos para $n \geq 4$, todas las técnicas utilizadas eran inútiles para tratar el caso de dimensión tres. De hecho, la demostración de la conjetura vino por un camino completamente diferente a los anteriores: la geometría no euclídea.

La geometría de Euclides está construida sobre cinco axiomas, los cuales son:

1. Dos puntos distintos cualesquiera determinan un segmento de recta.

2. Un segmento de recta se puede extender indefinidamente en una línea recta.

3. Se puede trazar una circunferencia dados un centro y un radio cualesquiera.

4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.

5. Por un punto exterior a una recta se puede trazar una única paralela.

Sin embargo, a principios del siglo XIX; Gauss, Lobachevsky, János Bolyai y Riemann consideraron una geometría en donde no se tuviese en cuenta el quinto postulado de Euclides, descubriendo así lo que hoy conocemos como geometría hiperbólica y geometría elíptica. Ahora bien, la geometría euclídea, la hiperbólica y la elíptica son modelos de geometrías de curvatura constante cero, negativa y positiva respectivamente y son las tres geometrías posibles en el espacio de tres dimensiones. Más aún, cualquier superficie bidimensional se puede deformar, aunque sea por trozos, en una superficie que tenga uno de estos tres tipos de geometría. En base a estos resultados, el matemático William Thurston extendió esta clasificación a variedades de tres dimensiones y encontró que, en ese caso, hay ocho geometrías posibles: las tres habituales, algunas combinaciones de ellas y otras geometrías más extrañas en donde la geometría riemanniana provee un marco de trabajo adecuado para estudiarlas. Luego, Thurston quiso comprobar si cualquier variedad tridimensional era clasificable dentro de alguna de ellas, lo cual era una cuestión bastante complicada y, si bien no pudo resolver del todo el problema, en 1982 enunció lo que se llamaría la ***Conjetura de Geometrización***:

Siempre hay una manera sistemática de cortar una variedad tridimensional en piezas, cada una de ellas correspondiente a una de las ocho geometrías.

Más aún, Thurston demostró que la conjetura de Poincaré era una consecuencia directa de su conjetura pues esta implicaba que:

Una variedad de dimensión 3 tiene grupo fundamental finito si y sólo si tiene una métrica de curvatura constante positiva. En particular, cualquier 3-variedad con grupo fundamental trivial es homeomorfa a la S^3.

Así, si su conjetura era cierta, también lo era la de Poincaré.

Por su parte, el matemático americano Richard Hamilton, introdujo una nueva técnica en el área de la geometría riemanniana utilizando el tensor de Ricci, que como vimos antes se utiliza para resumir información sobre la curvatura de una variedad riemanniana. Hamilton descubrió que una superficie que obedece a las ecuaciones para el *flujo de Ricci* tenderá de forma natural a simplificar su propia geometría redistribuyendo la curvatura de forma más equitativa. Hamilton demostró que la conjetura de Poincaré para el caso bidimensional puede demostrarse usando el flujo de Ricci pues lo que sucede es que una superficie simplemente conexa se simplifica tanto al seguir el flujo que termina como una esfera perfecta.

Para entender mejor esto, podemos mirar primero un antecesor más sencillo del flujo de Ricci: el **flujo de acortamiento de curvas**. Este se define mediante la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t}\gamma(s,t) = k(s,t)N(s,t)$$

donde $\gamma_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ es una familia de curvas tal que $\gamma_t := \gamma(s,t)$ y $k(s,t), N(s,t)$ denotan, respectivamente, la curvatura y la normal de la curva γ_t en el punto $\gamma_t(s)$. Así, esta ecuación describe la evolución de la familia de curvas γ_t de acuerdo a su curvatura.

De acuerdo a su intervalo máximo de existencia, las soluciones al flujo de acortamiento son llamadas:

1. **Inmortal** si $t \in (T, \infty)$.

2. **Antigua** si $t \in (-\infty, T)$.

3. **Eterna** si $t \in (-\infty, \infty)$

Donde el tiempo máximo de existencia T se llama **singularidad** y se produce cuando γ_t deja de ser diferenciable.

Así, podemos decir que el flujo de acortamiento puede ser visto como un proceso de uniformización que moldea las curvas con el objetivo de volverlas más y más suaves.

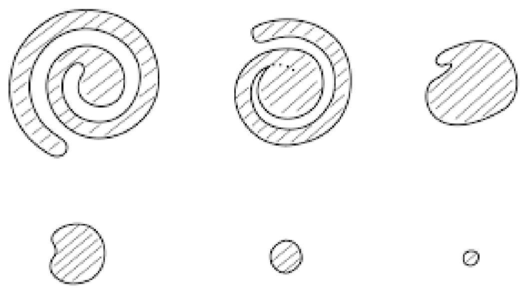


Figura 12: Ejemplo del flujo de acortamiento para una curva simple cerrada.

Entonces, lo que planteó Hamilton es que podría hacerse el proceso análogo a lo que se hace en dos dimensiones y así aplicarle este tipo de flujo a una superficie cualquiera.

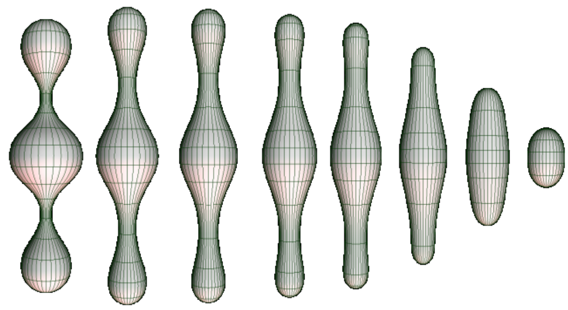


Figura 13: Ejemplo del flujo de acortamiento para una superficie arbitraria.

Así, el flujo de Ricci es, en cierta forma, una generalización de estas ideas a espacios de dimensión mayor que dos. Más formalmente, dada una variedad riemanniana M, el flujo de Ricci es una familia de métricas riemannianas $\{g_{ij}(t)\}$ que satisfacen la ecuación diferencial

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2R_{ij}$$

donde R_{ij} es el tensor de Ricci. La ecuación del flujo de Ricci es una especie de generalización de la ecuación del calor $\frac{\partial \phi}{\partial t} = \Delta\phi$ puesto que este actúa para reducir las regiones de alta curvatura y expandir las regiones de baja curvatura, intentando llevar la variedad hacia una geometría más uniforme. Esto es similar a cómo el calor se distribuye en un cuerpo sólido, eliminando gradualmente las variaciones extremas de temperatura. En cierto punto, el flujo de Ricci se comporta de manera similar, por lo que la curvatura intenta volverse más uniforme.

A pesar de que Hamilton definió la forma de proceder, pronto encontró dificultades pues el flujo podía desarrollar singularidades, esto es, puntos donde la variedad colapsaba en un punto o el flujo divergía. Aún así, pudo probar el siguiente teorema:

Si comenzamos con una variedad de dimensión 3, compacta y tal que su tensor de Ricci es siempre definido positivo, entonces a medida que esta se contrae hasta un punto bajo el flujo de Ricci, se vuelve cada vez más redonda. Si reescalamos la métrica para que el volumen sea constante, entonces converge hacia una variedad de curvatura constante positiva.

Y aunque intentó aplicar esta técnica a 3-variedades más generales analizando las singularidades que podían llegar a surgir, sólo pudo probar la conjetura de geometrización bajo hipótesis complementarias muy fuertes.

Figura 14: William Paul Thurston, 1946-2012.

Figura 15: Richard Streit Hamilton, 1943 - actualidad.

Y fue entonces cuando Grigori Perelman irrumpió en la escena.

4.2. Grigori Perelman

Grigori Yakovlevich Perelman nació el 13 de junio de 1966 en Leningrado (actual San Petesburgo), Unión Soviética, en el seno de una familia judía. Su madre, Lyubov Yakovlevna, era profesora de matemáticas en la Universidad Estatal de Leningrado, y su padre, Yakov Israilovich Perelman, era un ingeniero y profesor de mecánica. Desde una edad temprana, Perelman mostró un extraordinario talento para las matemáticas, que fue alentado por su madre, quien le proporcionó libros y materiales para nutrir su curiosidad y habilidades.

Perelman asistió a la Escuela de Física y Matemáticas de la Universidad Estatal de Leningrado, donde destacó de inmediato. Participó en la Olimpiada Internacional de Matemática de 1982 en Budapest, donde obtuvo una medalla de oro con puntuación perfecta y, posteriormente, ingresó en la Facultad de Matemáticas y Mecánica de la Universidad Estatal de San Petersburgo, donde se graduó con honores. Continuó su educación obteniendo un doctorado en matemáticas en 1990 bajo la supervisión de Yuri Burago y Yevgeny Dynkin y mostrándose como uno de los principales expertos en geometría de Aleksandrov, después de resolver, entre 1990 y 1991, algunos problemas difíciles de esta área.

Como experto, fue invitado a Estados Unidos, donde trabajó durante varios años y obtuvo la reputación de "fenómeno increíblemente brillante" en geometría riemanniana, siendo en 1994 el logro más famoso de Perelman durante su trabajo en Estados Unidos, con la demostración de la *Soul Conjecture* formulada en 1972 por los matemáticos Jeff Cheeger y Detlef Gromoll[4].

Un año más tarde, Perelman comenzó a trabajar en el prestigioso Instituto de Matemáticas Steklov de San Petersburgo, donde desarrolló su investigación en geometría riemanniana y topología, y en donde estudió el proyecto de Hamilton sobre el flujo de Ricci. Perelman descubrió que la teoría de espacios de Aleksandrov podría ser útil en el análisis de las singularidades del flujo de Ricci y envió, en 1996, una carta a Hamilton describiéndole sus ideas y proponiéndole trabajar en conjunto. Sin embargo, Perelman no obtuvo respuesta, con lo cual decidió comenzar a trabajar por su cuenta, dando inicio a un período de reclusión académica, la cual se extendería por casi siete años, con el objetivo de concentrarse en la Conjetura de Poincaré.

Así, en noviembre del 2002, Perelman causó sensación al colgar en arXiv varios artículos que prácticamente eran la demostración de un problema que llevaba planteado desde hacía más de un siglo.

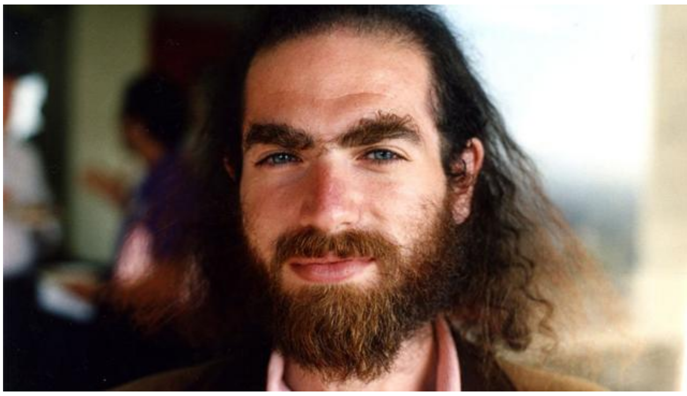


Figura 16: Grigori Perelman, 1966- actualidad.

4.3. La demostración de Perelman

La idea que utilizó Perelman para la prueba era básicamente la sugerida por Hamilton: comenzar con una variedad tridimensional arbitraria, equiparla con una noción de distancia para que tenga sentido hablar del flujo de Ricci y dejar que la variedad siga el flujo y se simplifique. La principal complicación de esto, como ya vimos, es que pueden aparecer singularidades en donde la variedad deja de ser suave y en ellas el

[4]La *Conjetura del Alma* establecía que pueden deducirse ciertas propiedades de un objeto matemático a partir de sólo una pequeña región de él, a la cual se le llama "alma".

método propuesto deja de ser válido. Entonces, la idea que tuvo Perelman consiste en cortarla cerca de una de las singularidades, tapar los agujeros que resulten de esta operación y dejar que el flujo continúe. Si la variedad consigue simplificarse por completo luego de la aparición de una cantidad finita de singularidades, cada pieza admitirá una de las ocho geometrías de Thurston y la inversión de las operaciones de corte, también llamadas "cirugías", dice cómo pegar de nuevo las piezas para reconstruir la variedad.

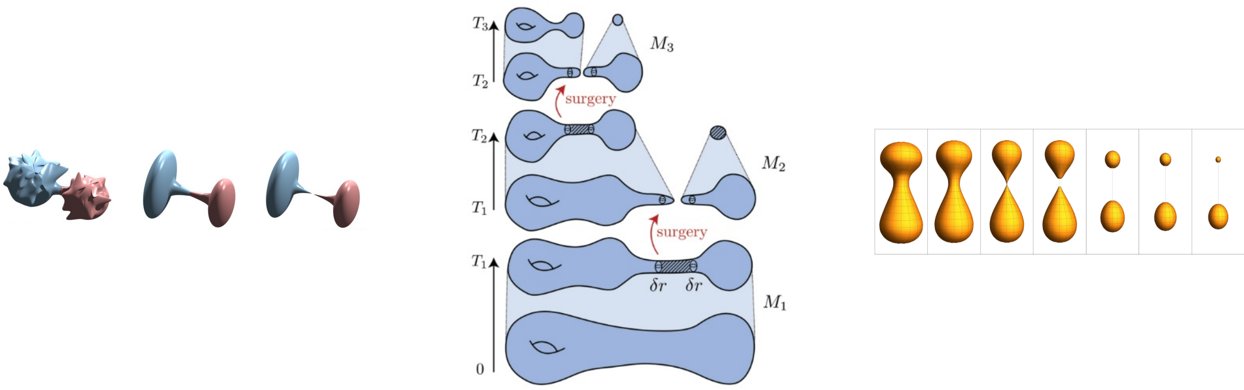


Figura 17: Esquematización del flujo de Ricci con cirugía.

El 11 de noviembre del 2002, Perelman publicó su trabajo, titulado *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, en el sitio web arXiv y no lo envió a ningún sitio más. El artículo inicial, firmado por Grisha Perelman, tiene 39 páginas y fue complementado por dos más en marzo y julio de 2003, en los que se aclaraban y extendían algunos conceptos. En estos tres artículos, Perelman presentó su teoría general para resolver las singularidades del flujo de Ricci y completar el programa de Hamilton, demostrando la Conjetura de Geometrización de Thurston y, por lo tanto, la Conjetura de Poincaré.

Este trabajo fue considerado revolucionario y le valió a Perelman el reconocimiento mundial en la comunidad matemática. Sin embargo, él no buscaba ninguna recompensa salvo la solución misma: *"Si la prueba es correcta, no se necesita ningún otro tipo de reconocimiento"*, aseguró. Acto seguido, Grigori rechazó todos los premios y distinciones, incluida la Medalla Fields, considerada el equivalente al Premio Nobel en matemáticas; y el premio del Instituto Clay. Las razones fueron varias: en primer lugar, Perelman consideraba que su contribución no era mayor que la de Hamilton y que este también era merecedor del premio. Por otra parte, se dice además que Perelman se sintió ofendido cuando algunos matemáticos pusieron en duda su demostración, asegurando que él sólo indicaba cómo podría probarse la conjetura. Más aún, se insinuó que dos matemáticos chinos ya habían propuesto la misma idea para la prueba antes que él.

Así, agobiado por la atención mediática y en completo desacuerdo con la comunidad matemática, fue cuando Perelman decidió romper con todo y con todos. Se retiró del escrutinio público y de la vida académica y se volvió cada vez más reclusivo. Dejó de conceder entrevistas, de responder a sus colegas y se mudó a vivir con su madre a un apartamento de dos habitaciones, del que al parecer sólo sale a comprar víveres y de vez en cuando asiste a la ópera y a conciertos de música clásica. Desde entonces, Perelman lleva una vida tranquila y alejada de las cámaras y periodistas y poco más se sabe hoy sobre su vida privada.

Actualmente, sus artículos están aún disponibles en la web, en el sitio en el que él mismo los publicó, aunque en realidad muy poca gente en el mundo puede entenderlos.

5. Epílogo

Y así, en un giro inesperado del destino, las piezas del rompecabezas encajaron a la perfección, las sombras se disiparon y la oscuridad se convirtió en luz. Con la mirada fija en el papel que contenía la demostración de Grigori Perelman, una sonrisa iluminó el rostro de Henri Poincaré quien, con un gesto de asentimiento, volvió a dejar aquellas páginas sobre su escritorio.

Aunque alegre, y con la satisfacción de saber que su contribución había dejado una marca imborrable en la historia de la ciencia, Poincaré lamentó que Perelman, quien había tenido una idea tan original y revolucionaria que tanto le agradaba, hubiese terminado alejado de las matemáticas. Aún así, también sintió una profunda gratitud al saber que, a pesar de todo, su enigma finalmente había sido resuelto y su pregunta por fin había tenido una respuesta.

Poincaré se sintió en paz y, con una última mirada de aprobación y una sonrisa serena, se retiró de su despacho mientras la luz de la pequeña lámpara sobre su escritorio se desvanecía.

Referencias

[1] Ian Stewart (2008), *Historia de las Matemáticas en los últimos 10.000 años*. Editorial Crítica.

[2] Alberto Tomás Pérez Izquierdo (2015), *Poincaré, las matemáticas pierden la forma*. RBA Contenidos Editoriales y Audiovisuales.

[3] Maria Teresa Lozano Imízcoz (2004), *La conjetura de Poincaré, un problema de topología*. Revista Arbor.

[4] Juan E. Nápoles Valdes (2002), *La fórmula de Euler y la Topología*. Universidad de la Cuenca del Plata, Argentina.

[5] Alicia García y Cristian Sánchez (1994), *Introducción a la topología algebraica*.

[6] James Munkres (2018), *Topology*. Pearsn.

[7] John M. Lee (2003), *Introduction to smooth manifolds*. Springer.

[8] John M. Lee (1997), *Riemannian Manifolds: An introduction to curvature*. Springer.

[9] Jorge Lauret (2011), *Evolución geométrica de curvas y métricas*. Actas del XI Congreso Dr. Antonio A. R. Monteiro.

[10] Jorge Lauret (2021), *Un enigma llamado Grigori Perelman*. Revista de Educación Matemática, volumen 36, Nº3.

[11] John Milnor (2003), *Towards the Poicaré Conjecture and the classification of 3-manifolds*. Notices of the American Mathematical Society, volumen 50, Nº10.

[12] Robert M. Wald (1984), *General relativity*. University of Chicago Press.