

# Una Introducción al Control Geométrico No lineal

Leonardo J. Colombo

Centro de Automática y Robótica (CSIC-UPM)



## UAVs multirrotor



Los UAVs multirrotor se han vuelto muy populares en los últimos años, gracias al gran número de aplicaciones en las que han demostrado ser útiles. Desde el transporte de suministros médicos a lugares remotos, la inspección de obras civiles o líneas eléctricas, la asistencia a bomberos y guardavidas, hasta aplicaciones agrícolas, entre muchas otras.

## Espacios geométricos en la modelización: $SO(3)$ y $S^2$

$$SO(3) = \{R \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : R^T R = I_{3 \times 3} \text{ y } \det(R) = 1\}.$$

- ▶ El **Grupo Ortogonal Especial (Lie)** con álgebra de Lie asociada  $\mathfrak{so}(3) := T_I SO(3) = \text{Skew}_3(\mathbb{R})$ .

- ▶ Podemos identificar  $\mathbb{R}^3$  con  $\mathfrak{so}(3)$  mediante el **isomorfismo “sombrero” (hat)**

$\hat{\cdot} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathfrak{so}(3)$ , definido por:

$$(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)^T = \Omega \mapsto \hat{\Omega} := \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix} \in \text{Skew}_3(\mathbb{R})$$

$$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}.$$

- ▶ La esfera unitaria (como una **variedad diferenciable**).

# Modelización de un Drone

- ▶ La **posición** del drone se describe mediante un punto  $x \in \mathbb{R}^3$ .
- ▶ La orientación de los rotores puede controlarse para producir tres modos independientes de movimiento rotacional: **alabeo (roll)**, **cabeceo (pitch)** y **guiñada (yaw)**.
- ▶ La **actitud** se describe mediante una matriz  $R \in SO(3)$ .

En conjunto, el **espacio de configuraciones** se describe mediante el **Grupo Euclídeo Especial**:

$$SE(3) \cong \underbrace{SO(3)}_{\text{actitud}} \times \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{posición}} .$$



# Ángulos de rotación: *roll*, *pitch* y *yaw*

## Descripción

La orientación (**actitud**) de un drone puede describirse mediante tres rotaciones sucesivas del cuerpo respecto al sistema inercial:

- ▶ **Alabeo (roll)**  $\phi$ : rotación alrededor del eje  $x$  del cuerpo. Controla la inclinación lateral (derecha–izquierda).
- ▶ **Cabeceo (pitch)**  $\theta$ : rotación alrededor del eje  $y$  del cuerpo. Controla la inclinación hacia adelante o atrás.
- ▶ **Guiñada (yaw)**  $\psi$ : rotación alrededor del eje  $z$  del cuerpo. Controla la orientación horizontal (rumbo o dirección).

# Ángulos de rotación: *roll*, *pitch* y *yaw*

## Descripción

La orientación (**actitud**) de un drone puede describirse mediante tres rotaciones sucesivas del cuerpo respecto al sistema inercial:

- ▶ **Alabeo (roll)**  $\phi$ : rotación alrededor del eje  $x$  del cuerpo. Controla la inclinación lateral (derecha–izquierda).
- ▶ **Cabeceo (pitch)**  $\theta$ : rotación alrededor del eje  $y$  del cuerpo. Controla la inclinación hacia adelante o atrás.
- ▶ **Guiñada (yaw)**  $\psi$ : rotación alrededor del eje  $z$  del cuerpo. Controla la orientación horizontal (rumbo o dirección).

## Composición de las rotaciones

La matriz de rotación total se obtiene como:

$$R = R_z(\psi) R_y(\theta) R_x(\phi),$$

donde cada  $R_i$  es una rotación elemental en torno al eje correspondiente.

*Estos tres ángulos determinan completamente la actitud del drone.*

## Dinámica de un quadrotor en $SE(3)$ (modelo estándar)

**Estados:** posición  $x \in \mathbb{R}^3$ , velocidad  $v \in \mathbb{R}^3$ , actitud  $R \in SO(3)$ , velocidad angular  $\Omega \in \mathbb{R}^3$ .

**Entradas:** empuje total  $f \in \mathbb{R}$  (a lo largo de  $b_3 := Re_3$ ) y torques  $\tau \in \mathbb{R}^3$ .

**Ecuaciones en  $SE(3)$ :**

$$\dot{x} = v, \quad m \dot{v} = mg e_3 - f Re_3,$$

$$\dot{R} = R \hat{\Omega}, \quad J \dot{\Omega} + \Omega \times (J\Omega) = \tau,$$

donde  $m > 0$ ,  $J = J^\top \succ 0$ ,  $g > 0$ ,  $e_3 = (0, 0, 1)^\top$ .

**Comentario:** El sistema es *bajo-actuado*: el empuje es escalar y siempre en la dirección  $b_3 = Re_3$ , mientras la actitud sí es totalmente actuada.

# Seguimiento de posición: construcción de la actitud deseada

## 1. Errores de posición y velocidad

$$e_x = x - x_d, \quad e_v = v - \dot{x}_d$$

(Miden qué tan lejos estamos del punto y de la trayectoria deseada.)

**2. Vector de empuje deseado (antes de normalizar):** El eje de empuje del multirrotor debe alinearse con la dirección de  $F_d$ .

$$F_d = -k_x e_x - k_v e_v + m g e_3 - m \ddot{x}_d$$

(Combina retroalimentación PD + feedforward de la trayectoria.)

**3. Dirección deseada del eje  $b_3$ :**  $b_{3c} = \frac{F_d}{\|F_d\|}$

El dron debe inclinarse para que su empuje apunte en la misma dirección que  $F_d$ .

**4. Yaw deseado  $\psi_d$  y vector horizontal asociado:**  $b_{1d} = [\cos \psi_d, \sin \psi_d, 0]^\top$ .

**5. Construcción de la actitud deseada**  $R_c = [b_{1c} \ b_{2c} \ b_{3c}]$

$$b_{2c} = \frac{b_{3c} \times b_{1d}}{\|b_{3c} \times b_{1d}\|}, \quad b_{1c} = b_{2c} \times b_{3c}$$

Así obtenemos una actitud  $R_c \in SO(3)$  compatible con la tarea de posición y el yaw deseado.

# Control geométrico en $SE(3)$ : PD + feedforward

## 1. Errores de actitud y velocidad angular

$$e_R = \frac{1}{2}(R_c^\top R - R^\top R_c)^\vee, \quad e_\Omega = \Omega - R^\top R_c \Omega_c$$

( $e_R$  mide la diferencia entre las bases;  $e_\Omega$  mide el giro relativo.)

## 2. Fuerza (empuje) de traslación

$$f = F_d \cdot (Re_3)$$

(Proyección de la fuerza deseada  $F_d$  sobre el eje de empuje real  $b_3 = Re_3$ .)

## 3. Torque de actitud

$$\tau = -K_R e_R - K_\Omega e_\Omega + \Omega \times (J\Omega) - J\left(\hat{\Omega} R^\top R_c \Omega_c - R^\top R_c \dot{\Omega}_c\right)$$

con  $K_R, K_\Omega \succ 0$ . (PD geométrico + compensación giroscópica + feedforward del movimiento de  $R_c$ .)

# Control geométrico en $SE(3)$ : interpretación física

## Lectura física del control

- ▶ El escalar de empuje  $f$  regula la **traslación**: determina cuánta fuerza real genera el dron.
- ▶ El torque  $\tau$  regula la **actitud**: inclina el vehículo para alinear su eje  $b_3$  con la dirección deseada.
- ▶ El término  $\Omega \times (J\Omega)$  compensa los **efectos giroscópicos** del cuerpo rígido.
- ▶ Los términos con  $R^\top R_c$ ,  $\Omega_c$  y  $\dot{\Omega}_c$  son **feedforward**: anticipan el movimiento deseado de la actitud.

## Separación geométrica de tareas

- ▶ **Control de posición**: fijado por el vector de fuerza deseada  $F_d$  y su proyección  $f = F_d \cdot (Re_3)$ .
- ▶ **Control de actitud**: determinado por la matriz deseada  $R_c$  y el torque  $\tau$ , que corrige  $e_R$  y  $e_\Omega$ .

# Análisis de Lyapunov: traslación + rotación

## Parte traslacional:

$$V_{\text{tr}} := \frac{1}{2} m \|e_v\|^2 + \frac{1}{2} k_x \|e_x\|^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{V}_{\text{tr}} = -k_v \|e_v\|^2 + \underbrace{(Re_3 - b_{3c}) \cdot (\cdots)}_{\text{acopl. actitud}}.$$

## Parte rotacional (función de configuración):

$$\Psi(R, R_c) := \frac{1}{2} \text{tr}(I - R_c^\top R) \in [0, 2], \quad V_{\text{rot}} := \frac{1}{2} e_\Omega^\top J e_\Omega + k_R \Psi(R, R_c).$$

$$\dot{V}_{\text{rot}} = -e_\Omega^\top K_\Omega e_\Omega \quad (\text{bajo la ley de torque dada}).$$

## Lyapunov total:

$$V := V_{\text{tr}} + V_{\text{rot}} \quad \Rightarrow \quad \dot{V} \leq -k_v \|e_v\|^2 - e_\Omega^\top K_\Omega e_\Omega,$$

y mediante invarianza de LaSalle y acotación estándar del acoplamiento, se obtiene **convergencia asintótica** de  $(e_x, e_v, e_R, e_\Omega)$  a cero en una región grande; por topología de  $SO(3)$ , la estabilización continua es *casi global*.

# De la estabilidad individual al transporte cooperativo

## Idea clave

El análisis de Lyapunov que vimos para un **dron individual** (errores geométricos + función compuesta traslación-rotación) es la base para estudiar sistemas más complejos.

## Nueva dificultad

En transporte cooperativo, cada dron:

- ▶ ya no controla solo su actitud y posición,
- ▶ sino que está **acoplado dinámicamente** a una carga compartida,
- ▶ a través de cuerdas elásticas o rígidas,
- ▶ y debe cooperar con otros vehículos para seguir una trayectoria.

*Pasamos de estabilizar un cuerpo rígido a estabilizar un sistema multicuerpo acoplado.*

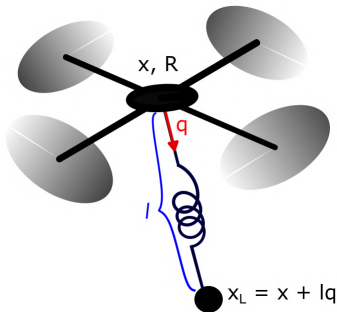


# Resumen de hoy

- ▶ **Problema:** Transportar un cuerpo rígido suspendido mediante cables elásticos desde cuadricópteros, con la condición de que el sistema siga una trayectoria deseada.
- ▶ **Procedimiento:** Crear un modelo, derivar las ecuaciones dinámicas desde principios variacionales, definir los errores de seguimiento, diseñar controladores geométricos y realizar un análisis de estabilidad con un candidato de Lyapunov.

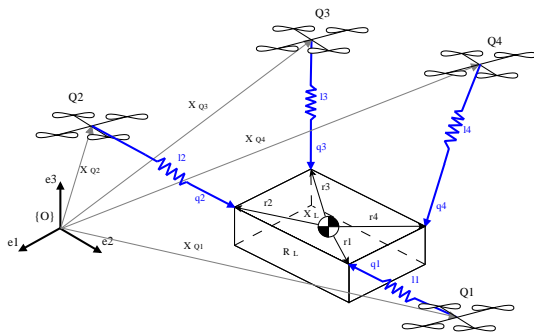
# Modelización de un cuadricóptero con carga puntual unida por un cable elástico

- ▶ Elegimos el espacio de configuración para el cable/carga como  $S^2 \times \mathbb{R}$ , con  $q \in S^2$  describiendo su dirección y  $l \in \mathbb{R}$  su longitud.
- ▶ El espacio de configuración completo se convierte en:  
$$\underbrace{SO(3) \times \mathbb{R}^3}_{\text{Cuadricóptero}} \times \underbrace{S^2 \times \mathbb{R}}_{\text{Carga}}.$$



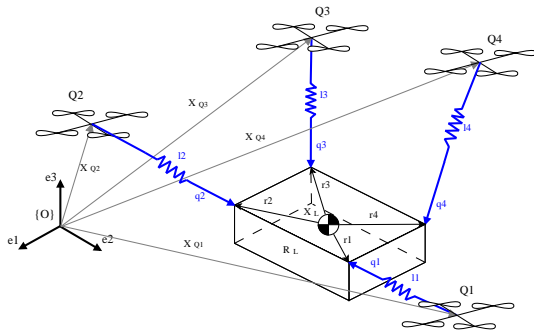
# Modelo con $N$ cuadricópteros y una carga rígida

Consideremos  $N \geq 3$  UAVs cuadricópteros transportando una carga rígida mediante cables elásticos.



# Modelo con $N$ cuadricópteros y una carga rígida

Consideremos  $N \geq 3$  UAVs cuadricópteros transportando una carga rígida mediante cables elásticos.

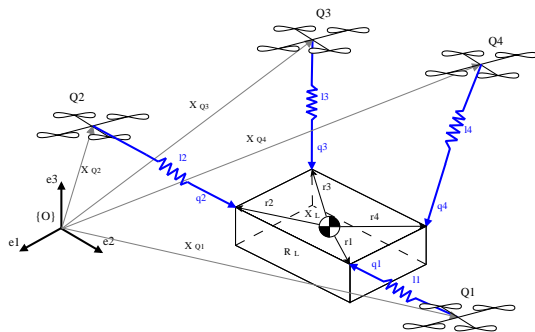


- El espacio de configuración está dado por

$$Q = \underbrace{(\mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3))}_{\text{Carga}} \times \underbrace{(S^2 \times \mathbb{R})^N}_{\text{Cables}} \times \underbrace{\text{SO}(3)^N}_{\text{Actitudes de los cuadricópteros}}$$

# Modelo con $N$ cuadricópteros y una carga rígida

Consideremos  $N \geq 3$  UAVs cuadricópteros transportando una carga rígida mediante cables elásticos.



- El espacio de configuración está dado por
$$Q = \underbrace{(\mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3))}_{\text{Carga}} \times \underbrace{(S^2 \times \mathbb{R})^N}_{\text{Cables}} \times \underbrace{\text{SO}(3)^N}_{\text{Actitudes de los cuadricópteros}}$$
- Tenemos además  $N$  controles de empuje  $f_1, \dots, f_N \in \mathbb{R}$ , y  $N$  controles de momento  $M_1, \dots, M_N \in \mathbb{R}^3$ . Definimos  $u_j = f_j R_j e_3$ .

# Objetivo

Objetivo: Diseñar los controles de modo que la posición y la actitud de la carga converjan exponencialmente rápido hacia trayectorias deseadas.

# Objetivo

Objetivo: Diseñar los controles de modo que la posición y la actitud de la carga converjan exponencialmente rápido hacia trayectorias deseadas.

- ▶ El espacio de configuración proporciona  $6(N + 1)$  grados de libertad (6 para la carga, 3 para cada cable y 3 para cada cuadricóptero).

# Objetivo

Objetivo: Diseñar los controles de modo que la posición y la actitud de la carga converjan exponencialmente rápido hacia trayectorias deseadas.

- ▶ El espacio de configuración proporciona  $6(N + 1)$  grados de libertad (6 para la carga, 3 para cada cable y 3 para cada cuadricóptero).
- ▶ Las posiciones de los cuadricópteros no aparecen en el espacio de configuración, ya que están definidas en términos de las otras variables de estado mediante las restricciones

$x_{Q_j} = x_L + R_L r_j - l_j q_j$ , para  $j \in \{1, \dots, N\}$ , donde  $r_j \in \mathbb{R}^3$  denota el punto de conexión del cable elástico  $q_j \in S^2$  a la carga, medido en el marco corporal de la carga.



# Objetivo

Objetivo: Diseñar los controles de modo que la posición y la actitud de la carga converjan exponencialmente rápido hacia trayectorias deseadas.

- ▶ El espacio de configuración proporciona  $6(N + 1)$  grados de libertad (6 para la carga, 3 para cada cable y 3 para cada cuadricóptero).
- ▶ Las posiciones de los cuadricópteros no aparecen en el espacio de configuración, ya que están definidas en términos de las otras variables de estado mediante las restricciones  
$$x_{Q_j} = x_L + R_L r_j - l_j q_j, \text{ para } j \in \{1, \dots, N\}, \text{ donde } r_j \in \mathbb{R}^3$$
  
denota el punto de conexión del cable elástico  $q_j \in S^2$  a la carga, medido en el marco corporal de la carga.
- ▶ Los controles aportan  $4N$  entradas al sistema.

# Objetivo

Objetivo: Diseñar los controles de modo que la posición y la actitud de la carga converjan exponencialmente rápido hacia trayectorias deseadas.

- ▶ El espacio de configuración proporciona  $6(N + 1)$  grados de libertad (6 para la carga, 3 para cada cable y 3 para cada cuadricóptero).
- ▶ Las posiciones de los cuadricópteros no aparecen en el espacio de configuración, ya que están definidas en términos de las otras variables de estado mediante las restricciones
$$x_{Q_j} = x_L + R_L r_j - l_j q_j, \text{ para } j \in \{1, \dots, N\}, \text{ donde } r_j \in \mathbb{R}^3$$
denota el punto de conexión del cable elástico  $q_j \in S^2$  a la carga, medido en el marco corporal de la carga.
- ▶ Los controles aportan  $4N$  entradas al sistema.

Por tanto, el sistema tiene  $2N + 6$  grados de subactuación, y puede demostrarse que **no es diferencialmente plano**.

# Objetivo

Objetivo: Diseñar los controles de modo que la posición y la actitud de la carga converjan exponencialmente rápido hacia trayectorias deseadas.

- ▶ El espacio de configuración proporciona  $6(N + 1)$  grados de libertad (6 para la carga, 3 para cada cable y 3 para cada cuadricóptero).
- ▶ Las posiciones de los cuadricópteros no aparecen en el espacio de configuración, ya que están definidas en términos de las otras variables de estado mediante las restricciones  
 $x_{Q_j} = x_L + R_L r_j - l_j q_j$ , para  $j \in \{1, \dots, N\}$ , donde  $r_j \in \mathbb{R}^3$  denota el punto de conexión del cable elástico  $q_j \in S^2$  a la carga, medido en el marco corporal de la carga.
- ▶ Los controles aportan  $4N$  entradas al sistema.

Por tanto, el sistema tiene  $2N + 6$  grados de subactuación, y puede demostrarse que **no es diferencialmente plano**.

- ▶ Es decir,  $f_1, \dots, f_N$  y  $M_1, \dots, M_N$  no pueden diseñarse para controlar el sistema completo.

## Energía asociada al modelo

La **energía cinética** total del sistema viene dada por:

$$K = \underbrace{\frac{1}{2}m_L\|\dot{x}_L\|^2 + \sum_{j=1}^N \frac{1}{2}m_Q\|\dot{x}_{Q_j}\|^2}_{\text{E.C. traslacional}} + \underbrace{\frac{1}{2}\Omega_L^T \mathbb{J}_L \Omega_L + \sum_{j=1}^N \frac{1}{2}\Omega_j^T \mathbb{J}_Q \Omega_j}_{\text{E.C. angular}}.$$

- ▶  $m_L, m_Q$  son las masas de la carga y de los cuadricópteros, respectivamente.
- ▶  $\mathbb{J}_Q, \mathbb{J}_L \in Sym_3^+(\mathbb{R})$  son los **tensores de inercia** de los cuadricópteros y de la carga, respectivamente, y  $\Omega_j \in \mathbb{R}^3$  es la velocidad angular.

# Energía asociada al modelo

La **energía cinética** total del sistema viene dada por:

$$K = \underbrace{\frac{1}{2}m_L\|\dot{x}_L\|^2 + \sum_{j=1}^N \frac{1}{2}m_Q\|\dot{x}_{Q_j}\|^2}_{\text{E.C. traslacional}} + \underbrace{\frac{1}{2}\Omega_L^T \mathbb{J}_L \Omega_L + \sum_{j=1}^N \frac{1}{2}\Omega_j^T \mathbb{J}_Q \Omega_j}_{\text{E.C. angular}}.$$

- ▶  $m_L, m_Q$  son las masas de la carga y de los cuadricópteros, respectivamente.
- ▶  $\mathbb{J}_Q, \mathbb{J}_L \in Sym_3^+(\mathbb{R})$  son los **tensores de inercia** de los cuadricópteros y de la carga, respectivamente, y  $\Omega_j \in \mathbb{R}^3$  es la velocidad angular.

La **energía potencial** total del sistema  $U : Q \rightarrow \mathbb{R}$  viene dada por:

$$U = \sum_{j=1}^N \left[ \underbrace{m_Q g e_3^T x_{Q_j} + m_L g e_3^T x_L}_{\text{E.P. gravitatoria}} + \underbrace{\frac{1}{2}k(L - l_j)^2}_{\text{E.P. elástica}} \right].$$

- ▶  $L$  es la longitud en reposo de los cables;  $l_j$  es la longitud de los cables elásticos conectados a cada cuadricóptero;
- ▶  $k$  es la **constante** que describe la rigidez/elasticidad del resorte.

# Fuerzas externas y el principio de Lagrange d'Alembert

Construimos nuestro lagrangiano como  $L := K - U$ , y derivamos las dinámicas usando el **principio de Lagrange d'Alembert**:

$$\mathcal{A}(c(t)) = \int_a^b L(c(t), \dot{c}(t)) dt + \sum_{j=1}^N \int_a^b \left( \|f_j R_j e_3\|_{\mathbb{R}^3}^2 + \|\hat{M}_j\|_{\mathfrak{so}(3)}^2 - c \dot{l}_j \right) dt,$$

donde los trabajos virtuales representan variaciones en:

- ▶ El **control total de empuje**  $f_j \in \mathbb{R}$  de cada cuadricóptero, que escribimos en forma vectorial como  $u_j \in \mathbb{R}^3$ ,  $u_j := f_j R_j e_3$ .
- ▶ El **control total de momento**  $M_j \in \mathbb{R}^3$  de cada cuadricóptero.
- ▶ Una **fuerza de amortiguamiento del resorte**  $c \dot{l}_j \in \mathbb{R}$  presente en el cable.



# Dinámica de $N$ cuadricópteros transportando una carga $l$

Los puntos críticos de la funcional de acción  $\mathcal{A}$  para variaciones con extremos fijos corresponden a soluciones de las **ecuaciones de Euler–Lagrange controladas**:

$$\dot{x}_L = v_L \quad (1)$$

$$m_{\text{eff}}(\dot{v}_L + ge_3) = \sum_{j=1}^N \left[ u_j + m_Q \ddot{\zeta}_j - m_Q R_L (\hat{\Omega}_L^2 + \dot{\hat{\Omega}}_L) r_j \right], \quad (2)$$

$$\dot{R}_L = R_L \hat{\Omega}_L \quad (3)$$

$$\mathbb{J}_{\text{eff}} \dot{\Omega}_L + \hat{\Omega}_L \mathbb{J}_{\text{eff}} \Omega_L = \sum_{j=1}^N m_Q \hat{r}_j R_L^T \left( -ge_3 - \dot{v}_L + \ddot{\zeta}_j + \frac{1}{m_Q} u_j \right), \quad (4)$$

$$m_Q q_j^T \ddot{\zeta}_j = m_Q q_j^T \left( \dot{v}_L + R_L (\hat{\Omega}_L^2 + \dot{\hat{\Omega}}_L) r_j + ge_3 - \frac{1}{m_Q} u_j \right) - cl_j + k(L - l_j), \quad (5)$$

$$q_j \times \ddot{\zeta}_j = q_j \times \left( \dot{v}_L + R_L (\hat{\Omega}_L^2 + \dot{\hat{\Omega}}_L) r_j + ge_3 - \frac{1}{m_Q} u_j \right) \quad (6)$$

$$\dot{R}_j = R_j \hat{\Omega}_j \quad (7)$$

$$\mathbb{J}_Q \dot{\Omega}_j = \mathbb{J}_Q \Omega_j \times \Omega_j + M_j, \quad j = 1, \dots, N \quad (8)$$

## Dinámica de $N$ cuadricópteros transportando una carga II

donde  $m_{\text{eff}} := Nm_Q + m_L$ ,  $\mathbb{J}_{\text{eff}} := \mathbb{J}_L - \sum_{j=1}^N m_Q \hat{r}_j^2$ , y  $\zeta_j := l_j q_j$ .



# Dinámica de $N$ cuadricópteros transportando una carga II

donde  $m_{\text{eff}} := Nm_Q + m_L$ ,  $\mathbb{J}_{\text{eff}} := \mathbb{J}_L - \sum_{j=1}^N m_Q \hat{r}_j^2$ , y  $\zeta_j := l_j q_j$ .

- Las ecuaciones (1) y (3) describen la cinemática de la posición y la actitud de la carga, respectivamente.

# Dinámica de $N$ cuadricópteros transportando una carga II

donde  $m_{\text{eff}} := Nm_Q + m_L$ ,  $\mathbb{J}_{\text{eff}} := \mathbb{J}_L - \sum_{j=1}^N m_Q \hat{r}_j^2$ , y  $\zeta_j := l_j q_j$ .

- Las ecuaciones (1) y (3) describen la **cinemática de la posición y la actitud de la carga**, respectivamente.
- Las ecuaciones (2) y (4) describen la **dinámica de la posición y la actitud de la carga**, respectivamente.

# Dinámica de $N$ cuadricópteros transportando una carga II

donde  $m_{\text{eff}} := Nm_Q + m_L$ ,  $\mathbb{J}_{\text{eff}} := \mathbb{J}_L - \sum_{j=1}^N m_Q \hat{r}_j^2$ , y  $\zeta_j := l_j q_j$ .

- Las ecuaciones (1) y (3) describen la **cinemática de la posición y la actitud de la carga**, respectivamente.
- Las ecuaciones (2) y (4) describen la **dinámica de la posición y la actitud de la carga**, respectivamente.
- Las ecuaciones (5), indexadas para  $j = 1, \dots, N$ , describen la **dinámica de las longitudes de los cables elásticos**.

# Dinámica de $N$ cuadricópteros transportando una carga II

donde  $m_{\text{eff}} := Nm_Q + m_L$ ,  $\mathbb{J}_{\text{eff}} := \mathbb{J}_L - \sum_{j=1}^N m_Q \hat{r}_j^2$ , y  $\zeta_j := l_j q_j$ .

- Las ecuaciones (1) y (3) describen la **cinemática de la posición y la actitud de la carga**, respectivamente.
- Las ecuaciones (2) y (4) describen la **dinámica de la posición y la actitud de la carga**, respectivamente.
- Las ecuaciones (5), indexadas para  $j = 1, \dots, N$ , describen la **dinámica de las longitudes de los cables elásticos**.
- Las ecuaciones (6), indexadas para  $j = 1, \dots, N$ , describen la **dinámica de las actitudes de los cables elásticos**, ya que el producto vectorial con  $q_j$  preserva la aceleración de la actitud del cable y anula la aceleración de la longitud del cable.

# Dinámica de $N$ cuadricópteros transportando una carga II

donde  $m_{\text{eff}} := Nm_Q + m_L$ ,  $\mathbb{J}_{\text{eff}} := \mathbb{J}_L - \sum_{j=1}^N m_Q \hat{r}_j^2$ , y  $\zeta_j := l_j q_j$ .

- Las ecuaciones (1) y (3) describen la **cinemática de la posición y la actitud de la carga**, respectivamente.
- Las ecuaciones (2) y (4) describen la **dinámica de la posición y la actitud de la carga**, respectivamente.
- Las ecuaciones (5), indexadas para  $j = 1, \dots, N$ , describen la **dinámica de las longitudes de los cables elásticos**.
- Las ecuaciones (6), indexadas para  $j = 1, \dots, N$ , describen la **dinámica de las actitudes de los cables elásticos**, ya que el producto vectorial con  $q_j$  preserva la aceleración de la actitud del cable y anula la aceleración de la longitud del cable.
- La **cinemática y la dinámica de las actitudes de los cuadricópteros** están descritas por las ecuaciones (7) y (8).

# Modelo reducido vía teoría de perturbaciones singulares

- Aunque el uso de cables elásticos proporciona la ventaja de reducir fuerzas impulsivas sobre la carga, oscilaciones grandes o rápidas de la carga pueden producir movimientos agresivos no deseados, comprometiendo la seguridad de la tarea cooperativa. Por lo tanto, la estrategia es utilizar cables elásticos con alta rigidez ( $k$ ) y amortiguamiento ( $c$ ) para garantizar la seguridad de la carga en la tarea de transporte.

# Modelo reducido vía teoría de perturbaciones singulares

- Aunque el uso de cables elásticos proporciona la ventaja de reducir fuerzas impulsivas sobre la carga, oscilaciones grandes o rápidas de la carga pueden producir movimientos agresivos no deseados, comprometiendo la seguridad de la tarea cooperativa. Por lo tanto, la estrategia es utilizar cables elásticos con **alta rigidez ( $k$ ) y amortiguamiento ( $c$ )** para garantizar la seguridad de la carga en la tarea de transporte.
- Con este fin, emplearemos técnicas de **teoría de perturbaciones singulares** para estudiar esta situación.

# Modelo reducido vía teoría de perturbaciones singulares

- Aunque el uso de cables elásticos proporciona la ventaja de reducir fuerzas impulsivas sobre la carga, oscilaciones grandes o rápidas de la carga pueden producir movimientos agresivos no deseados, comprometiendo la seguridad de la tarea cooperativa. Por lo tanto, la estrategia es utilizar cables elásticos con **alta rigidez ( $k$ ) y amortiguamiento ( $c$ )** para garantizar la seguridad de la carga en la tarea de transporte.
- Con este fin, emplearemos técnicas de **teoría de perturbaciones singulares** para estudiar esta situación.
- En particular, consideraremos el caso en que  $k = \frac{\bar{k}}{\epsilon^2}$  y  $c = \frac{\bar{c}}{\epsilon}$  con  $\bar{k}, \bar{c} > 0$  y  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño, y mostraremos que la dinámica se aproxima a la del mismo modelo con cables inelásticos (es decir, con  $l \equiv L$ , donde  $L$  es la longitud en reposo de los cables) cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ .



# Modelo reducido vía teoría de perturbaciones singulares

- Aunque el uso de cables elásticos proporciona la ventaja de reducir fuerzas impulsivas sobre la carga, oscilaciones grandes o rápidas de la carga pueden producir movimientos agresivos no deseados, comprometiendo la seguridad de la tarea cooperativa. Por lo tanto, la estrategia es utilizar cables elásticos con **alta rigidez ( $k$ ) y amortiguamiento ( $c$ )** para garantizar la seguridad de la carga en la tarea de transporte.
- Con este fin, emplearemos técnicas de **teoría de perturbaciones singulares** para estudiar esta situación.
- En particular, consideraremos el caso en que  $k = \frac{\bar{k}}{\epsilon^2}$  y  $c = \frac{\bar{c}}{\epsilon}$  con  $\bar{k}, \bar{c} > 0$  y  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño, y mostraremos que la dinámica se aproxima a la del mismo modelo con cables inelásticos (es decir, con  $l \equiv L$ , donde  $L$  es la longitud en reposo de los cables) cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ .
- Además, consideramos un cambio de variables de la forma  $l_j = \epsilon^2 y_j + L_c$  y  $\dot{l}_j = \epsilon z_j$ , lo cual se motiva observando que  $k(L_c - l_j) = -\bar{k}y_j$  y  $c\dot{l}_j = \bar{c}z_j$ .

# Modelo reducido vía teoría de perturbaciones singulares

- Aunque el uso de cables elásticos proporciona la ventaja de reducir fuerzas impulsivas sobre la carga, oscilaciones grandes o rápidas de la carga pueden producir movimientos agresivos no deseados, comprometiendo la seguridad de la tarea cooperativa. Por lo tanto, la estrategia es utilizar cables elásticos con **alta rigidez ( $k$ ) y amortiguamiento ( $c$ )** para garantizar la seguridad de la carga en la tarea de transporte.
- Con este fin, emplearemos técnicas de **teoría de perturbaciones singulares** para estudiar esta situación.
- En particular, consideraremos el caso en que  $k = \frac{\bar{k}}{\epsilon^2}$  y  $c = \frac{\bar{c}}{\epsilon}$  con  $\bar{k}, \bar{c} > 0$  y  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño, y mostraremos que la dinámica se aproxima a la del mismo modelo con cables inelásticos (es decir, con  $l \equiv L$ , donde  $L$  es la longitud en reposo de los cables) cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ .
- Además, consideramos un cambio de variables de la forma  $l_j = \epsilon^2 y_j + L_c$  y  $\dot{l}_j = \epsilon z_j$ , lo cual se motiva observando que  $k(L_c - l_j) = -\bar{k}y_j$  y  $c\dot{l}_j = \bar{c}z_j$ .
- Dado que, por hipótesis, el cable se estira muy poco, se sabe que  $l_j - L_c$  es casi cero. Lo que hace  $y_j$  es magnificar ese desplazamiento de modo que, respecto de  $y_j$ , es como si no hubiéramos supuesto cables rígidos. Entonces,  $\epsilon$  se utiliza para controlar de forma precisa cuán rígido es el cable.

# Modelo reducido vía teoría de perturbaciones singulares

Por lo tanto,

$$\ddot{\zeta}_j = L\ddot{q}_j + \epsilon(\dot{z}_j q_j + z_j \dot{q}_j) + \epsilon^2 y_j \ddot{q}_j.$$

# Modelo reducido vía teoría de perturbaciones singulares

Por lo tanto,

$$\ddot{\zeta}_j = L\ddot{q}_j + \epsilon(\dot{z}_j q_j + z_j \dot{q}_j) + \epsilon^2 y_j \ddot{q}_j.$$

Haciendo estas sustituciones en la dinámica, además de definir la velocidad angular de los cables  $\omega_j$  mediante  $\dot{q}_j = \omega_j \times q_j$  y  $\omega_j^T q_j = 0$ , y bajo la hipótesis de que la constante del resorte  $k$  y el amortiguamiento del resorte  $c$  son grandes, podemos reducir el sistema dinámico mediante teoría de perturbaciones singulares para obtener:

# Modelo reducido vía teoría de perturbaciones singulares

Por lo tanto,

$$\ddot{\zeta}_j = L\ddot{q}_j + \epsilon(\dot{z}_j q_j + z_j \dot{q}_j) + \epsilon^2 y_j \ddot{q}_j.$$

Haciendo estas sustituciones en la dinámica, además de definir la velocidad angular de los cables  $\omega_j$  mediante  $\dot{q}_j = \omega_j \times q_j$  y  $\omega_j^T q_j = 0$ , y bajo la **hipótesis** de que la **constante del resorte**  $k$  y el **amortiguamiento del resorte**  $c$  son grandes, podemos reducir el sistema dinámico mediante **teoría de perturbaciones singulares** para obtener:

$$\dot{x}_L = v_L, \quad \dot{q}_j = \omega_j \times q_j, \quad \dot{R}_j = R_j \hat{\Omega}_j, \quad \dot{R}_L = R_L \hat{\Omega}_L, \quad (9)$$

$$m_{\text{eff}}(\dot{v}_L + ge_3) = \sum_{j=1}^N \left( u_j - m_Q R_L (\hat{\Omega}_L^2 + \dot{\hat{\Omega}}_L) r_j + m_Q L \ddot{q}_j \right), \quad (10)$$

$$\dot{\omega}_j = \frac{1}{L} \hat{q}_j \left( \dot{v}_L - R_L (\hat{\Omega}_L^2 + \dot{\hat{\Omega}}_L) r_j + ge_3 - \frac{1}{m_Q} u_j \right), \quad (11)$$

$$\mathbb{J}_{\text{eff}} \dot{\hat{\Omega}}_L + \hat{\Omega}_L \mathbb{J}_{\text{eff}} \hat{\Omega}_L = \sum_{j=1}^N m_Q \hat{r}_j R_L^T \left( -ge_3 - \dot{v}_L + L \ddot{q}_j + \frac{1}{m_Q} u_j \right), \quad (12)$$

$$\mathbb{J}_Q \dot{\hat{\Omega}}_j = \mathbb{J}_Q \hat{\Omega}_j \times \hat{\Omega}_j + M_j, \quad j = 1, \dots, N. \quad (13)$$

# Modelo reducido vía teoría de perturbaciones singulares

El sistema anterior se puede escribir en la forma

$$\dot{x} = f(t, x, z; \epsilon) \quad \text{dinámica lenta} \quad (14)$$

$$\epsilon \dot{z} = g(t, x, z; \epsilon) \quad \text{dinámica rápida} \quad (15)$$

donde  $f$  y  $g$  son funciones suaves,  $x$  es el vector que representa  $(x_L, v_L, R_L, \Omega_L, q_j, \omega_j, R_j, \Omega_j)$ , y  $z$  es el vector que representa  $(y_j, z_j)$ , para  $j = 1, \dots, N$ .

# Modelo reducido vía teoría de perturbaciones singulares

El sistema anterior se puede escribir en la forma

$$\dot{x} = f(t, x, z; \epsilon) \quad \text{dinámica lenta} \quad (14)$$

$$\epsilon \dot{z} = g(t, x, z; \epsilon) \quad \text{dinámica rápida} \quad (15)$$

donde  $f$  y  $g$  son funciones suaves,  $x$  es el vector que representa  $(x_L, v_L, R_L, \Omega_L, q_j, \omega_j, R_j, \Omega_j)$ , y  $z$  es el vector que representa  $(y_j, z_j)$ , para  $j = 1, \dots, N$ .

El modelo de perturbaciones singulares (14)–(15) es equivalente al modelo elástico (1)–(8), simplemente condensado y con un cambio de variables.

# Modelo reducido vía teoría de perturbaciones singulares

El sistema anterior se puede escribir en la forma

$$\dot{x} = f(t, x, z; \epsilon) \quad \text{dinámica lenta} \quad (14)$$

$$\epsilon \dot{z} = g(t, x, z; \epsilon) \quad \text{dinámica rápida} \quad (15)$$

donde  $f$  y  $g$  son funciones suaves,  $x$  es el vector que representa  $(x_L, v_L, R_L, \Omega_L, q_j, \omega_j, R_j, \Omega_j)$ , y  $z$  es el vector que representa  $(y_j, z_j)$ , para  $j = 1, \dots, N$ .

El modelo de perturbaciones singulares (14)–(15) es equivalente al modelo elástico (1)–(8), simplemente condensado y con un cambio de variables.

Evaluando en  $\epsilon = 0$ , la dinámica rápida (15) nos proporciona ecuaciones algebraicas que pueden resolverse para obtener  $z = h(t, x)$ . En particular,

$$z_j = 0, \quad (16)$$

$$y_j = -\frac{m_Q}{k} q_j^T \left[ u_j + L \ddot{q}_j - \dot{v}_L + R_L (\hat{\Omega}_L^2 + \dot{\hat{\Omega}}_L) r_j - g e_3 \right]. \quad (17)$$



## Modelo reducido vía teoría de perturbaciones singulares

Sustituyendo estas ecuaciones de nuevo en la dinámica lenta (14), obtenemos el modelo reducido (lento) del sistema de control que describe la tarea cooperativa, dado por  $\dot{x} = f(t, x, h(t, x), 0)$ . Es decir,

$$\dot{x}_L = v_L, \quad \dot{R}_L = R_L \hat{\Omega}_L, \quad (18)$$

$$m_{\text{eff}}(\dot{v}_L + ge_3) = \sum_{j=1}^N \left( u_j - m_Q R_L (\hat{\Omega}_L^2 + \dot{\hat{\Omega}}_L) r_j + m_Q L \ddot{q}_j \right), \quad (19)$$

$$\dot{q}_j = \omega_j \times q_j, \quad (20)$$


$$\dot{\omega}_j = \frac{1}{L} \hat{q}_j \left( \dot{v}_L - R_L (\hat{\Omega}_L^2 + \dot{\hat{\Omega}}_L) r_j + ge_3 - \frac{1}{m_Q} u_j \right), \quad (21)$$

$$\mathbb{J}_{\text{eff}} \dot{\Omega}_L + \hat{\Omega}_L \mathbb{J}_{\text{eff}} \Omega_L = \sum_{j=1}^N m_Q \hat{r}_j R_L^T \left( -ge_3 - \dot{v}_L + L \ddot{q}_j + \frac{1}{m_Q} u_j \right), \quad (22)$$


$$\dot{R}_j = R_j \hat{\Omega}_j, \quad (23)$$

$$\mathbb{J}_Q \dot{\Omega}_j = \mathbb{J}_Q \Omega_j \times \Omega_j + M_j, \quad j = 1, \dots, N. \quad (24)$$

# Modelo reducido vía teoría de perturbaciones singulares

- ▶ Obsérvese que el modelo reducido (18)–(24) preserva las  $4N$  entradas originales del sistema, pero el espacio de configuración ha perdido  $N$  grados de libertad (concretamente, las longitudes de los cables). Por lo tanto, el modelo reducido tiene  $N + 6$  grados de **subactuación**.
  - ▶ Como se mencionó anteriormente, el modelo reducido es equivalente al modelo original con cables inelásticos (es decir, donde  $l_j \equiv L$  para  $j = 1, \dots, N$ ).
  - ▶ El modelo reducido puede demostrarse que es **diferencialmente plano**.
-  D. Mellinger and V. Kumar. *Minimum snap trajectory generation and control for quadrotors*. Proceedings of the 2011 IEEE International Conference on Robotics and Automation.
- ▶ A partir de aquí podemos diseñar controles para el **modelo reducido**, que proporcionarán resultados “buenos” para el modelo original.

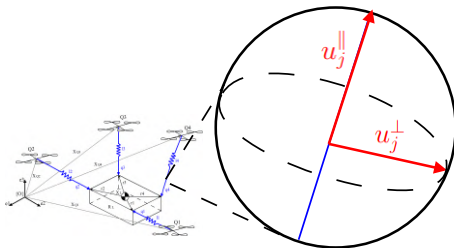
# Diseño de control

- ▶ **Hipótesis:** El control de empuje  $u_j \in \mathbb{R}^3$  puede tomar *cualquier* valor en  $\mathbb{R}^3$  (recordemos que  $u_j := f_j R_j e_3$ ).
- ▶ Bajo esta hipótesis, la dinámica del cuadricóptero se desacopla del resto del sistema, lo cual ha sido estudiado extensamente en la literatura.
  -  T. Lee. Global exponential attitude tracking controls on  $SO(3)$ . IEEE Transactions on Automatic Control, 60(10):2837-2842, 2015.
- ▶  $M_j$  puede diseñarse de forma que  $R_j$  converja exponencialmente rápido a cualquier trayectoria deseada  $\tilde{R}_j$ .
- ▶ En particular, podemos elegir  $\tilde{R}_j$  y  $f_j$  de manera que se cumpla  $\tilde{R}_j e_3 = \frac{u_j}{\|u_j\|}$  y  $f_j = \|u_j\|$ , de modo que  $f_j R_j e_3 \rightarrow u_j$  cuando  $R_j \rightarrow \tilde{R}_j$ .

# Diseño de control

- Descomponemos  $u_j$  en sus componentes **paralela** y **perpendicular** a la actitud del cable  $q_j$  como  $u_j = u_j^{\parallel} + u_j^{\perp}$ .
- $u_j^{\parallel} = \mu_j + m_Q L \|\omega_j\|^2 q_j + m_Q (q_j^T a_j) q_j$ , donde  $\mu_j \parallel q_j$  es un controlador adicional que se diseñará después.
- $u_j^{\perp} = \nu_j - m_Q \hat{q}_j^2 a_j$ , donde  $\nu_j \perp q_j$  es un controlador adicional que se diseñará después.

Aquí  $a_j = \dot{v}_L + R_L (\hat{\Omega}_L^2 + \dot{\hat{\Omega}}_L) r_j + g e_3$ .



## Dinámica simplificada

La dinámica para el **modelo reducido** queda entonces

$$\dot{x}_L = v_L, \quad (25)$$

$$m_L(\dot{v}_L + g e_3) = \sum_{j=1}^N \mu_j, \quad (26)$$

$$\dot{R}_L = R_L \hat{\Omega}_L, \quad (27)$$

$$\mathbb{J}_L \dot{\Omega}_L + \hat{\Omega}_L \mathbb{J}_L \Omega_L = \sum_{j=1}^N m_Q \hat{r}_j R_L^T \mu_j, \quad (28)$$

$$\dot{q}_j = \omega_j \times q_j, \quad (29)$$

$$m_Q \dot{\omega}_j = -q_j \times \nu_j, \quad (30)$$

$$\dot{R}_j = R_j \hat{\Omega}_j, \quad (31)$$

$$\mathbb{J}_Q \dot{\Omega}_j = \mathbb{J}_Q \Omega_j \times \Omega_j + M_j. \quad (32)$$

# Errores de seguimiento

- ▶ Denotamos las trayectorias deseadas por  $\tilde{x}_L, \tilde{v}_L, \tilde{R}_L, \tilde{\Omega}_L, \tilde{q}_j, \tilde{\omega}_j$ .
- ▶ Necesitamos una forma de medir la «distancia» entre las **variables de estado** y las **trayectorias deseadas**. Definimos los **errores de configuración**

$$\begin{aligned}e_{x_L} &= x_L - \tilde{x}_L, & e_{v_L} &= v_L - \tilde{v}_L, \\e_{R_L} &= \frac{1}{2} \left( \tilde{R}_L^T R_L - R_L^T \tilde{R}_L \right)^\vee, & e_{\Omega_L} &= \Omega_L - R_L^T \tilde{R}_L \tilde{\Omega}_L, \\e_{q_j} &= \tilde{q}_j \times q_j, & e_{\omega_j} &= \omega_j + \hat{q}_j^2 \tilde{\omega}_j,\end{aligned}$$

- ▶ Diseñamos **controladores PD**  $\tilde{\mu}_j$  y  $\nu_j$  en función de los errores de configuración.
- ▶  $\mu_j$  no satisface la **restricción de paralelismo** con las actitudes de los cables  $q_j$ , por lo que elegimos

$$\mu_j = (q_j \cdot \tilde{\mu}_j) q_j,$$

y tomamos  $\tilde{q}_j = \frac{\tilde{\mu}_j}{\|\tilde{\mu}_j\|}$  de modo que  $\mu_j \rightarrow \tilde{\mu}_j$  cuando  $q_j \rightarrow \tilde{q}_j$ .

# Resultados principales



J. Goodman, T. Beckers, L. Colombo. Geometric Control for Load Transportation with Quadrotor UAVs by Elastic Cables. IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2023.

# Resultados principales



J. Goodman, T. Beckers, L. Colombo. Geometric Control for Load Transportation with Quadrotor UAVs by Elastic Cables. IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2023.

- ▶ Bajo hipótesis básicas, construimos una **función de Lyapunov** y mostramos que es posible elegir ganancias que garanticen que los errores de configuración convergen **exponencialmente rápido** a cero.



# Resultados principales



J. Goodman, T. Beckers, L. Colombo. Geometric Control for Load Transportation with Quadrotor UAVs by Elastic Cables. IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2023.

- ▶ Bajo hipótesis básicas, construimos una **función de Lyapunov** y mostramos que es posible elegir ganancias que garanticen que los errores de configuración convergen **exponencialmente rápido** a cero.
- ▶ Mostramos que el mismo esquema de control proporciona **acotación uniformemente última** en el modelo original (inelástico).

# Resultados principales



J. Goodman, T. Beckers, L. Colombo. Geometric Control for Load Transportation with Quadrotor UAVs by Elastic Cables. IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2023.

- ▶ Bajo hipótesis básicas, construimos una **función de Lyapunov** y mostramos que es posible elegir ganancias que garanticen que los errores de configuración convergen **exponencialmente rápido** a cero.
- ▶ Mostramos que el mismo esquema de control proporciona **acotación uniformemente última** en el modelo original (inelástico).
- ▶ Mostramos que el esquema de control es **robusto** frente a **perturbaciones acotadas y no estructuradas**.

# Resultados principales



J. Goodman, T. Beckers, L. Colombo. Geometric Control for Load Transportation with Quadrotor UAVs by Elastic Cables. IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2023.

- ▶ Bajo hipótesis básicas, construimos una **función de Lyapunov** y mostramos que es posible elegir ganancias que garanticen que los errores de configuración convergen **exponencialmente rápido** a cero.
- ▶ Mostramos que el mismo esquema de control proporciona **acotación uniformemente última** en el modelo original (inelástico).
- ▶ Mostramos que el esquema de control es **robusto** frente a **perturbaciones acotadas y no estructuradas**.
- ▶ Utilizando resultados de teoría de perturbaciones singulares, recuperamos el control para el modelo original.

# Resultados principales



J. Goodman, T. Beckers, L. Colombo. Geometric Control for Load Transportation with Quadrotor UAVs by Elastic Cables. IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2023.

- ▶ Bajo hipótesis básicas, construimos una **función de Lyapunov** y mostramos que es posible elegir ganancias que garanticen que los errores de configuración convergen **exponencialmente rápido** a cero.
- ▶ Mostramos que el mismo esquema de control proporciona **acotación uniformemente última** en el modelo original (inelástico).
- ▶ Mostramos que el esquema de control es **robusto** frente a **perturbaciones acotadas y no estructuradas**.
- ▶ Utilizando resultados de teoría de perturbaciones singulares, recuperamos el control para el modelo original.
- ▶ Se presentan simulaciones numéricas tanto para el modelo elástico como para el modelo inelástico, sujetas a diversos tipos de perturbaciones.

## Resultados de simulación

- Para validar el controlador, consideramos una simulación numérica con cuatro cuadricópteros transportando una carga con una masa de  $1,5\text{ kg}$ , con forma de cuerpo rígido rectangular cuyas dimensiones (largo, ancho y alto) son  $1,0\text{ m}$ ,  $0,8\text{ m}$  y  $0,2\text{ m}$ , respectivamente.

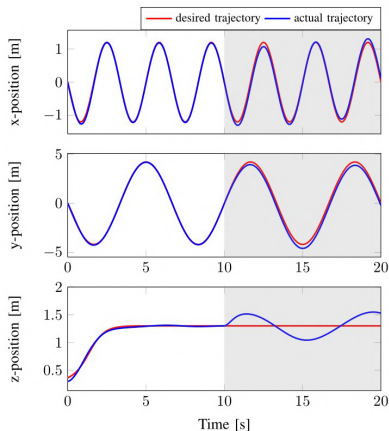
## Resultados de simulación

- ▶ Para validar el controlador, consideramos una simulación numérica con cuatro cuadricópteros transportando una carga con una masa de  $1,5\text{ kg}$ , con forma de cuerpo rígido rectangular cuyas dimensiones (largo, ancho y alto) son  $1,0\text{ m}$ ,  $0,8\text{ m}$  y  $0,2\text{ m}$ , respectivamente.
- ▶ La masa de cada cuadricóptero es  $m_Q = 0,5\text{ kg}$ . La longitud en reposo de los cables se fija en  $L = 1,0\text{ m}$ , y la carga se conecta de manera simétrica a los cables.

## Resultados de simulación

- ▶ Para validar el controlador, consideramos una simulación numérica con cuatro cuadricópteros transportando una carga con una masa de  $1,5\text{ kg}$ , con forma de cuerpo rígido rectangular cuyas dimensiones (largo, ancho y alto) son  $1,0\text{ m}$ ,  $0,8\text{ m}$  y  $0,2\text{ m}$ , respectivamente.
- ▶ La masa de cada cuadricóptero es  $m_Q = 0,5\text{ kg}$ . La longitud en reposo de los cables se fija en  $L = 1,0\text{ m}$ , y la carga se conecta de manera simétrica a los cables.
- ▶ Todos los parámetros adicionales de la configuración, valores iniciales y parámetros del controlador pueden consultarse en el artículo.

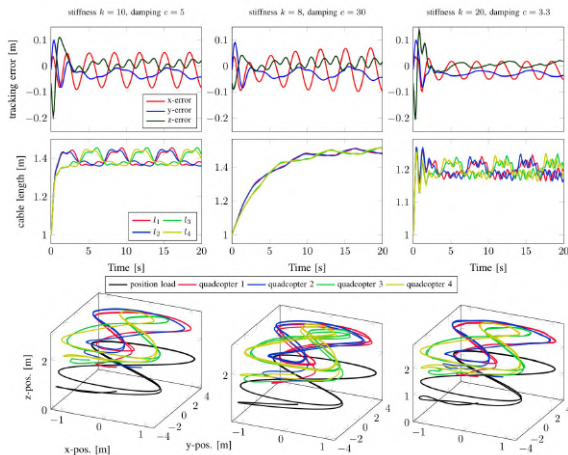
# Resultados de simulación



**Figura:** Posición deseada y posición real de la carga transportada para el modelo reducido controlado. Después de 10 segundos, el sistema es perturbado por una fuerza externa. El error de seguimiento es asintóticamente estable (en ausencia de perturbación) y acotado en último término (en presencia de una perturbación).



# Resultados de simulación



**Figura:** Dinámica del modelo controlado con cables elásticos para distintos valores de rigidez y amortiguamiento de los cables. Fila superior: El error de seguimiento de la carga es similar entre las distintas configuraciones y permanece acotado, tal como se propone. Segunda fila: Las oscilaciones de los cables dependen principalmente de sus propiedades físicas. Fila inferior: Trayectoria de la carga y de los cuadricópteros.

# Variedades y Métricas

- ▶ Una **variedad diferenciable**  $M$  es un espacio donde, localmente, podemos usar coordenadas como en  $\mathbb{R}^n$ , pero sin exigir una estructura global lineal.
- ▶ Para hacer geometría en  $M$  se introduce una **métrica Riemanniana**:

$$g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R},$$

que asigna un producto interno suave en cada espacio tangente.

- ▶ La métrica permite:
  - ▶ medir **longitudes** y **ángulos**;
  - ▶ definir **curvaturas**, **geodésicas** y **gradientes**;
  - ▶ formular ecuaciones dinámicas respetando la estructura del espacio.

# Geometría en Espacios de Configuración

- ▶ Muchos sistemas mecánicos no viven en  $\mathbb{R}^n$ , sino en **grupos de Lie** y **variedades curvas**:

$$SO(3), \quad S^2, \quad \text{productos } M_1 \times M_2 \times \cdots$$

- ▶ Estas variedades admiten una **métrica Riemanniana natural**, inducida por:
  - ▶ productos internos invariantes en grupos de Lie,
  - ▶ o la restricción de la métrica euclidiana (p.ej.,  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ ).
- ▶ Esto permite definir de manera intrínseca:
  - ▶ **distancias, ángulos, espacios tangentes,**
  - ▶ **geodésicas** y estructuras de curvatura.

# Geometría Riemanniana y Dinámica

- ▶ En sistemas físicos, la energía cinética induce de manera natural una **métrica Riemanniana** en el espacio de configuraciones  $Q$ .
- ▶ Con esta métrica, las trayectorias libres (sin fuerzas) son **geodésicas** de  $(Q, g)$ .
- ▶ Las ecuaciones mecánicas adoptan una formulación intrínseca:
  - ▶ La conexión de Levi-Civita  $\nabla$  permite escribir las **ecuaciones de Euler–Lagrange** sin coordenadas.
  - ▶ Las fuerzas y proyecciones se formulan en los correspondientes espacios tangentes.

# Energía cinética como métrica Riemanniana

- ▶ La energía cinética total define una **métrica Riemanniana**:

$$K = \frac{1}{2} g_q(\dot{q}, \dot{q}).$$

- ▶ La métrica proviene de:
  - ▶  $\mathbb{R}^3$  con métrica euclidiana,
  - ▶  $SO(3)$  con métrica bi-invariante inducida por el tensor de inercia,
  - ▶  $S^2$  con la métrica heredada de  $\mathbb{R}^3$ .
- ▶ La dinámica libre satisface:

$$\nabla_{\dot{q}} \dot{q} = 0,$$

es decir, sigue las **geodésicas** de  $(Q, g)$ .

- ▶ Los controles actúan como **fuerzas externas** que desvían estas trayectorias.

# Herramientas Riemannianas para Dinámica y Control

- ▶ La métrica induce la **conexión de Levi-Civita**  $\nabla$ :
  - ▶ covariante para derivar vectores a lo largo de curvas,
  - ▶ define aceleraciones intrínsecas.
- ▶ Las **ecuaciones de Euler-Lagrange** toman la forma:

$$\nabla_{\dot{q}} \dot{q} = G(q, \dot{q}) + U(q, \dot{q}),$$

donde  $G$  son fuerzas geométricas y  $U$  el control.

- ▶ En grupos como  $SO(3)$ :
  - ▶ se usan elementos de  $\mathfrak{so}(3)$ ,
  - ▶ exponenciales y logaritmos evitan singularidades.

# Interpretación geométrica de los controles

- ▶ En  $SO(3)$ , errores como

$$e_R = \frac{1}{2}(R_c^\top R - R^\top R_c)^\vee$$

viven en  $\mathfrak{so}(3)$ , el espacio tangente en la identidad.

- ▶ En los cables:

$$e_{q_j} = \tilde{q}_j \times q_j$$

viven en  $T_{q_j}S^2$ .

- ▶ Los controladores PD geométricos pueden expresarse como:

$$u = -K_p \exp_q^{-1}(q_d) - K_d \dot{q},$$

es decir, definidos mediante el **logaritmo Riemanniano**.

# Ecuaciones de Euler–Lagrange en variedades

- ▶ En una variedad Riemanniana  $(Q, g)$ :

$$\nabla_{\dot{q}} \dot{q} = g^{\sharp}(F).$$

- ▶ En nuestro problema:

- ▶ Forces  $u_j$  en  $\mathbb{R}^3$ ,
  - ▶ torques  $M_j$  en  $SO(3)$ ,
  - ▶ tensiones en  $S^2$ .
- ▶ Toda la dinámica se obtiene proyectando fuerzas en los **espacios tangentes** de  $Q$ .



# Perturbaciones singulares y geometría

- ▶ El modelo elástico vive en:

$$Q_\epsilon = Q \times \mathbb{R}^N.$$

- ▶ En el límite  $\epsilon \rightarrow 0$  surge una subvariedad:

$$Q_0 = Q.$$

- ▶ La familia de métricas  $g_\epsilon$  converge a una métrica degenerada que fuerza la proyección en  $Q_0$ .
- ▶ El modelo reducido es la **dinámica inducida** en la subvariedad.

# ¿Por qué usar geometría Riemanniana?

- ▶ Evita singularidades de parametrización.
- ▶ Proporciona controladores **intrínsecos**.
- ▶ Lyapunov y estabilidad se formulan con distancias geodésicas.
- ▶ Aprovecha propiedades globales del espacio:

curvatura, geodésicas, proyecciones tangentes.

# Resumen geométrico del problema

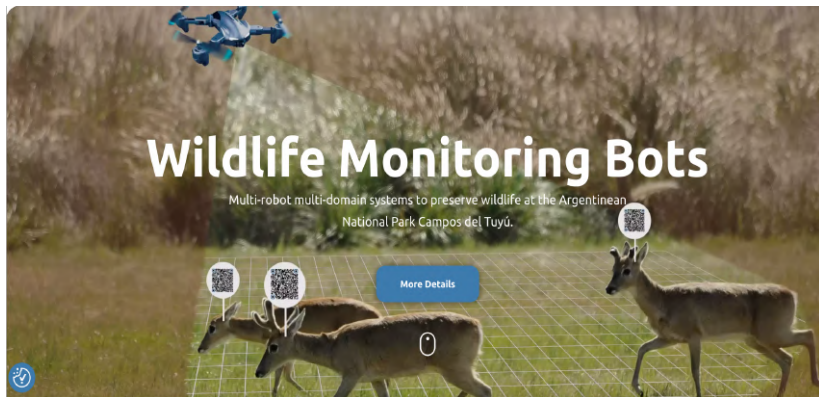
- ▶ El sistema vive en:

$$Q = \mathbb{R}^3 \times SO(3) \times (S^2)^N \times (SO(3))^N.$$

- ▶ La energía cinética define la métrica Riemanniana.
- ▶ La dinámica son geodésicas perturbadas por fuerzas.
- ▶ Los controladores actúan en espacios tangentes.
- ▶ Las perturbaciones singulares inducen dinámica en subvariedades.
- ▶ Todo el esquema es una aplicación de:

**mecánica en variedades Riemannianas.**

# Monitoreo de fauna silvestre con UAVs multirrotor

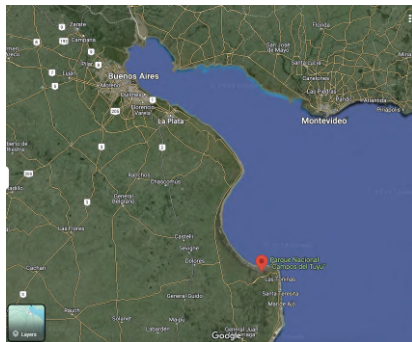


Wildlife Monitoring Bots (WiMoBo) es un proyecto de investigación financiado por el Consejo Superior de Investigaciones Científicas (CSIC) para apoyar la investigación científica orientada al cumplimiento de los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS). El objetivo es avanzar en el desarrollo de algoritmos de control robustos y rápidos para robots aéreos, con énfasis en tareas de monitoreo ambiental.

# Teledetección del venado de las Pampas con UAVs

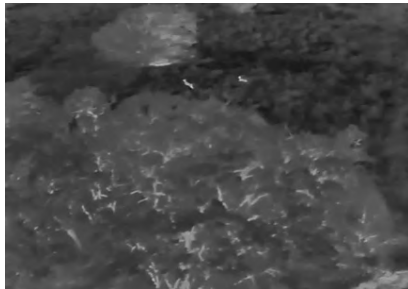


# Parque Nacional Campos del Tuyú

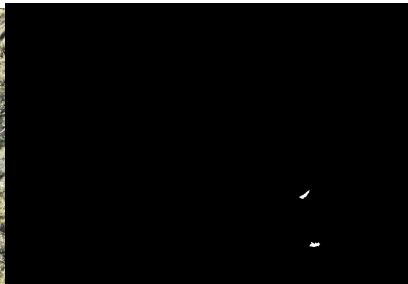
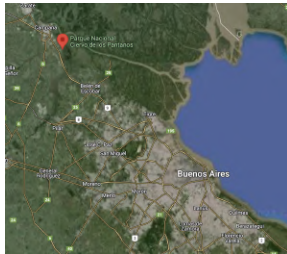


Wildlife  
Monitoring  
Bots

# Imágenes RGB vs. imágenes térmicas en Campos del Tuyú



# Teledetección en el Parque Nacional Argentino “Venado de los Pantanos”





# Teledetección del venado de los pantanos con UAVs



A. Roca, G. Torre, J. Giribet, G. Castro, L. Colombo, I. Mas, J. Pereira.  
Automatic detection of the Marsh Deer using aerial images with UAVs.  
Proceedings of the Argentinean Robotics Annual Meeting. 2024.

- Se obtuvieron 39.798 fotografías, divididas en 575 transectas, durante los vuelos realizados en el marco del Proyecto Pantano.
- Estas fueron revisadas manualmente por 4 científicos expertos y 168 voluntarios capacitados, catalogando aquellas en las que se observaron venados.
- Los observadores encontraron 231 venados en las fotografías analizadas. Además, durante este trabajo se identificaron 88 imágenes con vacas. Algunas vacas tienen tamaños y colores similares a los venados, lo que añade dificultad a la identificación.
- También se identificaron 3 imágenes con otros animales (2 carpinchos y 1 ave) y una imagen adicional con un venado que no había sido etiquetado.
- Se generó una máscara para las 232 imágenes positivas de venados para identificar en qué píxeles se encontraba específicamente el animal.

# Teledetección del venado de los pantanos con imágenes de UAVs

Procesamiento de los datos



**Figura:** 2 carpinchos, 2 venados, un ave y algunas vacas

## Objetivo de este trabajo

Este trabajo examina la aplicación de técnicas de inteligencia artificial para automatizar la identificación de venados en imágenes aéreas, abordando un desafío significativo en la conservación de fauna silvestre.

**Objetivo:** comparar el desempeño de redes neuronales de última generación, incluyendo variantes de los modelos YOLOv11 y RT-DETR, para detectar venados de los pantanos en imágenes capturadas por UAVs, en escenarios donde los animales ocupan una porción muy pequeña de la imagen y se encuentran parcialmente ocultos por vegetación.

# Teledetección del venado de los pantanos con UAVs

## Evaluación sobre el *venado de las pampas*

El modelo entrenado con la base de datos del venado de los pantanos fue evaluado sobre datos del venado de las pampas, una especie que presenta diferencias en su coloración. El modelo logró detectar algunos individuos con umbrales cercanos a 0.1, lo que indica que, aunque el modelo es capaz de identificar venados, existen ciertas limitaciones.



# ¡Gracias!

por el curso, la atención y el entusiasmo.