Una Introducción al Control Geométrico Nolineal

Leonardo J. Colombo

Centro de Automática y Robótica (CSIC-UPM)

Contenido del Curso Clase II

1. Repaso de Mecánica Geométrica

2. Estabilidad de Sistemas Nolineales

3. Control de Sistemas Lagrangianos: aplicación a un brazo robótico

4. Control Geométrico en $SO(3)$ y $SE(3)$: Satélites y Drones

Mecánica Geométrica

- Raíces: Smale, Arnold, Souriau y el libro de Abraham y Marsden "Foundations of Mechanics".
- Elementos y técnicas: Uso de elementos y técnicas de geometría diferencial para comprender la dinámica de sistemas no lineales (mecánicos): desde cuerpos rígidos hasta fluidos.
- Interés: Estudiar las simetrías (y por tanto las cantidades conservadas), que suelen provenir de un grupo de Lie, así como otras cantidades invariantes (geométricas).
- Punto de partida: Función lagrangiana, función hamiltoniana, estructura simpléctica o estructura de Poisson.

$$L = K(q, \dot{q}) - V(q) : TQ \to \mathbb{R} \text{ o } H = K(q, p) + V(q) : T^*Q \to \mathbb{R}$$

$Q =$ espacio de configuraciones (posiciones)-variedad diferenciable,
$TQ =$
espacio de velocidades (posiciones + velocidades)-fibrado tangente,
$T^*Q =$ espacio de fases (posiciones + momentos)-fibrado cotangente.

Ecuaciones de Euler–Lagrange y de Hamilton

- Sea Q una variedad diferenciable de dimensión n, el espacio de configuraciones, con coordenadas locales q^i.
- TQ denota el fibrado tangente con coordenadas locales $(q^i, \dot{q}^i)$.
- T^*Q denota el fibrado cotangente con coordenadas locales (q^i, p_i).

Dado $L : TQ \to \mathbb{R}$, las ecuaciones de Euler–Lagrange para L son

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0.$$

Dado $H : T^*Q \to \mathbb{R}$, las ecuaciones de Hamilton para H son

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}.$$

Si L induce un difeomorfismo (i.e., L es *hiperregular*), entonces ambas dinámicas son equivalentes mediante la transformación de Legendre $\mathbb{F}L : TQ \to T^*Q$, $(q^i, \dot{q}^i) \mapsto (q^i, p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i})$.

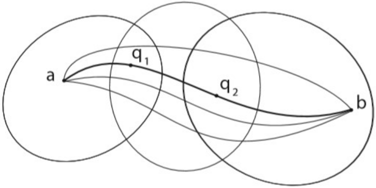
Principio de acción estacionaria de Hamilton

Motivación: Queremos derivar la dinámica del sistema a partir de la información sobre su energía. Para ello, construimos un Lagrangiano $L : TQ \to \mathbb{R}$, definido como $L := K - U$.

Principio de acción estacionaria de Hamilton

Motivación: Queremos derivar la dinámica del sistema a partir de la información sobre su energía. Para ello, construimos un Lagrangiano $L : TQ \to \mathbb{R}$, definido como $L := K - U$.

- Para una curva suave $q(t)$, definimos una deformación de q con extremos fijos $q(a)$ y $q(b)$ como la familia suave $q_\epsilon(t)$ que satisface:
  - $q_0(t) = q(t)$ para todo t.
  - $q_\epsilon(a) = q(a)$ y $q_\epsilon(b) = q(b)$ para todo ϵ.
- Definimos la variación de q con respecto a q_ϵ como $\delta q(t) = \frac{\partial}{\partial \epsilon} q_\epsilon(t)\big|_{\epsilon=0}$.



Principio de acción estacionaria de Hamilton

En ausencia de fuerzas externas no conservativas, la dinámica de un sistema con Lagrangiano L debe satisfacer $\delta \int L(q, \dot{q})\, dt = 0$, donde δ denota la primera variación con respecto a q_ϵ, una familia de deformaciones de q, parametrizada por ϵ, con extremos fijos.

Principio de acción estacionaria de Hamilton

En ausencia de fuerzas externas no conservativas, la dinámica de un sistema con Lagrangiano L debe satisfacer $\delta \int L(q, \dot{q})\, dt = 0$, donde δ denota la primera variación con respecto a q_ϵ, una familia de deformaciones de q, parametrizada por ϵ, con extremos fijos.

Theorem

Dado un Lagrangiano $L\colon TQ \to \mathbb{R}$, un intervalo de tiempo $[0, T]$ y dos puntos $q_0, q_T \in Q$, consideremos el espacio $\mathcal{C}$ de curvas C^2 $q\colon [0, T] \to Q$ tales que $q(0) = q_0$, $q(T) = q_T$. Una trayectoria del sistema descrito por L es un punto crítico del funcional de acción $\mathcal{S}\colon \mathcal{C} \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{S}[q] = \int_0^T L(q(t), \dot{q}(t))\, dt.$$

Esto da lugar a las ecuaciones de Euler–Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

Los extremos fijos $q(0) = q_0$, $q(T) = q_T$ se convierten en condiciones de contorno.

Ejemplo: Partícula en caída (unidimensional)

$$L(x, \dot{x}) = \text{energía cinética} - \text{energía potencial} = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - mgx$$

Ecuación de Euler–Lagrange:

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) + mg,$$

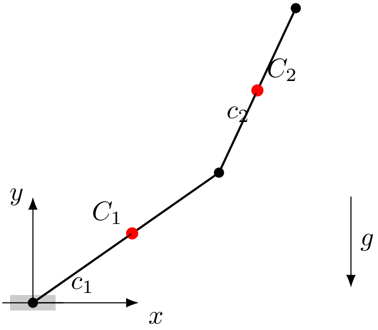
es decir,

$$-mg = m\ddot{x} \qquad \text{(esto es } F = ma\text{)}.$$

En este caso, puede resolverse exactamente $x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + at + b$, pero en general se requiere una solución numérica.

Ejemplo: Manipulador plano de 2 eslabones (2R)

Sea $q = (q_1, q_2)$ el vector de coordenadas generalizadas. El robot consta de dos eslabones con longitudes l_1, l_2, masas m_1, m_2, centros de masa a distancias c_1, c_2 e inercias I_1, I_2.



Ejemplo: Manipulador plano de 2 eslabones (2R)

La energía cinética total se escribe como

$$K = \tfrac{1}{2}a(q_2)\dot{q}_1^2 + b(q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 + \tfrac{1}{2}c\,\dot{q}_2^2,$$

donde

$$\begin{aligned} a &= I_1 + I_2 + m_1c_1^2 + m_2(l_1^2 + c_2^2 + 2l_1c_2\cos q_2), \\ b &= I_2 + m_2(c_2^2 + l_1c_2\cos q_2), \\ c &= I_2 + m_2c_2^2. \end{aligned}$$

La energía potencial bajo gravedad es

$$V = m_1gc_1\sin q_1 + m_2g(l_1\sin q_1 + c_2\sin(q_1+q_2)).$$

El lagrangiano es $L(q,\dot{q}) = K(q,\dot{q}) - V(q)$.

Ecuaciones de Euler–Lagrange

Las ecuaciones del movimiento se obtienen de

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \qquad i = 1, 2.$$

Estas pueden escribirse en la forma matricial clásica:

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = 0,$$

donde

$$M(q) = \begin{pmatrix} a(q_2) & b(q_2) \\ b(q_2) & c \end{pmatrix}.$$

El término de Coriolis y centrífugos es

$$C(q,\dot{q})\dot{q} = \begin{pmatrix} -m_2 l_1 c_2 \sin q_2 (2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) \\ m_2 l_1 c_2 \sin q_2\, \dot{q}_1^2 \end{pmatrix},$$

y el vector de gravedad:

$$G(q) = \begin{pmatrix} (m_1 c_1 + m_2 l_1) g \sin q_1 + m_2 g c_2 \sin(q_1 + q_2) \\ m_2 g c_2 \sin(q_1 + q_2) \end{pmatrix}.$$

Interpretación geométrica

Para un manipulador 2R, $Q = S^1 \times S^1$ es un grupo de Lie, y la matriz de inercia $M(q)$ induce una métrica riemanniana sobre Q.

Las ecuaciones de Euler–Lagrange pueden escribirse como

$$\ddot{q}^i + \Gamma^i_{jk}(q)\dot{q}^j\dot{q}^k + M^{ij}(q)\frac{\partial V}{\partial q^j} = 0,$$

donde Γ^i_{jk} son los símbolos de Christoffel asociados a la métrica cinética $M(q)$.

Esta formulación muestra que la dinámica corresponde a una geodésica forzada en (Q, M), con fuerzas derivadas del potencial V.

Sistemas Lagrangianos mecánicos

Sistemas Lagrangianos mecánicos

Considérese la función lagrangiana $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por sus energías cinética y potencial, $L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - V(q)$, donde $q \in \mathbb{R}^n$ son coordenadas generalizadas, $K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es la energía cinética y $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la energía potencial.

Las ecuaciones de Euler–Lagrange para L son:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Esto induce un sistema de n EDO de segundo orden:

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = 0$$

donde:

- $H(q) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es la *matriz de inercia*,
- $C(q, \dot{q})\dot{q} \in \mathbb{R}^n$ es el término (matricial) de Coriolis,
- $g(q) = \frac{\partial V}{\partial q} \in \mathbb{R}^n$ es el término gravitacional.

Seguimiento de trayectorias para sistemas Lagrangianos

Supongamos que el sistema está completamente actuado (n controles). Las ecuaciones de Euler–Lagrange controladas vienen dadas por:

$$H(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau$$

donde $\tau \in \mathbb{R}^n$ son las entradas de control.

La forma habitual de alcanzar una trayectoria deseada para un sistema Lagrangiano es usar control por realimentación (feedback) para seguir un camino objetivo $(q_d, \dot{q}_d)$.

Definimos la ley de control por realimentación:

$$\tau = H(q)\ddot{q}_d + C(q,\dot{q})\dot{q}_d + g(q) - K_p e - K_d \dot{e}$$

donde las señales de error son:

$$e = q - q_d, \quad \dot{e} = \dot{q} - \dot{q}_d$$

y K_p, K_d son matrices de ganancia definidas positivas.

Punto de equilibrio

Un **punto de equilibrio** de un sistema dinámico autónomo

$$\dot{x} = f(x)$$

es un punto x^* tal que

$$f(x^*) = 0.$$

Si la solución comienza en x^*, entonces $x(t) = x^*$ para todo t.

Ejemplo. Considere el sistema no lineal

$$\dot{x} = x - x^3.$$

Los puntos de equilibrio satisfacen $x - x^3 = 0$, es decir:

$$x^* \in \{-1,\, 0,\, 1\}.$$

Dinámica del error y punto de equilibrio

Recordemos las señales de error:

$$e = q - q_d, \qquad \dot{e} = \dot{q} - \dot{q}_d, \qquad \ddot{e} = \ddot{q} - \ddot{q}_d.$$

Sustituyendo la ley de control

$$\tau = H(q)\ddot{q}_d + C(q,\dot{q})\dot{q}_d + g(q) - K_p e - K_d \dot{e}$$

en las ecuaciones de Euler–Lagrange controladas

$$H(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau,$$

obtenemos la dinámica del error:

$$H(q)\ddot{e} + C(q,\dot{q})\dot{e} + K_d\dot{e} + K_p e = 0.$$

En el equilibrio se cumple $\dot{e} = 0$ y $\ddot{e} = 0$, luego: $K_p e = 0 \;\Rightarrow\; e = 0$

(dado que K_p es definida positiva). Por tanto, el punto de equilibrio de la dinámica del error es: $e = 0, \quad \dot{e} = 0$.

Este equilibrio describe seguimiento perfecto de la trayectoria y será el candidato a estudiar con técnicas de estabilidad (por ejemplo, Lyapunov) para analizar la convergencia del error.

Estabilidad de sistemas no lineales

Estabilidad de sistemas no lineales

Consideremos el sistema autónomo

$$\dot{x} = f(x), \qquad f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \tag{1}$$

con un punto de equilibrio en el origen: $f(0) = 0$.

Definiciones (alrededor de $x = 0$):

- Estable (de Lyapunov): Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que
  $||x(0)|| < \delta \Rightarrow ||x(t)|| < \varepsilon, \ \forall t \geq 0$.
- Asintóticamente estable: Estable y, además,
  $$||x(0)|| < \delta \ \Rightarrow \ \lim_{t \to \infty} x(t) = 0. \tag{2}$$
- Exponencialmente estable: Existen $c, \lambda > 0$ tales que
  $$||x(t)|| \leq c\, e^{-\lambda t} ||x(0)||, \qquad \forall t \geq 0. \tag{3}$$
- Inestable: No es estable.

Función candidata de Lyapunov

En sistemas no lineales *no* siempre tenemos soluciones en forma cerrada; Lyapunov permite inferir el comportamiento asintótico sin resolver explícitamente $\dot{x} = f(x)$.

Sea $D \subset \mathbb{R}^d$ un dominio que contiene al origen. Una función $V : D \to \mathbb{R}$ es una función candidata de Lyapunov si:

$$V(0) = 0, \qquad V(x) > 0 \ \ \forall x \in D \setminus \{0\}, \tag{4}$$

$$\dot{V}(x) := \nabla V(x)^\top f(x) \leq 0 \ \ \forall x \in D. \tag{5}$$

Teorema (Lyapunov directo):

- Si (4) y (5) valen, entonces $x = 0$ es estable.
- Si además $\dot{V}(x) < 0$ para todo $x \neq 0$, entonces $x = 0$ es asintóticamente estable.

Ejemplo: péndulo simple sin fricción

Consideremos el péndulo simple sin fricción:

$$\dot\theta = \omega, \qquad \dot\omega = -\frac{g}{\ell}\sin\theta,$$

con estado $x = (\theta, \omega)^\top$. Los puntos de equilibrio son

$$(\theta, \omega) = (0,0), \qquad (\pi, 0), \qquad (\pm 2\pi, 0), \ldots$$

Tomamos como candidata de Lyapunov la energía mecánica

$$V(\theta, \omega) = \tfrac{1}{2}\omega^2 + \frac{g}{\ell}\big(1 - \cos\theta\big).$$

- $V(0,0) = 0$ y $V(\theta, \omega) > 0$ si $(\theta, \omega) \neq (0,0)$ (definida positiva en un entorno de $(0,0)$).
- A lo largo de las soluciones:

$$\dot V = \nabla V^\top f = \omega\dot\omega + \frac{g}{\ell}\sin\theta\,\dot\theta = \omega\Big(-\frac{g}{\ell}\sin\theta\Big) + \frac{g}{\ell}\sin\theta\,\omega = 0.$$

$\Rightarrow$ Por Lyapunov directo, $(0,0)$ es estable, pero como $\dot V \equiv 0$ (el sistema no es disipativo), el equilibrio **no es asintóticamente estable**.

Péndulo no amortiguado: potencial y retrato de fases

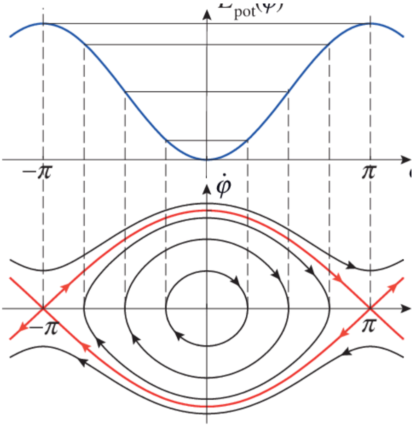


Figura: Potencial $V(\theta) = 1 - \cos\theta$ y retrato de fases del péndulo simple sin amortiguamiento. Las órbitas cerradas corresponden a oscilaciones alrededor de los mínimos del potencial, mientras que las trayectorias abiertas representan rotaciones. El equilibrio $(0, 0)$ es estable (en el sentido de Lyapunov), pero no asintóticamente estable.

Por qué Lyapunov no basta en el péndulo con fricción

Consideremos el péndulo con fricción viscosa:

$$\dot{\theta} = \omega, \qquad \dot{\omega} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta - k\omega, \quad k > 0.$$

Tomamos como función candidata la energía mecánica

$$V(\theta, \omega) = \tfrac{1}{2}\omega^2 + \frac{g}{\ell}(1 - \cos\theta).$$

Su derivada a lo largo de las soluciones es $\dot{V} = -k\,\omega^2 \leq 0$.

- V es **definida positiva**.
- Pero $\dot{V}$ es solo **semidefinida negativa** (no estrictamente negativa).

$$\dot{V} = 0 \quad \text{si y solo si} \quad \omega = 0.$$

Problema: Lyapunov directo *no* garantiza estabilidad asintótica cuando $\dot{V}(x)$ puede ser cero en más puntos que el equilibrio.

Aquí, el conjunto

$$E = \{(\theta, \omega) : \ \dot{V} = 0\} = \{(\theta, 0)\}$$

es una *línea entera de puntos*, no solo el equilibrio.

Conclusión: Para decidir si las trayectorias realmente convergen a $(0, 0)$, debemos analizar el *conjunto invariante* dentro de E.

Esto nos lleva al Principio de Invarianza de LaSalle.

Principio de invarianza de LaSalle

Theorem (Invarianza de LaSalle)

Sea el sistema autónomo $\dot{x} = f(x), \quad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *continua, y sea* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una función continuamente diferenciable tal que*

$$\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0$$

en un conjunto ***positivamente invariante*** Ω *(toda trayectoria que empieza en* Ω *permanece en* Ω*).*

Definamos el conjunto donde la disipación desaparece:

$$E = \{x \in \Omega : \ \dot{V}(x) = 0\}.$$

Sea M *el* ***máximo conjunto invariante*** *contenido en* E*.*

Entonces, toda trayectoria $x(t)$ *que comienza en* Ω *satisface*

$$x(t) \ \longrightarrow \ M \quad \textit{cuando } t \to \infty.$$

En particular, si $M = \{0\}$*, entonces el origen es asintóticamente estable.*

Ejemplo: péndulo con fricción viscosa

Péndulo con amortiguamiento:

$$\dot{\theta} = \omega, \qquad \dot{\omega} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta - k\omega, \qquad k > 0.$$

Tomamos como función de Lyapunov la energía mecánica:

$$V(\theta,\omega) = \tfrac{1}{2}\omega^2 + \frac{g}{\ell}(1 - \cos\theta).$$

Su derivada a lo largo de las trayectorias es:

$$\dot{V} = \omega\dot{\omega} + \frac{g}{\ell}\sin\theta\,\dot{\theta} = -k\,\omega^2 \leq 0.$$

- V es definida positiva en un entorno del equilibrio $(0,0)$.
- Pero $\dot{V}$ es sólo **semidefinida**:
$$\dot{V} = 0 \iff \omega = 0,$$
es decir, **una línea entera de puntos**, no solo el equilibrio.
- El conjunto donde no hay disipación es
$$E = \{(\theta,\omega) : \ \omega = 0\}.$$
El único punto **invariante** en E es el equilibrio $(0,0)$.

Por el principio de invarianza de LaSalle,

$$(\theta(t),\omega(t)) \to (0,0),$$

y el péndulo amortiguado es asintóticamente estable.

¿Por qué el único punto invariante en E es el equilibrio?

Recordemos que

$$E = \{(\theta, \omega) : \ \omega = 0\}$$

es el conjunto donde $\dot{V} = 0$.

Tomemos un punto de E: $(\theta_0, 0)$. Entonces:

$$\dot{\theta} = 0, \qquad \dot{\omega} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta_0.$$

- Si $\sin \theta_0 \neq 0$, entonces $\dot{\omega} \neq 0$ y la trayectoria **sale inmediatamente de** E. $\Rightarrow$ no es un punto invariante.
- Si $\sin \theta_0 = 0$, entonces $\theta_0 = k\pi$. Los únicos puntos que permanecen en E son
$$(\theta, \omega) = (k\pi, 0).$$
- Entre ellos, el **mínimo de energía** es $(0, 0)$, que es el **único punto invariante relevante** para LaSalle en esta región.

Por el principio de invarianza de LaSalle:

$$(\theta(t), \omega(t)) \to (0, 0).$$

Resumen

Lyapunov directo:

- Si $\dot{V}(x) < 0$ para todo $x \neq 0$, entonces estabilidad **asintótica**.
- Si $\dot{V}$ solo cumple $\dot{V} \leq 0$, **no** basta para concluir convergencia.

LaSalle:

- Busca el conjunto $E = \{x : \dot{V} = 0\}$.
- Identifica el **máximo conjunto invariante** $M \subset E$.
- Toda trayectoria $\to M$. Si $M = \{0\}$, el origen es **asintóticamente estable**.

Ejemplo simple: estabilidad exponencial

Consideremos el sistema lineal estable:

$$\dot{x} = Ax, \qquad A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Su solución explícita es: $x(t) = (e^{-2t}x_1(0),\, e^{-3t}x_2(0))$, lo cual ya sugiere **convergencia exponencial**.

Ejemplo simple: estabilidad exponencial

Consideremos el sistema lineal estable:

$$\dot{x} = Ax, \qquad A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Su solución explícita es: $x(t) = (e^{-2t}x_1(0), e^{-3t}x_2(0))$, lo cual ya sugiere **convergencia exponencial**.

Usando Lyapunov: Tomemos la función:

$$V(x) = x^\top x = x_1^2 + x_2^2.$$

Entonces:

$$\dot{V} = 2x^\top \dot{x} = 2x^\top Ax = -4x_1^2 - 6x_2^2.$$

Cotas cuadráticas:

$$2V(x) = 2(x_1^2 + x_2^2) \leq 4x_1^2 + 6x_2^2 = -\dot{V}.$$

De aquí obtenemos: $\dot{V} \leq -2V$.

Demostración de estabilidad exponencial

De la desigualdad obtenida: $\dot{V} \leq -2V$, podemos integrar para obtener:

$$V(t) \leq V(0)e^{-2t}.$$

Dado que

$$V(x) = \|x\|^2,$$

esto implica:

$$\|x(t)\|^2 \leq \|x(0)\|^2 e^{-2t} \quad \Longrightarrow \quad \|x(t)\| \leq e^{-t}\,\|x(0)\|.$$

Conclusión: existe $\lambda = 1$ y $c = 1$ tales que

$$\|x(t)\| \leq c\,e^{-\lambda t}\|x(0)\|,$$

lo que demuestra que el origen es **estable exponencialmente**.

Demostración de estabilidad exponencial

De la desigualdad obtenida: $\dot{V} \leq -2V$, podemos integrar para obtener:

$$V(t) \leq V(0)e^{-2t}.$$

Dado que

$$V(x) = \|x\|^2,$$

esto implica:

$$\|x(t)\|^2 \leq \|x(0)\|^2 e^{-2t} \quad \Longrightarrow \quad \|x(t)\| \leq e^{-t} \|x(0)\|.$$

Conclusión: existe $\lambda = 1$ y $c = 1$ tales que

$$\|x(t)\| \leq c\, e^{-\lambda t} \|x(0)\|,$$

lo que demuestra que el origen es **estable exponencialmente**.

- **Criterio:** Si existen constantes $\alpha_1, \alpha_2, \lambda > 0$ tales que:

  $$\alpha_1 \|x\|^2 \leq V(x) \leq \alpha_2 \|x\|^2,$$

  y

  $$\dot{V}(x) \leq -\lambda V(x) \qquad \text{(Grönwall)},$$

  entonces la estabilidad es **exponencial**.

Resumen (I): Mecánica geométrica y sistemas lagrangianos

Mecánica geométrica

- Configuraciones: Q variedad diferenciable (p.ej. $Q = S^1 \times S^1$ para un 2R).
- Lagrangiano $L = K(q, \dot{q}) - V(q) : TQ \to \mathbb{R}$.
- Hamiltoniano $H = K(q, p) + V(q) : T^*Q \to \mathbb{R}$.

Ecuaciones de movimiento

- Euler–Lagrange:
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0.$$
- Hamilton:
$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}.$$
- Si L es hiperregular $\Rightarrow$ equivalencia vía transformación de Legendre.

Ejemplos

- Partícula en caída libre: recuperamos $m\ddot{x} = -mg$.
- Manipulador plano 2R: dinámica
$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = 0,$$
con interpretación geométrica como geodésicas forzadas en (Q, M).

Resumen (II): Estabilidad, Lyapunov y LaSalle

Estabilidad de Lyapunov

- Sistema autónomo $\dot{x} = f(x)$, equilibrio en $x = 0$.
- Estable, asintóticamente estable, exponencialmente estable.
- Función candidata $V(x)$:

$$V(0) = 0, \quad V(x) > 0, \quad \dot{V}(x) = \nabla V^\top f(x) \leq 0.$$

- Lyapunov directo:
  - $\dot{V} \leq 0 \Rightarrow$ estabilidad.
  - $\dot{V} < 0$ para $x \neq 0 \Rightarrow$ estabilidad asintótica.

Limitación y Principio de LaSalle

- Si $\dot{V}$ solo es semidefinida ($\dot{V} = 0$ en un conjunto grande), Lyapunov no basta para concluir convergencia.
- LaSalle:

$$E = \{x : \dot{V}(x) = 0\}, \quad M = \text{máximo conjunto invariante en } E.$$

  Toda trayectoria que permanece en Ω converge a M.
- Si $M = \{0\}$, el equilibrio es asintóticamente estable.

Modelo dinámico (Ecuaciones de Euler–Lagrange)

Modelo dinámico (Ecuaciones de Euler–Lagrange)

La dinámica de un sistema Lagrangiano totalmente actuado es

$$H(q)\,\ddot{q} + C(q,\dot{q})\,\dot{q} + g(q) = \tau, \tag{6}$$

donde:

- $q \in \mathbb{R}^n$ son las coordenadas generalizadas,
- $H(q)$ es la matriz de inercia (*simétrica y definida positiva*),
- $C(q,\dot{q})\,\dot{q}$ agrupa términos centrífugos y de Coriolis,
- $g(q)$ son las fuerzas gravitatorias,
- $\tau \in \mathbb{R}^n$ es el vector de controles.

Control por *realimentación*

Dada una trayectoria deseada $q_{\mathrm{d}}(t)$ diferenciable, el control

$$\tau = H(q)\,\ddot{q}_{\mathrm{d}} + C(q,\dot{q})\,\dot{q}_{\mathrm{d}} + g(q) \tag{7}$$

anula la dinámica si $q = q_d$, $\dot{q} = \dot{q}_d$ y $\ddot{q} = \ddot{q}_d$.

Observación: El control (7) **no corrige** errores iniciales ni de modelo; en general, no garantiza seguimiento cuando $q(0) \neq q_d(0)$ o si el sistema tiene incertidumbres.

Errores y ley PD con realimentación

Definimos los errores

$$e := q - q_{\mathrm{d}}, \qquad \dot{e} := \dot{q} - \dot{q}_{\mathrm{d}}, \qquad \ddot{e} := \ddot{q} - \ddot{q}_{\mathrm{d}}. \tag{8}$$

La ley clásica PD con compensación (computed torque) es

$$\boxed{\ \tau \ = \ H(q)\left(\ddot{q}_{\mathrm{d}} - K_d\,\dot{e} - K_p\,e\right) + C(q,\dot{q})\,\dot{q} + g(q)\ }, \tag{9}$$

con $K_p, K_d \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **definidas positivas**.

Equivalentemente:

$$\tau = H(q)\,\ddot{q}_{\mathrm{d}} + C(q,\dot{q})\,\dot{q} + g(q) \ - \ H(q)\left(K_d\,\dot{e} + K_p\,e\right). \tag{10}$$

Dinámica del error

Sustituyendo (9) en (6) se obtiene "la dinámica cerrada en el error":

$$H(q)\,\ddot{e} + C(q,\dot{q})\,\dot{e} + K_d\,\dot{e} + K_p\,e = 0. \tag{11}$$

Si H es definida positiva y K_p, K_d son definidas positivas, el sistema es **estable asintóticamente**. Además, con elecciones adecuadas de K_p, K_d se obtiene **convergencia exponencial**.

Prueba vía Lyapunov

Considérese la función de Lyapunov

$$V(e,\dot e) = \tfrac{1}{2}\,\dot e^\top H(q)\,\dot e + \tfrac{1}{2}\,e^\top K_p\,e. \tag{12}$$

Usando que $\dot H - 2C$ es antisimétrica, se tiene

$$\begin{aligned}
\dot V &= \dot e^\top H\,\ddot e + \tfrac{1}{2}\dot e^\top \dot H\,\dot e + e^\top K_p\,\dot e \qquad (13)\\
&= \dot e^\top\big(-C\,\dot e - K_d\,\dot e - K_p\,e\big) + \tfrac{1}{2}\dot e^\top \dot H\,\dot e + e^\top K_p\,\dot e \qquad (14)\\
&= -\,\dot e^\top K_d\,\dot e \;\le\; 0. \qquad (15)
\end{aligned}$$

Por LaSalle, todas las trayectorias con errores acotados convergen al mayor conjunto invariante en $\{\dot e:\ \dot V = 0\}$, que implica $\dot e \to 0$ y, por (11), también $e \to 0$.

Caso especial: control PD gravitacionalmente compensado

En algunas aplicaciones se usa la versión:

$$\boxed{\tau \;=\; -K_d\,\dot{e} - K_p\,e \;+\; C(q,\dot{q})\,\dot{q} + g(q)}, \tag{16}$$

que corresponde al caso *regulación* ($\ddot{q}_{\mathrm{d}} \equiv 0$).

Con $K_p, K_d \succ 0$, el equilibrio es **asintóticamente estable**.

Murray, Richard M., Zexiang Li, and S. Shankar Sastry. A mathematical introduction to robotic manipulation. CRC press, 2017.

Resumen práctico

- El control (7) realiza seguimiento sólo con modelo perfecto en iguales condiciones iniciales: no corrige error.
- El término de **realimentación** en (9):

$$-H(q)\left(K_d\,\dot{e} + K_p\,e\right), \tag{17}$$

  genera una dinámica de error bien condicionada y estable.
- La prueba de estabilidad usa V en (12) y da $\dot{V} = -\dot{e}^\top K_d \dot{e} \leq 0$, implicando **estabilidad asintótica (incluso exponencial)** para ganancias adecuadas.

Ejemplo: manipulador planar de 2 eslabones

Consideremos un manipulador planar con dos articulaciones rotacionales y coordenadas articulares $q = (q_1, q_2)^\top$. Cada eslabón posee longitudes l_1, l_2, masas m_1, m_2, centros de masa a distancias l_{c1}, l_{c2}, e inercias I_1, I_2 respecto a los ejes que atraviesan dichos centros.

Ejemplo: manipulador planar de 2 eslabones

Consideremos un manipulador planar con dos articulaciones rotacionales y coordenadas articulares $q = (q_1, q_2)^\top$. Cada eslabón posee longitudes l_1, l_2, masas m_1, m_2, centros de masa a distancias l_{c1}, l_{c2}, e inercias I_1, I_2 respecto a los ejes que atraviesan dichos centros.

Ejemplo: manipulador planar de 2 eslabones

Consideremos un manipulador planar con dos articulaciones rotacionales y coordenadas articulares $q = (q_1, q_2)^\top$. Cada eslabón posee longitudes l_1, l_2, masas m_1, m_2, centros de masa a distancias l_{c1}, l_{c2}, e inercias I_1, I_2 respecto a los ejes que atraviesan dichos centros.

El modelo dinámico lagrangiano se expresa como:

$$H(q)\,\ddot{q} + C(q, \dot{q})\,\dot{q} + g(q) = \tau,$$

donde $H(q)$ es la matriz de inercia (simétrica definida positiva), $C(q, \dot{q})\dot{q}$ contiene los términos de Coriolis y centrífugos, $g(q)$ representa la gravedad, y $\tau \in \mathbb{R}^2$ son los torques articulares.

Ejemplo: manipulador planar de 2 eslabones

Consideremos un manipulador planar con dos articulaciones rotacionales y coordenadas articulares $q = (q_1, q_2)^\top$. Cada eslabón posee longitudes l_1, l_2, masas m_1, m_2, centros de masa a distancias l_{c1}, l_{c2}, e inercias I_1, I_2 respecto a los ejes que atraviesan dichos centros.

El modelo dinámico lagrangiano se expresa como:

$$H(q)\,\ddot{q} + C(q,\dot{q})\,\dot{q} + g(q) = \tau,$$

donde $H(q)$ es la matriz de inercia (simétrica definida positiva), $C(q,\dot{q})\dot{q}$ contiene los términos de Coriolis y centrífugos, $g(q)$ representa la gravedad, y $\tau \in \mathbb{R}^2$ son los torques articulares.

Matrices del modelo:

$$H(q) = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix}, \quad C(q,\dot{q})\dot{q} = \begin{bmatrix} -h\dot{q}_2 & -h(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ h\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix},$$

con $h = m_2 l_1 l_{c2} \sin q_2$ y

$$h_{11} = I_1 + I_2 + m_1 l_{c1}^2 + m_2(l_1^2 + l_{c2}^2 + 2 l_1 l_{c2} \cos q_2),$$
$$h_{12} = I_2 + m_2(l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos q_2), \quad h_{22} = I_2 + m_2 l_{c2}^2.$$

Estabilidad exponencial en el manipulador 2R

Partimos del sistema en lazo cerrado de error:

$$H(q)\,\ddot{e} + C(q,\dot{q})\,\dot{e} + K_d\,\dot{e} + K_p\,e = 0.$$

Tomamos la función de Lyapunov

$$V(e,\dot{e}) = \frac{1}{2}\,\dot{e}^\top H(q)\dot{e} + \frac{1}{2}\,e^\top K_p e.$$

Calculemos su derivada:

$$\dot{V} = \frac{1}{2}\dot{e}^\top \dot{H}(q)\dot{e} + \dot{e}^\top H(q)\ddot{e} + \frac{1}{2}e^\top K_p\dot{e} + \frac{1}{2}\dot{e}^\top K_p e.$$

Sustituimos la dinámica de error:

$$H(q)\ddot{e} = -C(q,\dot{q})\dot{e} - K_d\dot{e} - K_p e.$$

Entonces:

$$\dot{V} = \tfrac{1}{2}\dot{e}^\top \dot{H}\,\dot{e} - \dot{e}^\top C\,\dot{e} - \dot{e}^\top K_d\dot{e} - \dot{e}^\top K_p e + e^\top K_p\dot{e}.$$

Cálculo final del signo de $\dot{V}$ y estabilidad exponencial

Observemos que

$$\dot{e}^\top K_p e = e^\top K_p \dot{e},$$

por lo que estos términos se cancelan exactamente.

Queda entonces:

$$\dot{V} = \tfrac{1}{2}\dot{e}^\top \dot{H}\,\dot{e} - \dot{e}^\top C\,\dot{e} - \dot{e}^\top K_d \dot{e}.$$

Usamos la propiedad de los sistemas Lagrangianos:

$$\dot{H}(q) - 2C(q,\dot{q}) \quad \text{es antisimétrica.}$$

Por tanto:

$$\dot{e}^\top (\dot{H} - 2C)\dot{e} = 0,$$

lo que implica la cancelación del primer y segundo término:

$$\tfrac{1}{2}\dot{e}^\top \dot{H}\dot{e} - \dot{e}^\top C\dot{e} = 0.$$

Cálculo final del signo de $\dot{V}$ y estabilidad exponencial

Así,

$$\boxed{\dot{V} = -\,\dot{e}^{\top} K_d\,\dot{e} \leq 0.}$$

Como $K_d > 0$:

$$\dot{V} \leq -\lambda_{\text{mín}}(K_d)\|\dot{e}\|^2.$$

Usando las cotas cuadráticas de V:

$$\alpha_1\|(e, \dot{e})\|^2 \leq V \leq \alpha_2\|(e, \dot{e})\|^2,$$

obtenemos:

$$\|(e(t), \dot{e}(t))\| \leq c\,e^{-\lambda t}\|(e(0), \dot{e}(0))\|.$$

$\boxed{\text{El error del manipulador 2R converge exponencialmente al origen.}}$

Estabilidad exponencial vía cotas cuadráticas

La función de Lyapunov satisface cotas cuadráticas:

$$\alpha_1\|(e,\dot{e})\|^2 \;\le\; V(e,\dot{e}) \;\le\; \alpha_2\|(e,\dot{e})\|^2.$$

De la desigualdad anterior:

$$\dot{V} \;\le\; -\lambda_{\text{mín}}(K_d)\|\dot{e}\|^2,$$

y usando la cota inferior:

$$\|\dot{e}\|^2 \;\ge\; \frac{1}{\alpha_1}V \quad\Rightarrow\quad \dot{V} \;\le\; -\frac{\lambda_{\text{mín}}(K_d)}{\alpha_1}\,V.$$

Aplicando Grönwall:

$$V(t) \;\le\; V(0)\,e^{-(\lambda_{\text{mín}}(K_d)/\alpha_1)t}.$$

Usando la cota superior de V:

$$\|(e(t),\dot{e}(t))\| \;\le\; \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\,e^{-(\lambda_{\text{mín}}(K_d)/(2\alpha_1))\,t}\,\|(e(0),\dot{e}(0))\|.$$

El error del manipulador 2R converge exponencialmente al origen.

Resumen (I): modelo lagrangiano y ley de control

Modelo dinámico Lagrangiano totalmente actuado

$$H(q)\,\ddot{q} + C(q,\dot{q})\,\dot{q} + g(q) = \tau,$$

- $q \in \mathbb{R}^n$: coordenadas generalizadas.
- $H(q)$: matriz de inercia, simétrica y definida positiva.
- $C(q,\dot{q})\dot{q}$: términos de Coriolis y centrífugos.
- $g(q)$: gravedad.
- τ: torques/entradas de control.

Control por realimentación (computed torque)

Dada una trayectoria deseada $q_d(t)$, definimos los errores:

$$e = q - q_d, \quad \dot{e} = \dot{q} - \dot{q}_d.$$

La ley PD con compensación:

$$\boxed{\tau = H(q)\big(\ddot{q}_d - K_d\dot{e} - K_p e\big) + C(q,\dot{q})\dot{q} + g(q)}$$

- Anula exactamente la dinámica cuando $q = q_d$ (modelo perfecto).
- Añade términos $K_p e$, $K_d\dot{e}$ para corregir errores de seguimiento.

Resumen (II): dinámica del error y estabilidad

Dinámica cerrada del error

$$H(q)\,\ddot{e} + C(q,\dot{q})\,\dot{e} + K_d\,\dot{e} + K_p\,e = 0.$$

Función de Lyapunov

$$V(e,\dot{e}) = \tfrac{1}{2}\,\dot{e}^{\top} H(q)\,\dot{e} + \tfrac{1}{2}\,e^{\top} K_p\,e.$$

Cálculo de $\dot{V}$ (usando $\dot{H} - 2C$ antisimétrica)

$$\dot{V} = -\,\dot{e}^{\top} K_d\,\dot{e} \;\le\; 0.$$

- V definida positiva y radialmente acotante en $(e,\dot{e})$.
- $\dot{V} \le 0$ y sólo se anula si $\dot{e} = 0$.
- Por LaSalle: $(e(t),\dot{e}(t)) \to (0,0) \Rightarrow$ **seguimiento asintótico**.
- Usando cotas cuadráticas de V y $\dot{V}$, se obtiene además

$$\|(e(t),\dot{e}(t))\| \le c\,e^{-\lambda t}\|(e(0),\dot{e}(0))\|,$$

es decir, **estabilidad exponencial** del error.

Isomorfismo entre $\mathfrak{so}(3)$ y $\mathbb{R}^3$

Isomorfismo entre $\mathfrak{so}(3)$ y $\mathbb{R}^3$

Identificación clásica

El álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ (matrices 3×3 **antisimétricas**) es isomorfa al espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$.

Isomorfismo entre $\mathfrak{so}(3)$ y $\mathbb{R}^3$

Identificación clásica

El álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ (matrices 3×3 **antisimétricas**) es isomorfa al espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$.

Definimos la **aplicación "sombrero"** $\widehat{(\cdot)} : \mathbb{R}^3 \to \mathfrak{so}(3)$ como:

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad x = (x_1, x_2, x_3)^\top.$$

Isomorfismo entre $\mathfrak{so}(3)$ y $\mathbb{R}^3$

Identificación clásica

El álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ (matrices 3×3 **antisimétricas**) es isomorfa al espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$.

Definimos la **aplicación "sombrero"** $\widehat{(\cdot)} : \mathbb{R}^3 \to \mathfrak{so}(3)$ como:

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad x = (x_1, x_2, x_3)^\top.$$

Propiedades

- Para todo $x, y \in \mathbb{R}^3$ se cumple: $\hat{x}y = x \times y$.
- El conmutador de matrices en $\mathfrak{so}(3)$ corresponde al producto vectorial: $[\hat{x}, \hat{y}] = \widehat{x \times y}$.

Isomorfismo entre $\mathfrak{so}(3)$ y $\mathbb{R}^3$

Identificación clásica

El álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ (matrices 3×3 **antisimétricas**) es isomorfa al espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$.

Definimos la **aplicación "sombrero"** $\widehat{(\cdot)} : \mathbb{R}^3 \to \mathfrak{so}(3)$ como:

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad x = (x_1, x_2, x_3)^\top.$$

Propiedades

- Para todo $x, y \in \mathbb{R}^3$ se cumple: $\hat{x}y = x \times y$.
- El conmutador de matrices en $\mathfrak{so}(3)$ corresponde al producto vectorial: $[\hat{x}, \hat{y}] = \widehat{x \times y}$.

Aplicación inversa

La **aplicación "vee"**

$$(\cdot)^\vee : \mathfrak{so}(3) \to \mathbb{R}^3$$

es la inversa de $\hat{(\cdot)}$ y asocia a cada matriz antisimétrica su vector correspondiente.

Simetrías en Mecánica: el cuerpo rígido

Simetrías en Mecánica: el cuerpo rígido

Una simetría de una función $F : Q \to \mathbb{R}$ es una aplicación $\phi : Q \to Q$ tal que $F \circ \phi = F$.

Simetrías en Mecánica: el cuerpo rígido

Una simetría de una función $F : Q \to \mathbb{R}$ es una aplicación $\phi : Q \to Q$ tal que $F \circ \phi = F$.

El cuerpo rígido libre: Consideremos un cuerpo rígido con un punto fijo.

- Espacio de configuraciones: Grupo de rotaciones $SO(3)$, donde la configuración se determina mediante una matriz de rotación $R(t)$.
- Velocidad angular en el cuerpo: $\hat{\Omega} = R^{-1}\dot{R} \in \mathfrak{so}(3)$ (traslación a la izquierda de $\dot{R}$ a la identidad).
- Lagrangiano: $L(R, \dot{R}) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\dot{R}\mathbb{J}\dot{R}^T\right)$, con $\mathbb{J}$ simétrica y constante.
- Dinámica: Ecuaciones de Euler–Lagrange $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{R}}\right) = \frac{\partial L}{\partial R}$

Simetrías en Mecánica: el cuerpo rígido

Una simetría de una función $F : Q \to \mathbb{R}$ es una aplicación $\phi : Q \to Q$ tal que $F \circ \phi = F$.

El cuerpo rígido libre: Consideremos un cuerpo rígido con un punto fijo.

- Espacio de configuraciones: Grupo de rotaciones $SO(3)$, donde la configuración se determina mediante una matriz de rotación $R(t)$.
- Velocidad angular en el cuerpo: $\hat{\Omega} = R^{-1}\dot{R} \in \mathfrak{so}(3)$ (traslación a la izquierda de $\dot{R}$ a la identidad).
- Lagrangiano: $L(R, \dot{R}) = \frac{1}{2}\mathsf{Tr}\left(\dot{R}\mathbb{J}\dot{R}^T\right)$, con $\mathbb{J}$ simétrica y constante.
- Dinámica: Ecuaciones de Euler–Lagrange $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{R}}\right) = \frac{\partial L}{\partial R} \rightsquigarrow$ interpretación complicada.

Simetrías en Mecánica: el cuerpo rígido

Una simetría de una función $F : Q \to \mathbb{R}$ es una aplicación $\phi : Q \to Q$ tal que $F \circ \phi = F$.

El cuerpo rígido libre: Consideremos un cuerpo rígido con un punto fijo.

- Espacio de configuraciones: Grupo de rotaciones $SO(3)$, donde la configuración se determina mediante una matriz de rotación $R(t)$.
- Velocidad angular en el cuerpo: $\hat{\Omega} = R^{-1}\dot{R} \in \mathfrak{so}(3)$ (traslación a la izquierda de $\dot{R}$ a la identidad).
- Lagrangiano: $L(R, \dot{R}) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\dot{R}\mathbb{J}\dot{R}^T\right)$, con $\mathbb{J}$ simétrica y constante.
- Dinámica: Ecuaciones de Euler–Lagrange $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{R}}\right) = \frac{\partial L}{\partial R} \rightsquigarrow$ interpretación complicada.
  1. Solo válida en coordenadas locales sobre $SO(3)$ (ángulos de Euler).
  2. Se puede considerar $SO(3) \hookrightarrow \mathbb{R}^9$ y usar multiplicadores de Lagrange para describir el movimiento como un sistema en $\mathbb{R}^9$ con restricciones holónomas ($R^T R - I = 0$).

Ecuaciones de Euler–Poincaré para el cuerpo rígido

Aprovechando la simetría del lagrangiano, puede escribirse en términos de la velocidad angular del cuerpo como

$$L(R, \dot{R}) = \frac{1}{2}\mathsf{Tr}(\dot{R}\mathbb{J}\dot{R}^T) = \frac{1}{2}\mathsf{Tr}(\hat{\Omega}\mathbb{J}\hat{\Omega}^T) = \frac{1}{2}\langle \Omega, \mathbb{I}\Omega\rangle.$$

Por lo tanto, tenemos el lagrangiano reducido $\ell : \mathfrak{so}(3) \to \mathbb{R}$,

$$\ell(\hat{\Omega}) = \frac{1}{2}\mathsf{Tr}(\hat{\Omega}\mathbb{J}\hat{\Omega}^T) = \frac{1}{2}\langle \Omega, \mathbb{I}\Omega\rangle \ (= L(I, \hat{\Omega})).$$

La dinámica para ℓ se determina mediante el principio variacional (con restricciones) sobre $\mathfrak{so}(3) \simeq \mathbb{R}^3$,

$$\delta \int_a^b \ell(\Omega(t))dt = 0,$$

para variaciones de la forma $\delta\Omega = \dot{\Sigma} + \Omega \times \Sigma$ con $\Sigma \in \mathfrak{so}(3)$ que se anula en los extremos $t = a$ y $t = b$, dando lugar a las ecuaciones de Euler

$$\mathbb{I}\dot{\Omega} = \mathbb{I}\Omega \times \Omega.$$

Ecuaciones de Euler–Poincaré

Sea G un grupo de Lie, $L : TG \to \mathbb{R}$ un lagrangiano invariante a la izquierda, y definamos el lagrangiano reducido $\ell : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ como $\ell(\xi) := L(e, \xi)$, es decir, la restricción de L a $\mathfrak{g}$. Para una curva $g(t) \in G$, sea

$$\xi(t) = g^{-1}(t)\dot{g}(t) := T_{g(t)}L_{g(t)^{-1}}\dot{g}(t) \in \mathfrak{g}.$$

El principio variacional

$$\delta \int_a^b \ell(\xi(t))dt = 0$$

para variaciones de la forma

$$\delta\xi = \dot{\eta} + [\xi, \eta], \qquad \eta(t) \in \mathfrak{g}, \quad \eta(a) = \eta(b) = 0,$$

da lugar a las ecuaciones de Euler–Poincaré

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \ell}{\partial \xi}\right) = ad^*_\xi \frac{\partial \ell}{\partial \xi},$$

donde ad^* es la acción *coadyunta* del álgebra de Lie sobre su dual:

$$\langle \mathrm{ad}^*_\xi \, \mu, \, \eta \rangle = \langle \mu, \, [\eta, \xi] \rangle, \quad \xi, \eta \in \mathfrak{g}, \; \mu \in \mathfrak{g}^*.$$

Ejemplo: cuerpo rígido libre en $SO(3)$ (Euler–Poincaré)

Tomamos como grupo de configuración

$$G = SO(3), \qquad \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3) \simeq \mathbb{R}^3,$$

e identificamos $\mathfrak{so}(3) \ni \widehat{\Omega} \leftrightarrow \Omega \in \mathbb{R}^3$, donde el corchete se vuelve el producto vectorial:

$$[\Omega, \eta] = \Omega \times \eta.$$

Para una curva $R(t) \in SO(3)$, definimos la velocidad angular en el cuerpo como

$$\Omega(t) = R(t)^{-1}\dot{R}(t) \in \mathfrak{so}(3) \simeq \mathbb{R}^3.$$

Consideramos un lagrangiano invariante a la izquierda de la forma

$$L(R, \dot{R}) = \ell(\Omega), \qquad \ell(\Omega) = \tfrac{1}{2}\,\Omega^\top I\,\Omega,$$

donde I es el tensor de inercia en coordenadas del cuerpo. Entonces

$$\frac{\partial \ell}{\partial \Omega} = I\Omega =: M$$

es el momento angular en el cuerpo.

Con la identificación $\mathfrak{g}^* \simeq \mathbb{R}^3$ y el producto escalar usual, la coadyunta viene dada por

$$\mathrm{ad}^*_\Omega M = \Omega \times M.$$

Las ecuaciones de Euler–Poincaré se vuelven: $\dot{M} = \Omega \times M, \qquad M = I\Omega.$

Es decir, obtenemos las ecuaciones de Euler del cuerpo rígido: $I\,\dot{\Omega} = \Omega \times (I\Omega).$

Error geométrico en $SO(3)$ y control PD con compensación

Dinámica (modelo de satélite):

$$I\,\dot{\Omega} + \Omega \times (I\,\Omega) \;=\; \tau, \qquad R \in SO(3), \quad \dot{R} = R\,\widehat{\Omega},$$

donde $I = \mathrm{diag}(I_1, I_2, I_3)$ es el tensor de inercia en el marco del cuerpo, $\Omega \in \mathbb{R}^3$ la velocidad angular, y $\tau \in \mathbb{R}^3$ los pares de control (*actuación total* en los tres ejes de cuerpo).

Seguimiento de actitud: Dada una referencia $R_d(t) \in SO(3)$ con Ω_d tal que $\dot{R}_d = R_d\widehat{\Omega_d}$, definimos el error:

$$R_e := R_d^\top R, \quad e_R := \tfrac{1}{2}\left(R_e - R_e^\top\right)^\vee, \quad e_\Omega := \Omega - R^\top R_d\,\Omega_d.$$

Error geométrico en $SO(3)$ y control PD con compensación

Dinámica (modelo de satélite):

$$I\,\dot{\Omega} + \Omega \times (I\,\Omega) \;=\; \tau, \qquad R \in SO(3), \quad \dot{R} = R\,\widehat{\Omega},$$

donde $I = \operatorname{diag}(I_1, I_2, I_3)$ es el tensor de inercia en el marco del cuerpo, $\Omega \in \mathbb{R}^3$ la velocidad angular, y $\tau \in \mathbb{R}^3$ los pares de control (*actuación total* en los tres ejes de cuerpo).

Seguimiento de actitud: Dada una referencia $R_d(t) \in SO(3)$ con Ω_d tal que $\dot{R}_d = R_d\widehat{\Omega_d}$, definimos el error:

$$R_e := R_d^\top R, \quad e_R := \tfrac{1}{2}\left(R_e - R_e^\top\right)^\vee, \quad e_\Omega := \Omega - R^\top R_d\,\Omega_d.$$

Control geométrico:

$$\boxed{\tau \;=\; -K_R\,e_R \;-\; K_\Omega\,e_\Omega \;+\; \Omega \times (I\Omega) \;-\; I\big(\widehat{\Omega}\,R^\top R_d\,\Omega_d - R^\top R_d\,\dot{\Omega}_d\big)}$$

con $K_R, K_\Omega \succ 0$.

Para regulación (R_d constante, $\Omega_d = 0$) la ley se reduce a

$$\tau = -K_R e_R - K_\Omega \Omega + \Omega \times (I\Omega).$$

Función de Lyapunov y (casi) estabilidad global

Función de configuración:

$$\psi(R, R_d) \;=\; \tfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}\big(I - R_d^\top R\big) \quad (\psi \in [0,2]), \qquad e_R = \tfrac{1}{2}\big(R_d^\top R - R^\top R_d\big)^\vee.$$

Función de Lyapunov:

$$V(R, \Omega) \;=\; \tfrac{1}{2}\, e_\Omega^\top I\, e_\Omega \;+\; k_R\, \psi(R, R_d), \qquad k_R > 0.$$

Función de Lyapunov y (casi) estabilidad global

Función de configuración:

$$\psi(R,R_d) \;=\; \tfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}\big(I - R_d^\top R\big) \quad (\psi \in [0,2]), \qquad e_R = \tfrac{1}{2}\big(R_d^\top R - R^\top R_d\big)^\vee.$$

Función de Lyapunov:

$$V(R,\Omega) \;=\; \tfrac{1}{2}\,e_\Omega^\top I\, e_\Omega \;+\; k_R\,\psi(R,R_d), \qquad k_R > 0.$$

Derivada a lo largo del lazo cerrado:

$$\dot V \;=\; -\,e_\Omega^\top K_\Omega\, e_\Omega \;\le\; 0,$$

y, usando invarianza de LaSalle, $(R,\Omega) \to (R_d,0)$ salvo un conjunto de medida cero (asociado a la topología de $SO(3)$), lo que proporciona estabilidad casi global para control continuo y tiempo-invariante.

Función de Lyapunov y (casi) estabilidad global

Función de configuración:

$$\psi(R,R_d) \;=\; \tfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}\big(I - R_d^\top R\big) \quad (\psi \in [0,2]), \qquad e_R = \tfrac{1}{2}\big(R_d^\top R - R^\top R_d\big)^\vee.$$

Función de Lyapunov:

$$V(R,\Omega) \;=\; \tfrac{1}{2}\, e_\Omega^\top I\, e_\Omega \;+\; k_R\,\psi(R,R_d), \qquad k_R > 0.$$

Derivada a lo largo del lazo cerrado:

$$\dot V \;=\; -\,e_\Omega^\top K_\Omega\, e_\Omega \;\le\; 0,$$

y, usando invarianza de LaSalle, $(R,\Omega) \to (R_d, 0)$ salvo un conjunto de medida cero (asociado a la topología de $SO(3)$), lo que proporciona estabilidad casi global para control continuo y tiempo-invariante.

Observación topológica: La ausencia de estabilización global continua en $SO(3)$ motiva diseños híbridos para lograr globalidad.

Contractibilidad y obstrucción topológica en $SO(3)$

Contractibilidad (definición). Una variedad M es **contractible** si puede deformarse continuamente a un punto; es decir, si existe una homotopía $H : M \times [0,1] \to M$ tal que: $H(x,0) = x$, $H(x,1) = x_0$ (punto fijo). Si no existe tal homotopía, la variedad tiene **lazos no contráctiles** y topología no trivial.

En el caso de las rotaciones:

$$SO(3) = \{R \in \mathbb{R}^{3\times 3} : \; R^\top R = I, \; \det R = 1\}$$

no es contractible. La razón geométrica es que una rotación de 2π produce la misma orientación física: no se puede "encoger" continuamente la rotación hasta la identidad sin romper la continuidad.

Formalmente, $SO(3) \simeq \mathbb{RP}^3 = S^3/\{x \sim -x\}$, el espacio proyectivo real tridimensional: la esfera S^3 con puntos opuestos identificados.

Consecuencia para control: Por resultados de *Brockett* y *Bhat–Bernstein*, no existe un controlador **continuo y tiempo–invariante** que estabilice globalmente un único equilibrio en $SO(3)$.

Por eso, la regulación continua en actitud sólo puede ser **casi global**.

Cuaterniones unitarios y la eliminación de la obstrucción

Los cuaterniones unitarios $S^3 = \{q \in \mathbb{H} : \|q\| = 1\}$ forman una variedad **contractible en dimensión superior**: a diferencia de $SO(3)$, S^3 es **simplemente conexo** y no contiene lazos no contráctiles.

La proyección $\pi : S^3 \longrightarrow SO(3), \qquad q \mapsto R(q)$, es un **doble recubrimiento**:

$$q \sim -q \quad \Rightarrow \quad R(q) = R(-q).$$

Significado geométrico:

- En S^3 las rotaciones no tienen singularidad en π radianes.
- Toda configuración puede "encogerse" continuamente (contractibilidad).
- Esto permite diseñar leyes de control **globales** a nivel de representación.

Pero: la ambigüedad $q \sim -q$ implica que un control continuo en S^3 puede no proyectar en uno continuo en $SO(3)$.

Solución práctica:

- Representar el error de actitud mediante cuaterniones $\Rightarrow$ sin singularidades.
- Resolver la ambigüedad de signo mediante **lógica híbrida**.
- Lograr así **estabilización global** en actitud.

Modelización de un Drone

Modelización de un Drone

Empleamos dos sistemas de coordenadas: un sistema en al cuerpo y un sistema inercial (espacial).

- La posición del drone se describe mediante un punto $x \in \mathbb{R}^3$ en el sistema inercial.
- La orientación de los rotores puede controlarse para producir tres modos independientes de movimiento rotacional: alabeo (roll), cabeceo (pitch) y guiñada (yaw).
- La actitud se describe mediante una matriz $R \in SO(3)$.

En conjunto, el espacio de configuraciones se describe mediante el Grupo Euclídeo Especial:

$$\mathrm{SE}(3) \cong \underbrace{SO(3)}_{\text{actitud}} \times \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{posición}} .$$

Ángulos de rotación: *roll*, *pitch* y *yaw*

Descripción

La orientación (actitud) de un drone puede describirse mediante tres rotaciones sucesivas del cuerpo respecto al sistema inercial:

- **Alabeo (roll) ϕ**: rotación alrededor del eje x del cuerpo. Controla la inclinación lateral (derecha–izquierda).
- **Cabeceo (pitch) θ**: rotación alrededor del eje y del cuerpo. Controla la inclinación hacia adelante o atrás.
- **Guiñada (yaw) ψ**: rotación alrededor del eje z del cuerpo. Controla la orientación horizontal (rumbo o dirección).

Ángulos de rotación: *roll*, *pitch* y *yaw*

Descripción

La orientación (actitud) de un drone puede describirse mediante tres rotaciones sucesivas del cuerpo respecto al sistema inercial:

- **Alabeo (roll) ϕ**: rotación alrededor del eje x del cuerpo. Controla la inclinación lateral (derecha–izquierda).
- **Cabeceo (pitch) θ**: rotación alrededor del eje y del cuerpo. Controla la inclinación hacia adelante o atrás.
- **Guiñada (yaw) ψ**: rotación alrededor del eje z del cuerpo. Controla la orientación horizontal (rumbo o dirección).

Composición de las rotaciones

La matriz de rotación total se obtiene como:

$$R = R_z(\psi)\, R_y(\theta)\, R_x(\phi),$$

donde cada R_i es una rotación elemental en torno al eje correspondiente.

Estos tres ángulos determinan completamente la actitud del drone.

Dinámica de un quadrotor en $SE(3)$ (modelo estándar)

Estados: posición $x \in \mathbb{R}^3$, velocidad $v \in \mathbb{R}^3$, actitud $R \in SO(3)$, velocidad angular $\Omega \in \mathbb{R}^3$.
Entradas: empuje total $f \in \mathbb{R}$ (a lo largo de $b_3 := Re_3$) y torques $\tau \in \mathbb{R}^3$.

Ecuaciones en $SE(3)$:

$$\dot{x} = v, \qquad m\,\dot{v} = mg\,e_3 - f\,Re_3,$$

$$\dot{R} = R\,\widehat{\Omega}, \qquad J\,\dot{\Omega} + \Omega \times (J\Omega) = \tau,$$

donde $m > 0$, $J = J^\top \succ 0$, $g > 0$, $e_3 = (0,0,1)^\top$.

Comentario: El sistema es *bajo-actuado*: el empuje es escalar y siempre en la dirección $b_3 = Re_3$, mientras la actitud sí es totalmente actuada.

Seguimiento de posición: construcción de la actitud deseada

Errores de traslación:

$$e_x := x - x_d, \qquad e_v := v - \dot{x}_d.$$

Vector de empuje deseado (pre-normalizado):

$$F_d := -k_x e_x - k_v e_v + mg\, e_3 - m\, \ddot{x}_d, \qquad k_x, k_v \succ 0.$$

Dirección deseada de b_3:

$$b_{3c} := \frac{F_d}{\|F_d\|} \quad (\text{si } \|F_d\| > 0).$$

Ángulo de guiñada (yaw) deseado: ψ_d y su eje $b_{1d} := [\cos\psi_d,\ \sin\psi_d,\ 0]^\top$.

Construcción de la base $R_c = [b_{1c}\ b_{2c}\ b_{3c}] \in SO(3)$:

$$b_{2c} := \frac{b_{3c} \times b_{1d}}{\|b_{3c} \times b_{1d}\|}, \qquad b_{1c} := b_{2c} \times b_{3c}.$$

Así se define la *actitud de referencia* R_c coherente con la tarea de posición y el yaw deseado.

Control geométrico (PD + *feedforward*) en $SE(3)$

Errores de actitud y velocidad angular:

$$e_R := \tfrac{1}{2}\big(R_c^\top R - R^\top R_c\big)^\vee, \qquad e_\Omega := \Omega - R^\top R_c\,\Omega_c,$$

donde Ω_c se obtiene de $\dot{R}_c = R_c\widehat{\Omega_c}$.

Empeje (fuerza) de traslación:

$$\boxed{f \;=\; F_d \cdot (Re_3)}$$

que alinea el empuje real con la dirección deseada b_{3c} y compensa gravedad y términos de seguimiento.

Torque de actitud:

$$\boxed{\tau = -K_R\,e_R - K_\Omega\,e_\Omega \;+\; \Omega \times (J\Omega) \;-\; J\Big(\widehat{\Omega}\,R^\top R_c\,\Omega_c - R^\top R_c\,\dot{\Omega}_c\Big)}$$

con $K_R, K_\Omega \succ 0$.

Análisis de Lyapunov: traslación + rotación

Parte traslacional:

$$V_{\mathsf{tr}} := \tfrac{1}{2}\, m\, \|e_v\|^2 + \tfrac{1}{2}\, k_x\, \|e_x\|^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{V}_{\mathsf{tr}} = -\, k_v\, \|e_v\|^2 + \underbrace{(Re_3 - b_{3c}) \cdot (\cdots)}_{\text{acopl. actitud}}.$$

Parte rotacional (función de configuración):

$$\Psi(R, R_c) := \tfrac{1}{2}\, \mathrm{tr}\big(I - R_c^\top R\big) \in [0, 2], \quad V_{\mathsf{rot}} := \tfrac{1}{2}\, e_\Omega^\top J e_\Omega + k_R\, \Psi(R, R_c).$$

$$\dot{V}_{\mathsf{rot}} = -\, e_\Omega^\top K_\Omega e_\Omega \quad \text{(bajo la ley de torque dada).}$$

Lyapunov total:

$$V := V_{\mathsf{tr}} + V_{\mathsf{rot}} \quad \Rightarrow \quad \dot{V} \leq -\, k_v \|e_v\|^2 - e_\Omega^\top K_\Omega e_\Omega,$$

y mediante invarianza de LaSalle y acotación estándar del acoplamiento, se obtiene **convergencia asintótica** de $(e_x, e_v, e_R, e_\Omega)$ a cero en una región grande; por topología de $SO(3)$, la estabilización continua es *casi global*.

Conclusiones de la Clase

1. **Mecánica geométrica como lenguaje unificador**
   - La dinámica de robots, satélites y drones se formula mejor sobre variedades (S^1, $SO(3)$, $SE(3)$).
   - El lagrangiano y la métrica inducida permiten entender fuerzas, geometría y simetrías.
2. **Control no lineal basado en estructura**
   - El PD con compensación explota la estructura Lagrangiana.
   - Lyapunov + LaSalle garantiza estabilidad (y exponencialidad bajo cotas).
3. **Control geométrico en actitud**
   - En $SO(3)$ no existe estabilización global continua (topología: $SO(3) \simeq \mathbb{RP}^3$).
   - La estabilidad es **casi global**.
   - Cuaterniones (S^3) permiten diseños globales a nivel de representación.
4. **Aplicación a drones en $SE(3)$**
   - El control translacional y de actitud se integran de forma coherente con la geometría del sistema.
   - El diseño PD+feedforward en $SE(3)$ garantiza seguimiento estable y robusto.